ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Под редакцией Г. Н. ЯКОВЛЕВА

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для поступающих в вузы

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.1
П 62
УДК 51

Коллектив авторов:
А. Д. КУТАСОВ, Т. С. ПИГОЛКИНА,
В. И. ЧЕХЛОВ, Т. Х. ЯКОВЛЕВА

П $\frac{20203-002}{053(02)-81}$ 28-80. 1702030000

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава I. **Множества. Понятие функции и обратной функции** 9

§ 1. Множество. Подмножество. Объединение и пересечение множеств. Числовые множества 9
§ 2. Понятие функции 18
§ 3. Координатная плоскость. График функции 21
§ 4. Обратная функция 22

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 25
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 27

Глава II. **Элементы логики. Взаимно обратные и взаимно противоположные теоремы. Метод математической индукции** 30

§ 1. Высказывания. Операции над высказываниями 30
§ 2. Предложения, зависящие от переменной 37
§ 3. Взаимно обратные и взаимно противоположные теоремы. Необходимые и достаточные условия 42
§ 4. Метод математической индукции 47

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 51
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 54

Глава III. **Уравнения и системы уравнений** 58

§ 1. Уравнения с одним и несколькими переменными 58
§ 2. Системы уравнений 63
§ 3. Системы линейных уравнений 67
§ 4. Задачи на составление уравнений 72

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 75
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 76

Глава IV. **Алгебраические неравенства** 81

§ 1. Функциональные неравенства. Понятие равносильности неравенств 81
§ 2. Рациональные неравенства. Метод интервалов 83
§ 3. Иррациональные неравенства 87
§ 4. Неравенства с модулем 89
§ 5. Неравенства с параметрами 90
§ 6. Доказательство неравенств 94
§ 7. Приложение неравенств к задачам на наибольшие и наименьшие значения 98

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 100
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 101

Глава V. **Последовательности. Предел последовательности. Предел функции. Производная** 105
§ 1. Бесконечные последовательности. Последовательности ограниченные и неограниченные 105
§ 2. Предел последовательности. Теоремы о сходящихся последовательностях 107
§ 3. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса 111
§ 4. Арифметическая прогрессия 113
§ 5. Геометрическая прогрессия 115
§ 6. Предел функции. Непрерывность функции 117
§ 7. Производная, ее геометрический смысл 121
§ 8. Предел функции на бесконечности 125
§ 9. Односторонние пределы. Бесконечные пределы 126
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 129
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 131

Глава VI. **Исследование функций и построение их графиков** 136
§ 1. Четные и нечетные функции 136
§ 2. Периодические функции 138
§ 3. Асимптоты 140
§ 4. Преобразования графиков функций 143
§ 5. Элементарные функции и их графики 145
§ 6. Построение графиков функций 153
§ 7. Применение производной к исследованию функций и построению их графиков 155
§ 8. Наибольшее и наименьшее значения функции 158
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 160
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 161

Глава VII. **Векторы** 163
§ 1. Некоторые необходимые определения и обозначения 163
§ 2. Векторы, их обозначение и изображение. Коллинеарные и компланарные векторы 165
§ 3. Сумма векторов. Противоположный вектор. Разность векторов . 167
§ 4. Умножение вектора на число. Признак коллинеарности 170
§ 5. Условие компланарности векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам 171
§ 6. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов 173
§ 7. Базис. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами 176
§ 8. Прямоугольная система координат. Уравнение плоскости 178
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 181
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 183

Глава VIII. **Комплексные числа** 187
§ 1. Определение комплексных чисел 187
§ 2. Свойства операций сложения и умножения 188
§ 3. Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Правила действий с комплексными числами, записанными в алгебраической форме 190
§ 4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа 193
§ 5. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме 198
§ 6. Возведение в степень и извлечение корня 200
§ 7. Алгебраические уравнения 203

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 208
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 208

Глава IX. **Тригонометрические уравнения, системы, неравенства** 211

§ 1. Тригонометрические уравнения 211
§ 2. Системы тригонометрических уравнений 225
§ 3. Тригонометрические неравенства 234

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 239
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 240

Глава X. **Показательные и логарифмические уравнения, системы и неравенства** 248

§ 1. Показательные уравнения 250
§ 2. Логарифмические уравнения 251
§ 3. Разные примеры уравнений 255
§ 4. Система показательных и логарифмических уравнений 258
§ 5. Показательные и логарифмические неравенства 260

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 265
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 266

Глава XI. **Комбинаторика. Формула Ньютона для степени бинома. Случайные события и их вероятности** 273

§ 1. Размещения, перестановки, сочетания 273
§ 2. Формула Ньютона 281
§ 3. Случайные события и их вероятности 285

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 288
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 289

Глава XII. **Интеграл** 292

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл 292
§ 2. Интеграл и формула Ньютона — Лейбница 298
§ 3. Площадь криволинейной трапеции 303
§ 4. Применение интеграла к вычислению объемов тел 308
§ 5. Применение интеграла при решении физических задач 312

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 314
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 316

Глава XIII. **Решение планиметрических задач** 319

§ 1. Разные задачи 320
§ 2. Подобие треугольников. Теоремы синусов и косинусов 328
§ 3. Свойства хорд, секущих и касательных 333
§ 4. Алгебраические и тригонометрические методы решения. Применение векторной алгебры 336

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 340
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 342

Глава XIV. **Множества точек на плоскости и в пространстве. Задачи на построение** 348

§ 1. Множества точек, обладающих заданным свойством 348
§ 2. Применение метода координат 354
§ 3. Задачи на построение 356

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 362
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 363

Глава XV. Стереометрия (часть I) 366
§ 1. Сечения многогранников 366
§ 2. Применение критериев коллинеарности и компланарности векторов в решении задач 379
§ 3. Угол между прямыми в пространстве 385
§ 4. Применение скалярного произведения векторов в решении задач 387
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 390
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 391

Глава XVI. Стереометрия (часть II) 399
§ 1. Перпендикулярные прямые и плоскости 399
§ 2. Об изображении на рисунках перпендикулярных прямых и плоскостей. Построение сечений, перпендикулярных прямой или плоскости 403
§ 3. Угол между прямой и плоскостью 407
§ 4. Расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми и плоскостями 410
§ 5. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Биссектор. Трехгранный угол 414
§ 6. О вычислении объемов многогранников и их частей 420
§ 7. Задачи на комбинации многогранников 423
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 425
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 426

Глава XVII. Фигуры вращения 434
§ 1. Цилиндр 434
§ 2. Конус 437
§ 3. Сфера 441
§ 4. Комбинации сферы, конуса и цилиндра 451
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I 455
ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II 456

Приложение. Образцы вариантов, предлагавшихся в 1977—1979 гг. на письменных вступительных экзаменах по математике 464

Решения задач I раздела 474

Ответы к задачам II раздела и приложения 574

Список формул 600

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана для учащихся, желающих углубить и несколько расширить свои знания, с тем чтобы лучше подготовиться к вступительным экзаменам в вузы. Она может помочь и тем, кто уже окончил школу, но продолжает изучать математику самостоятельно или на подготовительных курсах и отделениях. Авторы надеются, что учителя средних школ, преподаватели профтехучилищ и техникумов, руководители математических кружков и студенты педагогических вузов найдут в книге материал, который смогут использовать в своей работе. Наконец, книга может представлять интерес как сборник, содержащий более 2000 задач, из которых треть задач приведены с решениями. Значительная часть задач предлагалась на вступительных экзаменах в различных вузах.

Книга написана в соответствии с программой по математике для средних школ, и в ней используются терминология и обозначения, принятые сейчас в школе. Пособие не содержит систематического изложения школьного курса математики и не может заменить школьные учебники. Тем не менее все основные и важные, по мнению авторов, вопросы освещены достаточно подробно. В некоторых случаях добавлен материал, несколько выходящий за рамки ныне действующей программы для поступающих в вузы. Авторы считают, что изучение этого материала будет способствовать развитию математической культуры учащихся, а также принесет пользу при дальнейшем обучении в вузах.

Книга состоит из 17 глав. Каждая глава содержит теоретический материал и задачи. Изложение теории сопровождается разбором большого числа примеров различной трудности. Задачи в каждой главе разбиты на два раздела: задачи первого раздела даны с решениями, задачи второго раздела — только с ответами. Авторы настоятельно советуют учащимся обращаться к приведенным

в книге решениям задач I-го раздела только после настойчивых попыток решить задачу самостоятельно. Самостоятельное решение одной задачи часто приносит больше пользы, чем разбор готовых решений нескольких задач. Учащимся, которые желают поступить в вузы с повышенными требованиями по математике, следует изучать материал более глубоко с непременным решением достаточного количества задач.

В конце книги в «Приложении» даны образцы вариантов письменных экзаменационных работ по математике, предлагавшихся в 1977 — 1979 гг. Они дают представление о степени трудности задач на приемных экзаменах в различных вузах страны.

В заключение отметим, что пособие написано на основе опыта заочного обучения математике школьников 8 — 10 классов в заочной физико-технической школе при Московском физико-техническом институте. Авторы благодарят директора ЗФТШ, заслуженного учителя РСФСР Т. А. Чугунову за помощь в работе. Авторы выражают также глубокую благодарность профессору Г. Н. Яковлеву, советами и рекомендациями которого они постоянно пользовались.

Глава I

МНОЖЕСТВА. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Множество. Подмножество. Объединение и пересечение множеств. Числовые множества

Множество. В математике понятие *множество* используется для описания совокупности предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность. Например, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой. Книги данной библиотеки, вершины данного многоугольника, натуральные числа, точки данной прямой являются *элементами* соответствующих множеств.

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, ... Тот факт, что объект a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ и читается «a принадлежит множеству A», «a входит в множество A». Запись $a \notin A$ (или $a \overline{\in} A$) означает, что a не является элементом множества A.

Например, если через $\mathbb{N}$ обозначено множество натуральных чисел, то

$$3 \in \mathbb{N},\ 20 \in \mathbb{N},\ 0 \notin \mathbb{N},\ 3/2 \notin \mathbb{N}.$$

Обычно множество задается указанием характеристического свойства его элементов, т. е. такого свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они. Чаще всего это свойство формулируется словами: множество учеников данного класса, множество решений уравнения $x^2 - 1 = 0$, множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек.

Может оказаться, что множество определено таким свойством, которым не обладает вообще ни один объект. Рассмотрим, например, множество треугольников, длины сторон которых равны 1 см, 2 см, 5 см. Из геометрии известно, что треугольника с такими длинами сторон не существует, т. е. так определенное множество не содержит ни одного элемента. Ни одного элемента не содержит и множество рациональных чисел, квадрат которых

равен двум. Множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=2 \end{cases}$$

также не содержит ни одного элемента. Говорят, что эти множества *пустые*. Пустое множество не содержит элементов, оно обозначается знаком $\emptyset$.

Если множество содержит конечное число элементов, бывает удобно задать это множество перечислением его элементов. Элементы множества выписываются подряд и заключаются в фигурные скобки, порядок записи при этом роли не играет. Например, множество, состоящее из трех букв *а*, *б*, *в*, записывается так: $\{a, б, в\}$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут $A=B$.

Множество решений уравнения $x^2-5x+6=0$ содержит те же самые элементы (числа 2 и 3), что и множество простых чисел, меньших пяти. Эти два множества равны.

Числовые множества. В алгебре чаще всего приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называются *числовыми*. Для некоторых часто встречающихся числовых множеств в школьном курсе математики приняты стандартные обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси). *Координатная прямая* — это всякая прямая, на которой выбраны направление, принимаемое за положительное, точка — начало отсчета и единица измерения — масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице. Координатная прямая обычно изображается горизонтально, положительное направление указывается стрелкой, начало отсчета обозначается O (рис. 1). Точка O разбивает координатную прямую на два луча, один из которых имеет положительное направление и называется *положительным лучом*, другой — *отрицательным*. Число, изображением

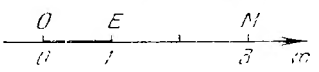


Рис. 1.

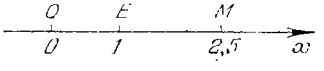


Рис. 2.

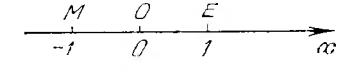


Рис. 3.

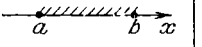
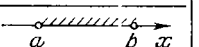
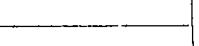
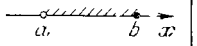
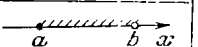
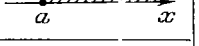
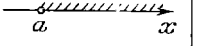
которого на координатной прямой является точка M, называется *координатой* точки M. Координата начальной точки O равна нулю. Координата любой точки M, лежащей на положительном луче OE, равна длине отрезка OM: $x=|OM|$ (на рис. 2 координата точки M равна 2,5). Если же точка M лежит на отрицательном луче, ее координата равна длине отрезка OM, но взятой

со знаком минус: $x = -|OM|$ (на рис. 3 координата точки M равна -1). Вся координатная прямая обозначается Ox.

Неравенства между действительными числами на координатной прямой получают простое истолкование. Если $x_1 < x_2$, то точка с координатой x_1 лежит левее точки с координатой x_2. Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 координатной прямой равно абсолютной величине разности их координат x_1 и x_2: $|M_1M_2| = |x_1 - x_2|$.

Пусть a и b — действительные числа и $a < b$. Ниже в таблице 1 даны названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и их изображение на координатной прямой. Каждый из числовых промежутков определяется как множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Таблица 1. **Числовые промежутки**

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;\ b]$	
интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	$]a;\ b[$	
открытый слева промежуток от a до b	$a < x \leqslant b$	$]a;\ b]$	
открытый справа промежуток от a до b	$a \leqslant x < b$	$[a;\ b[$	
числовой луч от a до $+\infty$	$a \leqslant x$	$[a;\ +\infty[$	
открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$]a;\ +\infty[$	
числовой луч от $-\infty$ до a	$x \leqslant a$	$]-\infty;\ a]$	
открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$]-\infty;\ a[$	

Открытый слева и открытый справа промежутки (см. таблицу 1) называются также *полуоткрытыми промежутками*, а числовые лучи — *бесконечными промежутками*. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначается также $]-\infty;\ +\infty[$ и называется *числовой прямой*. Всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

При рассмотрении числовых множеств вместо слов «элемент», «число» употребляется также слово «точка». Так, например, вместо

«число 1 принадлежит отрезку [0; 2]» говорят: «точка 1 лежит на отрезке [0; 2]» или «точка 1 принадлежит отрезку [0; 2]».

Подмножество. Всякое натуральное число принадлежит множеству целых чисел; любая точка интервала $]a; b[$ является точкой отрезка $[a, b]$; любой правильный треугольник является элементом множества всех треугольников.

Если любой элемент множества A принадлежит также множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B. Это записывается так: $A \subset B$ или $B \supset A$. В этом случае говорят, что множество A содержится в множестве B или множество B содержит множество A. Таким образом, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел является подмножеством множества $\mathbb{Z}$ целых чисел, т. е. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; интервал $]a; b[$ является подмножеством отрезка $[a, b]$: $]a; b[\subset [a; b]$.

Если в множестве A найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству B, то A не является подмножеством множества B: $A \not\subset B$. Например, отрезок $[a; b]$ не является подмножеством промежутка $]a; b]$, так как $a \in [a, b]$, но $a \notin]a; b]$.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение $A \subset A$.

Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества. Это вполне естественно, так как пустое множество не содержит ни одного элемента и, следовательно, в нем нет элемента, который не принадлежал бы любому другому множеству.

Рассмотрим, например, множество учеников некоторого класса; обозначим это множество X, и пусть Y — множество учеников того же класса, получивших за контрольную по истории оценку «отлично». Если все ученики класса получили за эту контрольную отличную оценку, то X и Y равные множества: $X = Y$. Если же ни один ученик класса не получил «отлично», то множество Y пустое, $Y = \emptyset$. Но в любом случае множество Y является подмножеством множества X: $Y \subset X$.

Рассмотрим еще произвольное множество, состоящее из трех элементов, которые обозначим a, b и c, и найдем все его подмножества.

Это пустое множество $\emptyset$; множества, содержащие по одному элементу: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$; множества, содержащие по два элемента: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$; само множество $\{a, b, c\}$. Число всех этих подмножеств равно восьми. Таким образом, любое множество, состоящее из трех элементов, имеет $8 = 2^3$ подмножеств. В дальнейшем (см. глава XI) будет установлено, что если множество состоит из n элементов, то число всех его подмножеств равно 2^n.

Пересечение множеств. Рассмотрим два множества:

$$X = \{0, 1, 3, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Числа 1 и 3 и только они принадлежат одновременно обоим множествам X и Y. Составленное из них множество $\{1, 3\}$ содержит все общие для множеств X и Y элементы.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $A \cap B$.

Таким образом, множество $\{1, 3\}$ является пересечением рассмотренных множеств X и Y:

$$\{0, 1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}.$$

Для отрезка $[-1; 1]$ и интервала $]0; 3[$ пересечением, т. е. множеством, состоящим из общих элементов, является промежуток $]0; 1]$ (рис. 4).

Пересечением множества прямоугольников и множества ромбов является множество квадратов. Пересечение множества учеников восьмых классов данной школы и множества членов химического кружка той же школы есть множество учеников восьмых классов, являющихся членами химического кружка.

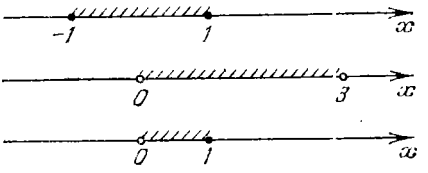


Рис. 4.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются или что их пересечение — пустое множество, и пишут $A \cap B = \emptyset$. Например, пересечение множества четных чисел с множеством нечетных чисел пусто. Пустым является и пересечение числовых промежутков $]-1; 0]$ и $[2; +\infty[$ (рис. 5).

Пересечение любого множества A с пустым множеством есть, очевидно, пустое множество: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Объединение множеств. Вновь возьмем множества $X = \{0, 1, 3, 5\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ и наряду с ними рассмотрим множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Это множество содержит все элементы множества X (числа 0, 1, 3, 5) и все элементы множества Y (числа 1, 2, 3, 4) и не содержит никаких других элементов, т. е. множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ содержит те и только те элементы, которые принадлежат или множеству X или множеству Y.

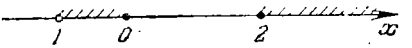


Рис. 5.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается $A \cup B$.

Итак,

$$\{0, 1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Объединение множества положительных четных чисел и множества положительных нечетных чисел есть, очевидно, множество натуральных чисел. Объединением множества учеников школы моложе 12 лет с множеством учеников той же школы старше 10 лет является множество всех учеников этой школы.

Объединением числовых промежутков $[-1; 1]$ и $]0; 3[$ является промежуток $[-1; 3[$ (рис. 6).

Заметим, что не всегда объединение числовых промежутков можно представить одним числовым промежутком. Например, объединение множеств $]-1; 0]$ и $[2; +\infty[$ числовым промежутком не является (см. рис. 5).

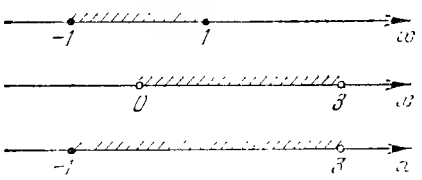


Рис. 6.

Данные определения пересечения и объединения множеств хорошо иллюстрируются при наглядном изображении множеств на плоскости. Множества схематически изображаются кругами, прямоугольниками. Например, на рис. 7 так изображены множества A и B, множество A заштриховано горизонтально, множество B — вертикально. На рис. 8 и 9 заштрихованы соответственно множества $A \cap B$ и $A \cup B$.

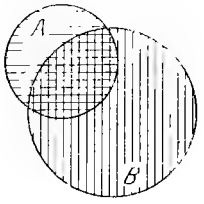


Рис. 7.

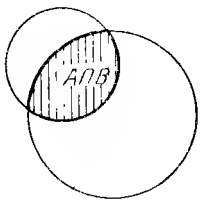


Рис. 8.

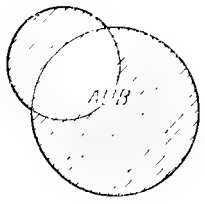


Рис. 9.

Часто приходится рассматривать объединение и пересечение трех и более множеств. Объединение множеств A, B и C есть множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A, B или C (рис. 10). Пересечение множеств A, B и C есть множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 11).

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников есть множество всех треугольников; объединение множеств вершин треугольников, вписанных в данную окружность, представляет собой множество точек этой окружности. Если A, B и C — соответственно множества учеников класса, решивших на контрольной по математике задачу по алгебре, задачу по геометрии, задачу по тригонометрии, то пере-

сечение этих множеств есть множество учеников этого класса, решивших все три задачи.

Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел,

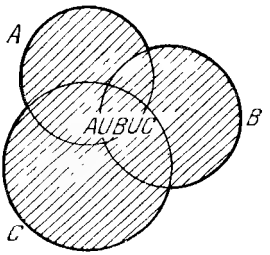


Рис. 10.

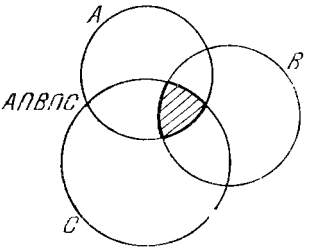


Рис. 11.

например переместительным, сочетательным и распределительным свойствами (слева записаны равенства для множеств, справа — для чисел):

1. $A \cup B = B \cup A$, $\quad a + b = b + a$.
2. $A \cap B = B \cap A$, $\quad ab = ba$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (ab) \cdot c = a \cdot (bc)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\quad (a + b)\, c = ac + bc$.

Однако эта аналогия не всегда имеет место. Например, для множеств справедливы равенства (первое из них проиллюстрировано на рис. 12)

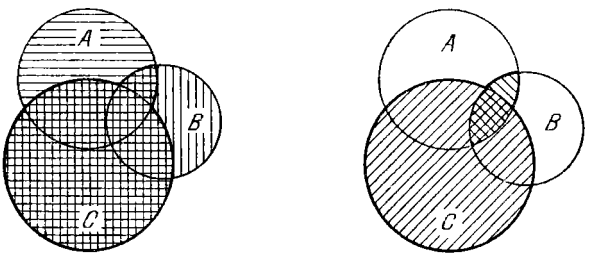


Рис. 12.

6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
7. $A \cup A = A$.
8. $A \cap A = A$.

Соответствующие равенства для чисел, очевидно, верны не всегда.

Для конечного множества A через $m(A)$ обозначим число его элементов. Число элементов пустого множества, очевидно, равно нулю. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (1)$$

Действительно, пусть множества A и B не пересекаются, т. е. $m(A \cap B) = 0$. Их объединение получается добавлением к элементам одного множества всех элементов другого множества, поэтому

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Если же пересечение множеств A и B не пусто, то число их общих элементов равно $m(A \cap B)$. Объединение этих множеств образуется добавлением к элементам множества A всех тех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \cap B)$. Таким образом,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Пример 1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

△ Пусть A — множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B — множество абитуриентов, получивших оценки ниже 5, по условию $m(A) = 210$, $m(B) = 180$, $m(A \cup B) = 250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$. По формуле (1) находим

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 140. \ \blacktriangle$$

Дополнение. Часто ограничиваются рассмотрением всевозможных подмножеств одного и того же множества, которое в этом случае называют *основным* или универсальным множеством. Обозначим основное множество буквой E. Для любого множества A, принадлежащего основному множеству E, справедливы равенства

$$A \cup E = E, \ A \cap E = A.$$

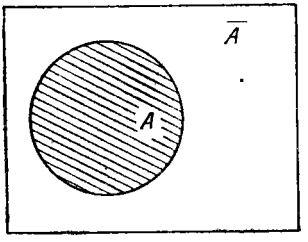


Рис. 13.

Множество элементов основного множества E, не принадлежащих множеству A, называется *дополнением* множества A до множества E или просто дополнением и обозначается $\bar{A}$. Объединение множества A и его дополнения $\bar{A}$ есть основное множество: $A \cup \bar{A} = E$. Пересечение множества со своим дополнением пусто: $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Дополнение пустого множества есть основное множество: $\bar{\emptyset} = E$, а дополнение основного множества пусто: $\bar{E} = \emptyset$. На рис. 13 основное множество E схема-

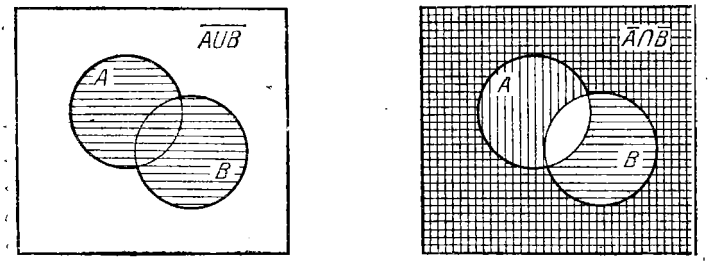
тически изображено в виде прямоугольника, его подмножество A заштриховано, не заштриховано дополнение множества A.

Для любых подмножеств A и B основного множества E справедливы равенства

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \tag{2}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{3}$$

Первое из этих равенств проиллюстрировано на рис. 14, *а* и *б*. На рис. 14, *а* заштриховано объединение множеств A и B, не



а) *б)*

Рис. 14.

заштриховано дополнение этого множества, т. е. $\overline{A \cup B}$. На рис. 14, *б* множество $\bar{A}$ заштриховано горизонтально, множество $\bar{B}$ — вертикально, двойной штриховкой покрыто их пересечение $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Для числовых множеств в качестве основного множества можно взять множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Дополнением до $\mathbb{R}$ множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является множество иррациональных чисел, дополнением луча $[0; +\infty[$ является открытый луч $]-\infty; 0[$.

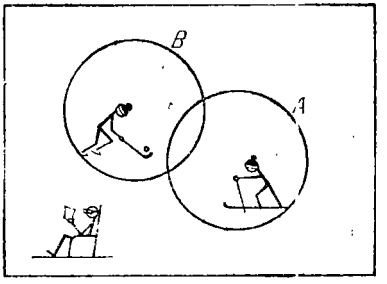


Рис. 15.

Пример 2. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 — на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?

△ Множество учеников школы будем считать основным множеством E, A и B — соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках (рис. 15). Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $\bar{A} \cap \bar{B}$. По условию $m(\bar{A} \cap \bar{B}) = 60$, а так как по формуле (2)

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, то и $m(\overline{A \cup B}) = 60$. Отсюда $m(A \cup B) = m(E) - m(\overline{A \cup B}) = 1340$. Зная $m(A)$ и $m(B)$, по формуле (1) находим

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 862. \blacktriangle$$

§ 2. Понятие функции

Пусть X — некоторое числовое множество. На множестве X определена *числовая функция*, если каждому элементу множества X поставлено в соответствие действительное число. Множество X называется при этом *областью определения* функции. Произвольный элемент области определения обычно обозначается буквой x и называется *аргументом* функции или *независимой переменной*. Выражение «аргумент x пробегает множество X» понимается в том смысле, что вместо x может быть взято любое число из области определения функции.

Например, числовая функция определена следующим образом: каждому числу x отрезка $[0, 1]$ ставится в соответствие число $2x+1$. Отрезок $[0, 1]$ — ее область определения, закон соответствия может быть записан так: $x \to 2x+1$.

Другой пример функции: каждому рациональному числу ставится в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Область определения — все множество действительных чисел (эта функция называется *функцией Дирихле*).

Обычно закон соответствия обозначается некоторой буквой, например f, и говорится, что на множестве X определена функция f или $f(x)$. Употребляется также запись функции в виде $y = f(x)$, здесь x означает аргумент, y — соответствующее ему значение функции, f — закон соответствия. Иногда говорят, что функция f ставит в соответствие (сопоставляет) значению аргумента x значение y.

Рассмотренная функция $x \to 2x+1$ с областью определения $X = [0; 1]$ может быть записана в виде $f(x) = 2x+1$, $x \in [0; 1]$, или $y = 2x+1$, $x \in [0; 1]$, а функция Дирихле, например, так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Разумеется, вместо букв x, f, y можно взять другие буквы, например, функция может быть записана в виде $y = \varphi(t)$ или $z = F(x)$.

Если число a принадлежит области определения функции f, то говорят, что функция f *определена в точке* a. Для того чтобы указать значение функции в фиксированной точке a, используется такая запись: $f(a)$, $y(a)$, $f(x)|_{x=a}$. Вот, например, значения функции $y = 2x+1$, $x \in [0; 1]$, в некоторых точках:

$$y(0) = 1, \quad y(1/2) = 2, \quad y(3/4) = 5/2, \quad y(1) = 3.$$

Множество всех значений функции $f(x)$, когда аргумент x пробегает область определения функции, называется *множеством значений* функции f. Например, множество значений функции $y=2x+1$, $x\in[0;\ 1]$, есть отрезок $[1;\ 3]$, а множество значений функции Дирихле состоит из двух чисел 0 и 1.

Множество значений функции является подмножеством множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Поэтому иногда говорят, что функция есть отображения одного подмножества (области определения) на другое подмножество (множество значений) множества действительных чисел.

Две функции считаются равными, если у них одна область определения и каждому числу из области определения они сопоставляют одно и тоже значение. Например, функция $f(x)=x-1$ с областью определения $]-1;\ +1[$ и функция $g(x)=(x^2-1)/(x+1)$ с той же областью определения равны, так как для любого x из множества $]-1;\ +1[$ имеет место равенство

$$\frac{x^2-1}{x+1}=x-1.$$

Часто функцию задают формулой, указывающей последовательность математических операций, которые надо выполнить над аргументом, чтобы получить ее значение. При этом ничего не говорится об области определения. В этом случае считается, что функция определена на множестве тех значений аргумента, для которых указанные формулой действия выполнимы. Множество всех таких значений аргумента называется *естественной* областью определения функции, заданной формулой, или областью допустимых значений аргумента. Естественная область определения функции f заданной формулой обычно обозначается $D(f)$. В случае задания функции формулой возникает задача нахождения области определения (имеется в виду естественной области определения) функции.

Пример 1. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}.$$

△ Действия, указанные этой формулой, выполнимы для тех значений аргумента x, для которых подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $\frac{x+1}{2-x}\geqslant 0$. Решая это неравенство, находим, что оно справедливо лишь на промежутке $[-1;\ 2[$, который и является естественной областью определения рассматриваемой функции. ▲

Пример 2. Найти область определения функций

$$f_1(x)=\sqrt{1-x^2},\qquad f_2(x)=\frac{x-3}{2x+1},$$

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{x-3}{2x+1}.$$

△ Функция $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ определена на множестве тех значений x, для которых $1 - x^2 \geqslant 0$. Это есть отрезок $[-1; 1]$. Итак, $D(f_1) = [-1; 1]$.

Для функции $f_2(x) = (x-3)/(2x+1)$ естественной областью определения является множество всех значений аргумента, для которых знаменатель дроби не обращается в нуль, т. е. $x \neq -1/2$. Таким образом, $D(f_2) =]-\infty; -1/2[\cup]-1/2; +\infty[$.

Функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ будет определена в точке a тогда и только тогда, когда точка a принадлежит и области определения функции $f_1(x)$, и области определения функции $f_2(x)$. Другими словами, естественная область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения функций f_1 и f_2:

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = [-1; -1/2[\cup]-1/2; 1]. \blacktriangle$$

Напомним определения некоторых часто встречающихся функций.

Многочленом n-й степени ($n \geqslant 0$) *стандартного вида* называется функция

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0;$$

числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* этого многочлена. Область определения многочлена — вся числовая прямая. Многочлен n-й степени обозначается также $P_n(x)$.

В частности, многочлен первой степени

$$y = P_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad a_1 \neq 0,$$

называется *линейной* функцией, а многочлен второй степени

$$y = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad a_2 \neq 0,$$

называется *квадратичной* функцией или *квадратным трехчленом*.

Многочленом n-й степени называется функция, которая определена на всей числовой прямой и может быть приведена к многочлену n-й степени стандартного вида. Например, квадратичными функциями являются функции, определенные формулами

$$f(x) = 1 - x^3 + (x^2 - 3)(x + 1), \qquad g(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Действительно, обе они определены на всей числовой прямой и для любого числа x имеют место равенства

$$1 - x^3 + (x^2 - 3)(x + 1) = x^2 - 3x - 2,$$

$$\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1.$$

Функция $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x+1)}$ на своей области определения совпадает с многочленом первой степени $y = x - 1$. Однако функция $f(x)$ не является многочленом, так как ее область определения не совпадает с множеством $\mathbb{R}$, она не определена в точке $x = -1$.

Рациональной функцией называется функция, которая может быть представлена в виде отношения двух многочленов стандартного вида

$$y=\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ \dots\ +a_nx^n}{b_0+b_1x+\ \dots\ +b_mx^m}.$$

Естественная область определения рациональной функции есть вся числовая прямая за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Например, функция $f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x+1)}$ является рациональной, ее область определения есть вся числовая прямая за исключением $x=-1$.

§ 3. Координатная плоскость. График функции

Две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета образуют прямоугольную систему координат на плоскости. Масштабные отрезки обычно берутся равными, однако иногда используются координатные прямые и с разными масштабными единицами. Одну из этих прямых обычно изображают горизонтально, называют осью *абсцисс* и обозначают Ox. Другую прямую рисуют вертикально, называют осью *ординат* и обозначают Oy (рис. 16). Общее начало — точка O — называется *началом* координат.

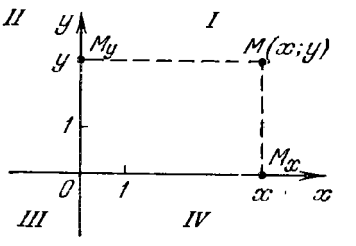


Рис. 16.

Плоскость с выбранной на ней системой координат называется *координатной плоскостью*. На координатной плоскости каждой точке ставится в соответствие пара чисел, называемых *координатами* этой точки относительно данной системы координат. Пусть M_x и M_y — ортогональные проекции точки M соответственно на ось абсцисс и на ось ординат. Точка M_x, как точка координатной прямой Ox, имеет координату x, а точка M_y, как точка координатной прямой Oy, имеет координату y. Пару чисел $(x; y)$ (ее называют «упорядоченной» парой в том смысле, что x на первом месте, а y на втором) называют координатами точки M и пишут $M(x; y)$. Координаты x и y называются соответственно *абсциссой* и *ординатой* точки M.

Каждой упорядоченной паре чисел $(a; b)$ на координатной плоскости соответствует единственная точка M, для которой эти числа являются координатами: $x=a$, $y=b$. Таким образом, между точками координатной плоскости и упорядоченными парами действительных чисел $(x; y)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Множество пар действительных чисел иногда называют числовой плоскостью.

Координатные прямые делят плоскость на четыре координатные угла (квадранта), которые нумеруются так, как показано на рис. 16.

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ выражается через их координаты по формуле (рис. 17)

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения X. *Графиком* функции $f(x)$ называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, т. е. множество точек,

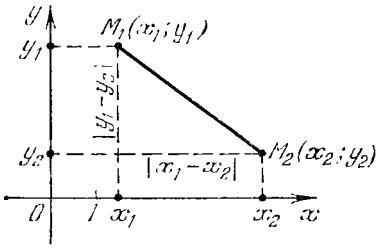


Рис. 17.

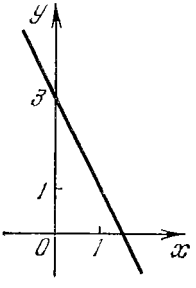


Рис. 18.

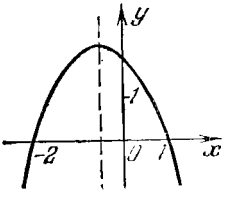


Рис. 19.

абсциссы которых принадлежат множеству X, а ординаты равны соответствующим значениям функции. На рис. 18 и 19 изображены графики линейной функции $y=3-2x$ и квадратичной функции $y=2-x-x^2$.

Изображение графика функции на координатной плоскости дает наглядное представление о свойствах и поведении функции. Простейшим способом построения графика функции $y=f(x)$ является способ построения по точкам. Составляется таблица значений аргумента и соответствующих значений функции:

x_1	x_2	x_3	...
y_1	y_2	y_3	...

— и на координатной плоскости наносятся точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и т. д. Эти точки соединяются плавной кривой, которая с некоторым приближением изображает график функции $y=f(x)$. Приближение это, однако, может оказаться достаточно грубым. В связи с этим для построения графика функции, как правило, применяют другие методы. О них будет рассказано в главе VI.

§ 4. Обратная функция

Пусть функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, такова, что двум разным значениям аргумента x_1 и x_2 ставит в соответствие разные значения y_1 и y_2. Например, таким свойством обла-

дает функция $y=2x-1$, график которой изображен на рис. 20. Действительно, для нее, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1=f(x_1) \neq f(x_2)=y_2$, так как $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)$. Этот факт имеет следующую геометрическую интерпретацию: каждая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку y_0, принадлежащую множеству значений функции, пересекает график функции лишь один раз. Напротив, функция $y=x^2$ не обладает указанным свойством. Например, значение функции $y=1$ соответствует двум значениям аргумента $x_1=-1$ и $x_2=1$ (прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $y=1$, пересекает график этой функции в двух точках (рис. 21)).

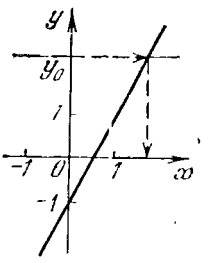


Рис. 20.

Функция $y=f(x)$ с областью определения X, которая двум разным значениям аргумента сопоставляет различные числа, устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения X и своим множеством значений Y. Действительно, каждой точке x из X функция ставит в соответствие некоторое y из множества Y, двум разным значениям x_1 и x_2 сопоставляются разные значения $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ и каждая точка $y \in Y$ соответствует одному из значений аргумента x. При этом каждой точке y множества Y соответствует единственное число x такое, что $y=f(x)$, т. е. это соответствие однозначное. Таким образом, на множестве Y определена функция, которая называется *обратной* функции f и обозначается f^{-1}. Областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f. Функция, которая имеет обратную, называется *обратимой*.

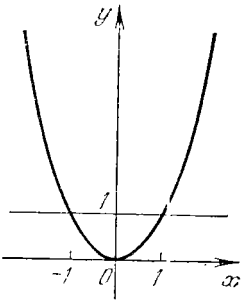


Рис. 21.

Например, функция $y=2x-1$ обратима. Множество ее значений есть вся числовая прямая. Любому числу y соответствует значение $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ (это соответствие для точки y_0 на рис. 20 указано стрелкой). Формула $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ определяет функцию $x=f^{-1}(y)$, обратную функции $y=f(x)$.

График функции $y=f(x)=2x-1$ является и графиком обратной функции $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$, только график обратной функции расположен непривычно: ось аргумента (ось Oy) расположена вертикально. Если, как обычно, обозначить аргумент обратной функции через x, т. е. представить ее в виде $y=f^{-1}(x)$, то график обратной функции будет, вообще говоря, отличаться от графика функции $y=f(x)$. На рис. 22 изображены график функции

$y=f(x)=2x-1$ и график ее обратной функции $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Они симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Как правило, если функция f обратима, то ее аргумент и аргумент обратной функции обозначаются одной буквой, т. е. эти функции рассматриваются в виде $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$.

Пусть функция $y=f(x)$ обратима. Покажем, что графики функции $y=f(x)$ и ее обратной функции $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. симметричны относительно прямой $y=x$.

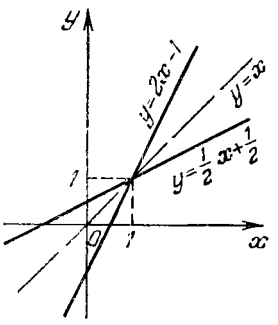


Рис. 22.

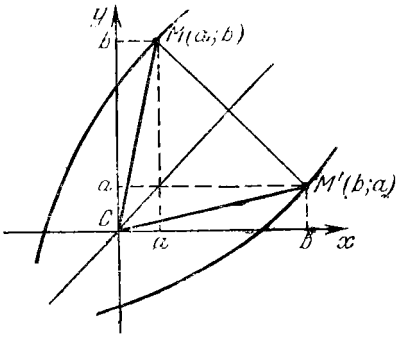


Рис. 23.

□ Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то $b=f(a)$ (рис. 23). Так как существует обратная функция, то из этого равенства следует, что $a=f^{-1}(b)$ и, значит, точка $M'(b; a)$ принадлежит графику обратной функции $y=f^{-1}(x)$. Верно и обратное: если точка $M'(b; a)$ принадлежит графику обратной функции $y=f^{-1}(x)$, то $a=f^{-1}(b)$. Следовательно, $b=f(a)$ и точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$.

Установим, что точки $M(a; b)$ и $M'(b; a)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Пусть $a\neq b$, т. е. точки M и M' не совпадают. Легко видеть, что эти точки равноудалены от начала координат, значит, прямая, проходящая через начало координат и середину отрезка MM', перпендикулярна этому отрезку, а точки M и M' симметричны относительно этой прямой. Поскольку середина отрезка MM' имеет координаты $((a+b)/2; (a+b)/2)$, то уравнение прямой есть $y=x$. ■

Подчеркнем, что функция обратима тогда и только тогда, когда эта функция двум разным значениям аргумента ставит в соответствие разные значения. Функция $f(x)=x^2$, $X=\mathbb{R}$, не обладает этим свойством, она не имеет обратной функции.

Рассмотрим функцию, заданную той же формулой $f(x)=x^2$ с областью определения $X=[0; +\infty[$. Если x_1 и x_2 принадлежат области определения и $x_1\neq x_2$, то $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$.

Здесь $x_1 \neq x_2$ и $x_1 + x_2 > 0$, поэтому $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$, $X = [0; +\infty[$, имеет обратную функцию. Для ее нахождения разрешим уравнение $y = x^2$ относительно x, учитывая, что $x \geqslant 0$. Получим $x = \sqrt{y}$. Поменяем в этой формуле x и y местами: $y = \sqrt{x}$. Итак, для функции $f(x) = x^2$, $X = [0; +\infty[$, обратная функция имеет вид $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ее область определения — промежуток $[0; +\infty[$. Графики этих функций изображены на рис. 24.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Она определена на всей числовой прямой, множество ее значений также вся числовая прямая

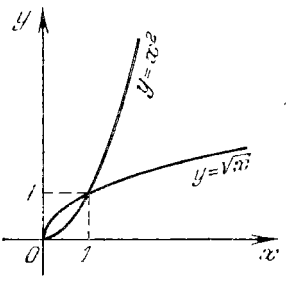


Рис. 24.

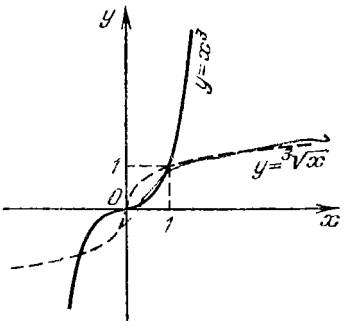


Рис. 25.

рис. 25). Покажем, что эта функция имеет обратную. Пусть $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right).$$

Первая скобка отлична от нуля, так как $x_1 \neq x_2$, вторая также отлична от нуля, так как содержит сумму квадратов двух слагаемых, которые в силу условия $x_1 \neq x_2$ не могут обратиться в нуль одновременно. Таким образом, разным значениям аргумента из множества $]-\infty, +\infty[$ соответствуют разные значения функции. Значит, существует обратная функция. Она обозначается $y = \sqrt[3]{x}$. Ее область определения — вся числовая прямая. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображен на рис. 25 штрихами.

В заключение заметим: из определения обратной функции следует, что всегда существует обратная функция к обратной и при этом $(f^{-1})^{-1} = f$. В силу этого функцию f и ее обратную f^{-1} (если она существует) называют взаимно обратными функциями.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Пусть A — множество делителей числа 15, B — множество простых чисел, меньших 10, C — множество четных чисел, меньших 9. Перечислить элементы этих множеств и найти $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $(A \cup C) \cap B$, $A \cap B \cap C$.

2. Пусть $A=[-1;\ 1[$, $B=]-\infty;0[$, $C=[0;\ 2[$. Найти следующие множества: $A\cup C$, $A\cap B$, $A\cup B\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $B\cap C$ — и изобразить их на координатной прямой.

3. Найти подмножества X и Y множества E, если для любого подмножества A множества E имеет место равенство $A\cap X=A\cup Y$.

Изобразить на координатной плоскости множество, координаты $(x;\ y)$ точек которого удовлетворяют условию (4—6):

4. $|x|+|y|=1$. **5.** $|x+y|\leqslant 1$ и $|x-y|\leqslant 1$.

6. $x^2-2x+y\leqslant 0$.

7. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

8. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты проверки решений представлены в таблице:

решены задачи	количество решивших
по алгебре	20
по геометрии	18
по тригонометрии	18
по алгебре и геометрии	7
по алгебре и тригонометрии	8
по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько учащихся решили ровно две задачи?

9. Пусть A — множество решений уравнения $f(x)=0$, B — множество решений уравнения $g(x)=0$. Доказать, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ множество $A\cup B$ является множеством корней уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$, а $A\cap B$ — множеством корней уравнения $(f(x))^2+(g(x))^2=0$.

Верно ли это же утверждение, если $f(x)$ — многочлен, а $g(x)$ — рациональная функция?

Найти область определения функций (10—16):

10. $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}$. **11.** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{1-|x|}}$.

12. $f(x)=\sqrt{2^x-3^x}$. **13.** $f(x)=\log_{3+x}(x^2-1)$.

14. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}$. **15.** $f(x)=\dfrac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$.

16. $f(x)=\lg\left[(1{,}25)^{1-x^2}-(0{,}4096)^{1+x}\right]$.

Найти множество значений функций (17—18):

17. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$. **18.** $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Найти обратную функцию $y=f^{-1}(x)$ для функции $y=f(x)$ (19—21):

19. $y=x^2+1$, $x\in\,]-\infty;\ 0]$. **20.** $y=1+\frac{1}{x}$. **21.** $y=\frac{x^2+3x}{x^2-5x}$.

22. Найти при каких значениях параметров a и b линейная функция $y=ax+b$ имеет обратную и совпадает с ней.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

Записать множества A, B и C перечислением их элементов и найти $A\cup B$, $B\cap C$, $(A\cup B)\cap C$, $A\cap B\cap C$, если (1—2):

1. A — множество делителей числа 12; B — множество корней уравнения $x^2-6x+5=0$; C — множество нечетных чисел x таких, что $3\leqslant x\leqslant 12$

2. A — множество четных чисел x, $3<x<10$; B — множество делителей числа 21; C — множество простых чисел, меньших 12.

3. Привести примеры числовых множеств A и B таких, что

а) $A\cup B=\mathbb{R}$, $A\cap B=\emptyset$; б) $A\cup B=A$, $A\cap B=B$.

Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cup C$, $A\cap B\cap C$, $(A\cup B)\cap C$ и изобразить эти множества на координатной прямой, если (4—6):

4. $A=[0;\ 3]$, $B=]1;\ 5[$, $C=]-2;\ 0]$.

5. $A=[-\infty]\ 1]$, $B=[1;\ +\infty[$, $C=]0;\ 1[$.

6. $A=[-3;\ 1]$, $B=[2,\ +\infty[$, $C=]-\infty;\ -2[$.

Множества A и B — подмножества основного множества $\mathbb{R}$. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cup\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$, $\overline{A\cup B}$ и изобразить эти множества на координатной прямой (7—10):

7. $A=]-1;\ 0[$, $B=[0;\ 2[$.

8. $A=[0;\ 3[$, $B=]-1;\ +\infty[$.

9. $A=]-\infty;\ 1]$, $B=]-\infty;\ -3[$.

10. $A=]0;\ +\infty[$, $B=[-1;\ 1[$.

11. Множества A и B являются подмножествами множества E (рис. 26). Указать штриховкой множества:

а) $A\cup\bar{B}$, $\overline{A\cup B}$; б) $\bar{A}\cup\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$;

в) $A\cap B$, $\overline{A\cup\bar{B}}$; г) $\overline{A\cap B}$, $(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$.

12. A — подмножество множества натуральных чисел, каждый элемент множества A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов в множестве A, если среди них имеется: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; и 20 чисел, кратных 30.

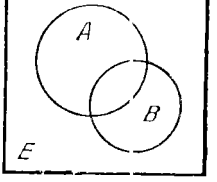


Рис. 26.

13. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт и коробку конфет?

14. В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70% — в волейбол и 75% — в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

15. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли A, B и C видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли A и B, A и C, B и C?

16. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B — 16, фильм C — 19. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

17. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

18. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B и C. Результаты опроса оказались таковы: книгу A читало 25 учащихся, книгу B — 22, книгу C — также 22. Книгу A или B читали 33 ученика, A или C — 32, B или C — 31; все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трех книг?

19. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике — 48 абитуриентов, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или русскому языку — 76, по физике или русскому языку — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

20. Найти пересечение числовых множеств A и B, если каждый элемент множества A имеет вид $4n+2$, $n \in \mathbb{N}$, а каждый элемент множества B имеет вид $3n$, $n \in \mathbb{N}$.

Изобразить на координатной плоскости множество, координаты $(x; y)$ точек которого удовлетворяют условию (21—28):

21. $|x+y| = x+y$. **22.** $y - x^2 \geqslant 0$.

23. $|y| - |x| \geqslant 0$. **24.** $x^2+y^2-4y \leqslant 0$.

25. $x^2+y^2 \leqslant 2|x|+2|y|$. **26.** $|x-y| = |x-y+1|$.

27. $\log_{1/2}(2-x^2-y^2) < 0$. **28.** $(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 \leqslant 4$.

Найти область определения функций (29—38):

29. $f(x) = \sqrt{3-5x-2x^2}$.

30. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. **31.** $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\log \cos x}}$.

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$. **33.** $f(x) = \sqrt{\lg \dfrac{3x-x^2}{x-1}}$.

34. $f(x) = \log_3 \log_{1/2} x$. **35.** $f(x) = \sqrt{x^2-|x|-2}$.

36. $f(x) = \log_{x+1}(x^2-3x+2)$. **37.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$.

38. $f(x) = \sqrt[4]{\log^3_{0,2} x + (\log_{0,2} x^3)(\log_{0,2} 0{,}0016x) + 36}$.

Найти множество значений функций (39—44):

39. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. **40.** $f(x)=\sqrt{2x-x^2-1}$.

41. $f(x)=\sin x-5\cos x$. **42.** $f(x)=\log_3 x+\log_x 3$.

43. $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$. **44.** $f(x)=4^x-2^x+1$.

45. Доказать, что четная функция не имеет обратной.

Найти обратную функцию $y=f^{-1}(x)$ для функции $y=f(x)$ (46—50):

46. $y=x^2-1$, $X=]-\infty;\ 0]$. **47.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

48. $y=\sqrt[4]{x}$. **49.** $y=\dfrac{1}{1+x^3}$. **50.** $y=x\,|x|+2x$.

Для каждой из следующих функций установить, существует ли обратная функция, и если существует, то найти ее (51—54):

51. $y=2+x-x^2$, $X=[1/2,\ +\infty[$. **52.** $y=x^3-x$.

53. $y=x^2-2x-3$, $X=[0;\ 3]$. **54.** $y=x\,|x|-2x-8$.

55. Доказать, что при всех значениях параметров a и b таких, что $ab\neq -4$, функция $y=\dfrac{2x+a}{bx-2}$ совпадает со своей обратной.

56. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c и d $(c\neq 0)$, чтобы функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ совпадала со своей обратной?

57. При каких значениях α функция $y=x^\alpha$ совпадает со своей обратной функцией?

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ. ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ И ВЗАИМНО ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ТЕОРЕМЫ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§ 1. Высказывания. Операции над высказываниями

Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*. Примерами высказываний могут служить следующие утверждения:

1. Москва — столица XXII летних Олимпийских игр.
2. Анатолий Карпов — двенадцатый чемпион мира по шахматам.
3. Число 221 — простое.
4. $13 < 17$.

Утверждения 1, 2 и 4, как известно, истинны. Утверждение 3 — ложно, так как $221 = 13 \cdot 17$.

Таким образом, каждое высказывание или истинно, или ложно; одновременно быть истинным и ложным высказывание не может.

Высказывания могут быть образованы с помощью слов или символов, однако далеко не каждый набор слов или символов (даже осмысленный) является высказыванием.

Например, утверждения:

1. В Московский государственный университет поступить легко.
2. $x > 0$.

высказываниями не являются, так как судить об их истинности или ложности невозможно.

Для обозначения высказываний обычно используют заглавные буквы латинского алфавита A, B, C и т. д. Например, пишут

$$A \equiv \{6 < 7\}, \quad B \equiv \{\text{число 6 простое}\}.$$

Это означает, что высказывание B заключается в утверждении, что число 6 простое, а высказывание A в том, что $6 < 7$. Знак «$\equiv$» заменяет слова «есть высказывание».

Высказывания A и B являются примерами простых высказываний. Из простых высказываний при помощи так называемых логических связок (союзов «и», «или», слов «если..., то...», «тогда и только тогда, когда...») можно образовывать новые высказывания. Например, из высказываний

$$A \equiv \{6 < 7\} \quad \text{и} \quad B \equiv \{\text{число 6 простое}\},$$

используя логические связки, можно образовать следующие сложные высказывания:

$C \equiv \{6 < 7$ *или* число 6 простое$\}$,
$D \equiv \{6 < 7$ *и* число 6 простое$\}$,
$E \equiv \{6 < 7$ *тогда и только тогда, когда* число 6 простое$\}$,
$F \equiv \{$*если* $6 < 7$, *то* число 6 простое$\}$.

Отметим, что новые высказывания можно образовывать и из таких высказываний, которые никак не связаны между собой по смыслу. Например, высказывание
$G \equiv \{$если слон насекомое, то Антарктида покрыта тропическими лесами$\}$
составлено при помощи логической связки «если..., то...» из двух высказываний, между которыми нет никакой смысловой связи.

В математической логике истинность или ложность сложных высказываний, образованных при помощи логических связок, устанавливается независимо от смысла простых высказываний, составляющих сложное. Истинность или ложность сложного высказывания полностью определяется, во-первых, тем, какие логические связки использованы для образования сложного высказывания, и, во-вторых, тем, какие из простых высказываний, образующих сложное, истинны и какие ложны. Для этого в логике вводятся операции над высказываниями, соответствующие связкам, при помощи которых образуются сложные высказывания. Тем самым, союзам «и», «или», словам «тогда и только тогда, когда...», «если..., то...» придается точный однозначный смысл.

Если высказывание образовано из двух высказываний при помощи союза «или», то говорят, что оно является *суммой* (*дизъюнкцией*) этих высказываний.

Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи союза «и», называют *произведением* (*конъюнкцией*) этих высказываний.

Высказывания, образованные из двух высказываний при помощи слов «тогда и только тогда, когда...», «если..., то...», называют соответственно *эквивалентностью* и *импликацией*.

Из простых высказываний

$$A \equiv \{6 < 7\} \text{ и } B \equiv \{\text{число 6 простое}\}$$

при помощи логических связок выше были составлены высказывания C, D, E и F. Теперь можно сказать, что эти высказывания являются соответственно суммой, произведением, эквивалентностью и импликацией высказываний A и B.

Сумму любых высказываний A и B записывают в виде $A + B$ (или $A \vee B$), произведение в виде AB (или $A \wedge B$). Для эквивалентности используют знак $\Leftrightarrow$ (или $\sim$), т. е. пишут $A \Leftrightarrow B$ (или $A \sim B$). Импликацию записывают в виде $A \Rightarrow B$ (читается: «из A следует B» или «если A, то B»).

Для любых двух высказываний истинность или ложность их суммы, произведения, эквивалентности и импликации определяется следующим образом:

сумма $A+B$ высказываний является истинным высказыванием только тогда, когда по крайней мере одно из слагаемых истинно;

произведение AB высказываний истинно только в том случае, если оба сомножителя истинны;

эквивалентность $A \Leftrightarrow B$ представляет собой ложное высказывание, если одно из высказываний истинно, а другое ложно; в противном случае, т. е. если оба высказывания истинны или оба ложны, эквивалентность является истинным высказыванием;

импликация $A \Rightarrow B$ есть ложное высказывание только в том случае, если A — истинно, а B — ложно; во всех других случаях, а именно, если

1) A — истинно, B — истинно,
2) A — ложно, B — истинно,
3) A — ложно, B — ложно,

высказывание $A \Rightarrow B$ считается истинным.

Пример 1. Даны два высказывания

$$A \equiv \{2=3\} \text{ и } B \equiv \{2<3\}.$$

В чем заключаются высказывания $A+B$, AB, $A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B$? Какие из этих высказываний истинны и какие ложны?

△ Высказывание

$$A+B \equiv \{2=3 \text{ или } 2<3\}$$

истинно, так как одно из слагаемых является истинным высказыванием. Высказывание $A+B$ можно записать в виде одного верного нестрогого неравенства: $2 \leqslant 3$. Высказывание

$$AB \equiv \{2=3 \text{ и } 2<3\},$$

очевидно, ложно. Для того чтобы произведение двух высказываний было истинным, нужно чтобы оба высказывания были истинными.

Эквивалентность

$$A \Leftrightarrow B \equiv \{2=3 \text{ тогда и только тогда, когда } 2<3\}$$

представляет собой ложное высказывание, так как A — ложно, а B — истинно.

Импликация

$$A \Rightarrow B \equiv \{\text{если } 2=3, \text{ то } 2<3\}$$

является истинным высказыванием. В самом деле, импликация $A \Rightarrow B$ согласно определению ложна только тогда, когда A — истинно, а B — ложно. ▲

Итак, истинность или ложность высказывания, образованного из каких-либо высказываний с помощью операций сложения,

умножения, эквивалентности и импликации, зависит только от распределения истинности и ложности между высказываниями, над которыми производятся логические операции. Эту зависимость удобно описывать следующими четырьмя таблицами, которые называют *таблицами истинности логических операций* (буква И означает, что соответствующее высказывание истинно, буква Л — соответствующее высказывание ложно):

Таблица I

A	B	$A+B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Таблица II

A	B	AB
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Таблица III

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таблица IV

A	B	$A \Longrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Таблицы истинности логических операций дают возможность определить истинность или ложность *любых* высказываний, имеющих вид $A+B$, AB, $A \Longleftrightarrow B$, $A \Longrightarrow B$. В связи с этим таблицы называют также *таблицами истинности высказываний* $A+B$, AB, $A \Longleftrightarrow B$, $A \Longrightarrow B$.

Для дальнейшего изложения из всех рассмотренных логических операций особенно важной является импликация $A \Longrightarrow B$. Первый член импликации $A \Longrightarrow B$ высказывание A называется *посылкой* или *условием*, второй член B — *заключением*. Таблица истинности для импликации, в отличии от таблиц I — III, изменяется при перестановке столбцов для A и B. Отметим также, что импликация не полностью соответствует обычному пониманию слов «если ..., то ...» и «следует». Из третьей и четвертой строк таблицы IV вытекает, что если A ложно, то, каково бы ни было B, высказывание $A \Longrightarrow B$ считается истинным. Таким образом, из неверного утверждения следует все что угодно. Например, утверждения «*если* 6 простое число, *то* $7 < 6$» или «*если* $7 < 6$, *то* существуют ведьмы» являются истинными. Истинным является и рассмотренное ранее высказывание: «*если* слон — насекомое, *то* Антарктида покрыта тропическими лесами».

Помимо только что рассмотренных четырех логических операций в математике используется еще одна простая, но очень важная операция — операция отрицания. Эта операция соответствует логической связке «не». Каждому высказыванию A можно сопоставить утверждение, заключающееся в том, что высказывание A ложно. Такое утверждение либо истинно, либо ложно и, следовательно, само является высказыванием, причем истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно. Это новое высказывание обозначают через A и называют отрицанием A. Например, для высказывания

$$A \equiv \{\text{число 6 простое}\}$$

отрицание может быть построено так:

$$\bar{A} \equiv \{\text{число 6 не простое}\}$$

или

$$\bar{A} \equiv \{\text{неверно, что число 6 простое}\},$$

или

$$\bar{A} \equiv \{\text{число 6 составное}\}.$$

В данном случае исходное высказывание ложно, поэтому его отрицание истинно.

Таблица истинности для отрицания имеет вид:

Таблица V

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Рассмотрим высказывание

$$A \equiv \{\text{город Нью-Йорк — столица США}\}.$$

Отрицанием этого высказывания будет высказывание

$$\bar{A} \equiv \{\text{город Нью-Йорк не является столицей США}\}.$$

Поскольку высказывание A — ложно, высказывание $\bar{A}$ — истинно. Заметим, что было бы ошибкой считать отрицанием высказывания A высказывание

$$B \equiv \{\text{город Вашингтон — столица США}\}.$$

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких или даже всех пяти логических операций, причем каждая из операций может применяться несколько раз. В таких случаях истинность или ложность сложного высказывания в зави-

симости от истинности или ложности составляющих его высказываний можно установить, построив таблицу истинности сложного высказывания, последовательно используя таблицы истинности логических операций.

Составим, например, таблицу истинности для высказываний, имеющих вид $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Последовательно используя таблицы V и IV, получим таблицу:

A	B	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
И	И	Л	Л	И
И	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И

Третий и четвертый столбцы являются вспомогательными. Для высказываний вида $\bar{B} \Rightarrow A$ получена таким образом следующая таблица истинности:

A	B	$\bar{B} \Rightarrow A$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Сравним полученную таблицу с таблицей IV для импликации $A \Rightarrow B$. Таблицы совпадают, т. е. высказывания вида $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ имеют одинаковые таблицы истинности. Такие высказывания называются *равносильными*. Равносильные высказывания соединяют знаком равенства.

Для любых высказываний A и B можно, следовательно, записать

$$A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

Равносильность высказываний вида $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ означает, что каковы бы ни были высказывания A и B высказывания $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow A$ либо оба истинны, либо оба ложны. Из истинности или ложности одного из них следует соответственно истинность или ложность другого.

Важную роль в логике играют тождественно истинные и тождественно ложные высказывания. *Тождественно истинные* высказывания истинны всегда, независимо от того, истинны или ложны составляющие их высказывания. Примеры тождественно истинных высказываний: $A + \bar{A}$, $A \Leftrightarrow \bar{\bar{A}}$, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$. Тождественно истинные высказывания будем обозначать буквой I.

Тождественно ложные высказывания ложны всегда, т. е. независимо от истинности или ложности высказываний, которые их составляют. Такие высказывания будем обозначать буквой L. Примеры тождественно ложных высказываний:

$$A\bar{A}, \quad (BA)\,\bar{A}, \quad AL.$$

И в самой математике и в ее приложениях приходится исследовать различные виды высказываний на равносильность. В случае, если высказывания составлены из небольшого числа простых, равносильность или неравносильность можно установить, построив таблицы истинности сложных высказываний и сравнив их. Но следует иметь в виду, что таблица истинности высказывания, образованного из n простых высказываний, содержит 2^n строк. Поэтому обычно равносильность устанавливается другим способом: некоторое количество основных равносильностей (законов алгебры высказываний) проверяется на основании таблиц истинности, полученные равенства используются при доказательстве других равенств точно так, как в элементарной алгебре в тождественных преобразованиях используются алгебраические законы:

$$a + b = b + a \quad (\textit{переместительный}),$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\textit{сочетательный}),$$
$$a\,(b + c) = ab + ac \quad (\textit{распределительный}),$$

и другие.

Легко проверяются следующие равносильности:

1. $A + B = B + A$. 2. $AB = BA$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$. 4. $A\,(BC) = (AB)\,C$.
5. $A\,(B + C) = AB + AC$.
6. $(A + B)\,(A + C) = A + BC$.
7. $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$. 8. $\bar{A}\bar{B} = \bar{A} + \bar{B}$.
9. $\bar{\bar{A}} = A$, $A + A = A$, $AA = A$.
10. $A + \bar{A} = I$, $A\bar{A} = L$,
    $A + I = I$, $AI = A$,
    $A + L = A$, $AL = L$.

Выписанные выше первые пять законов аналогичны законам обычной алгебры чисел. Остальные не имеют аналогий в элементарной алгебре.

Используя законы сложения и умножения высказываний, решим следующую задачу.

Пример 2. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд

Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

△ Рассмотрим высказывания:

$$A \equiv \{\text{машина синего цвета}\},$$
$$B \equiv \{\text{машина марки «Бьюик»}\},$$
$$C \equiv \{\text{машина черного цвета}\},$$
$$D \equiv \{\text{машина марки «Крайслер»}\},$$
$$E \equiv \{\text{машина марки «Форд Мустанг»}\}.$$

Так как либо цвет машины, либо марка каждым из соучастников преступления названы верно, то из показаний Брауна следует, что высказывание $A + B$ истинно. Из слов Джонса вытекает истинность высказывания $C + D$. Утверждение Смита означает, что истинно высказывание $\bar{A} + E$.

Так как высказывания $A + B$, $C + D$, $\bar{A} + E$ истинны, то истинно и их произведение

$$P = (A + B)(C + D)(\bar{A} + E).$$

Раскрывая скобки, получим

$$P = (AC + AD + BC + BD)(\bar{A} + E) =$$
$$= AC\bar{A} + ACE + AD\bar{A} + ADE + BC\bar{A} + BCE + BD\bar{A} + BDE.$$

Из условия задачи легко усматривается, что из полученных восьми слагаемых семь (все кроме пятого) являются ложными высказываниями. Поэтому

$$P = L + L + L + L + BC\bar{A} + L + L + L = BC\bar{A} + L = BC\bar{A},$$

т. е. высказывание $BC\bar{A}$ истинно, а это означает, что преступники скрылись на черном «Бьюике». ▲

§ 2. Предложения, зависящие от переменной

При изучении математики постоянно приходится иметь дело с различными предложениями (утверждениями), зависящими от одной или нескольких переменных. Например, предложение «число 5 является делителем числа n» зависит от переменной n, принимающей натуральные значения. При каждом $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$, оно истинно, при каждом $n \neq 5k$, $k \in \mathbb{N}$, — ложно. Уравнения и неравенства также являются такого рода предложениями. Например, неравенство $x - 2 > 0$ можно рассматривать как предложение, зависящее от переменной x. Истинность или ложность этого предложения зависит от того, какое именно значение переменной x берется. Если, например, $x = 3$, то предложение истинно, если $x = 0$, то ложно. Уравнение $x + y = 1$ является предложе-

нием, зависящим от двух действительных переменных x и y. При $x = y = 1/2$ предложение $x + y = 1$ истинно, при $x = y = 0$ оно, очевидно, ложно.

Предложения, зависящие от переменной, встречаются не только в математике. Например, предложение «хоккеист команды „Спартак" высшей лиги забил 400 шайб» определено на множестве всех хоккеистов команды «Спартак». Как известно, это предложение истинно для Старшинова и ложно для каждого из остальных членов команды.

Предложения, зависящие от переменных, обозначают через $A(x)$, $B(x)$, $C(x; y)$ и т. д. Для каждого предложения должно быть тем или иным способом указано, на каком множестве оно рассматривается или, как еще говорят, на каком множестве оно определено или задано. Предложение $A(x)$, $x \in M$, не является, вообще говоря, высказыванием, и поэтому не имеет смысла ставить вопрос о том, истинно оно или ложно. Ответа на такой вопрос не существует (за исключением того случая, когда множество M состоит из одного элемента). Но как только некоторый элемент $x_0 \in M$ выбран или, как говорят, фиксирован, предполагается, что $A(x_0)$ будет либо истинным, либо ложным, т. е. будет высказыванием. Множество M, на котором задано предложение $A(x)$, можно разбить на два подмножества. Одно подмножество содержит те и только те элементы M, для которых $A(x)$ истинно. Это подмножество называют множеством истинности предложения $A(x)$. Другое подмножество содержит те и только те элементы M, для которых $A(x)$ ложно. Если первое из этих подмножеств обозначить буквой A, то второе следует обозначить через $\bar{A}$, так как оно является дополнением множества A до множества M.

Например, для предложения

$$A(x) \equiv \{x^2 - 5x + 6 < 0\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

множеством истинности A является интервал $]2; 3[$, множеством $\bar{A}$ — объединение промежутков $]-\infty; 2]$ и $[3; +\infty[$.

Два предложения $A(x)$ и $B(x)$, заданные на одном и том же множестве, называются *равносильными*, если их множества истинности совпадают.

Например, предложения

$$A(x) \equiv \{x^2 - 5x + 6 < 0\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

и

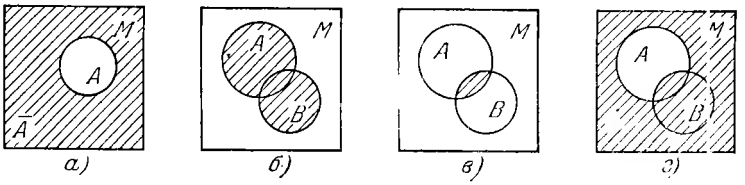
$$B(x) \equiv \{x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

равносильны, так как множеством истинности каждого из них является интервал $]2; 3[$.

На предложения, зависящие от переменных, естественным образом распространяются все логические операции, введенные в § 1.

Отрицанием предложения $A(x)$, $x \in M$, называется предложение $\overline{A(x)}$, определенное на том же множестве M и обращающееся в истинное высказывание *для тех и только тех* элементов множества M, для которых $A(x)$ — ложное высказывание.

Из определения следует, что если A — множество истинности предложения $A(x)$, то множеством истинности отрицания $\overline{A(x)}$ является дополнение $\bar{A}$ множества A до множества M. На рис. 27, *а* схематически изображены множества M, A и $\bar{A}$. Множество истинности отрицания $\overline{A(x)}$ заштриховано.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 27.

Рассмотрим операции сложения, умножения и импликации для предложений, заданных на одном и том же множестве M.

Сумма $A(x)+B(x)$ обращается в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых по крайней мере одно из слагаемых обращается в истинное высказывание. На рис. 27, *б* два круга схематически изображают множества истинности A и B соответственно для $A(x)$ и $B(x)$. Множеством истинности суммы $A(x)+B(x)$ будет, очевидно, объединение $A \cup B$ множеств A и B. На рисунке оно заштриховано.

Произведение $A(x)\,B(x)$ обращается в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых оба сомножителя обращаются в истинные высказывания. Множеством истинности произведения $A(x)\,B(x)$ является пересечение $A \cap B$ множеств A и B. На рис. 27, *в* оно заштриховано.

Импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$ обращается в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых посылка $A(x)$ истинна, а заключение $B(x)$ — ложно. На рис. 27, *г* штриховкой показано множество истинности импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Пример 1. Пусть

$$A(x) \equiv \{x-2>0\} \text{ и } B(x) \equiv \{x+2 \geqslant 0\}$$

— два предложения, зависящие от переменной x, $x \in \mathbb{R}$. В чем заключаются предложения

а) $A(x)+B(x)$, б) $A(x)\,B(x)$,
в) $A(x) \Rightarrow B(x)$, г) $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$,
д) $A(x)\,\overline{B(x)}$, е) $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$?

Каковы их множества истинности?

△ а) Предложение $A(x)+B(x)$ заключается в том, что верно по крайней мере одно из двух неравенств

$$x-2>0 \text{ и } x+2\geqslant 0.$$

Очевидно, что множеством истинности $A(x)+B(x)$ является промежуток $[-2;\ +\infty[$.

б) Произведение предложений $A(x)$ и $B(x)$ есть предложение, в котором утверждается, что оба неравенства $x-2>0$ и $x+2\geqslant 0$ справедливы, т. е. переменная x удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+2\geqslant 0. \end{cases}$$

Множество истинности — интервал $]2;\ +\infty[$.

в) Для импликации $A(x)\Rightarrow B(x)$ («если $x-2>0$, то $x+2\geqslant 0$») множество истинности состоит из всех действительных чисел.

г) Для импликации $B(x)\Rightarrow A(x)$ («если $x+2\geqslant 0$, то $x-2>0$») множеством истинности является объединение двух интервалов, а именно $]-\infty;\ -2[\cup]2;\ +\infty[$. Для каждого числа x, принадлежащего отрезку $[-2;\ 2]$, импликация $B(x)\Rightarrow A(x)$ обращается в ложное высказывание.

д) Для произведения $A(x)\,\overline{B(x)}$ множеством истинности будет множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+2<0, \end{cases}$$

т. е. пустое множество.

е) Для импликации $\overline{B(x)}\Rightarrow\overline{A(x)}$ («если $x+2<0$, то $x-2\leqslant 0$») множеством истинности является множество всех действительных чисел. ▲

С предложениями, зависящими от переменных, связаны два вида часто встречающихся утверждений.

1) Предложение $A(x)$, $x\in M$, обращается в истинное высказывание для *всех* элементов множества M.

2) Предложение $A(x)$, $x\in M$, обращается в истинное высказывание *хотя бы для одного* элемента множества M, другими словами, существует элемент $x_0\in M$, для которого $A(x_0)$ — истинное высказывание.

В математике принято записывать такие утверждения кратко, используя для этого специальные знаки: *знак общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова *All* — все) и *знак существования* $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует). Знак общности $\forall$ заменяет в словесных формулировках слова: все, всякий, каждый, любой. Знак существования $\exists$ употребляется вместо слов: хотя бы один, найдется, существует.

Используя знаки общности и существования, утверждения 1 и 2 можно записать следующим образом:

1) $(\forall x)\ A(x)$, 2) $(\exists x)\ A(x)$; $x \in M$.

Заметим, что первое утверждение равносильно утверждению: множеством истинности A предложения $A(x)$ является множество M, т. е. $A = M$. Второе утверждение равносильно следующему: множество истинности A предложения $A(x)$ не пусто, т. е. $A \neq \emptyset$.

Каждое из рассмотренных утверждений либо истинно, либо ложно и, следовательно, является высказыванием.

Например, для предложения

$$A(x) \equiv \{x^2 > 0\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

с помощью знаков общности и существования можно построить два утверждения:

1) $(\forall x)\ A(x) \equiv$ {для *всех* действительных чисел $x^2 > 0$}.
2) $(\exists x)\ A(x) \equiv$ {*существует* действительное число, для которого $x^2 > 0$}.

Каждое из этих утверждений является высказыванием. Первое высказывание, очевидно, ложно, второе истинно.

Для того чтобы убедиться в истинности высказывания $(\forall x)\ A(x)$, $x \in M$, необходимо проверить истинность предложения $A(x)$ для всех элементов множества M.

Если множество M содержит мало элементов, можно попытаться все их перебрать и для каждого убедиться в истинности утверждения $A(x)$. Если же M — бесконечное множество или, хотя и конечное, но содержит много элементов, доказать истинность высказывания можно лишь логическим рассуждением.

Очень важно понимать, что для того чтобы опровергнуть высказывание $(\forall x)\ A(x)$, достаточно указать только один элемент $x \in M$, для которого $A(x)$ ложно. Элемент x множества M, для которого предложение $A(x)$ неверно, называется *контрпримером* для высказывания $(\forall x)\ A(x)$.

Таким образом, чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x)\ A(x)$, достаточно найти (или, как еще говорят, построить) один контрпример. Рассмотрим предложение

$$A(n) \equiv \{\text{число } n^2 + n + 41 \text{ простое}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для высказывания

$$(\forall n)\ A(n) \equiv \{\text{при каждом натуральном } n \text{ число } n^2 + n + 41 \text{ простое}\}$$

элемент $n = 40$ является контрпримером. Действительно, число $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41$ делится на 41 и, следовательно, $A(40)$ — ложное высказывание.

Замечательно, что для всех $n < 40$ предложение $A(n)$ истинно.

§ 3. Взаимно обратные и взаимно противоположные теоремы. Необходимые и достаточные условия

Большинство теорем, встречающихся в школьном курсе математики, формулируются (или могут быть сформулированы) следующим образом: для любого элемента x множества M из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$. Используя обозначения, введенные в §§ 1, 2, каждую такую теорему можно записать в виде $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$, $x \in M$. Рассмотрим, например, следующие четыре теоремы.

Теорема 1. *Если сумма цифр натурального числа делится на* 3, *то и число делится на* 3.

Теорема 2. *Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали конгруэнтны.*

Теорема 3. *Если хотя бы одно из двух чисел делится на* 7, *то и их сумма делится на* 7.

Теорема 4. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.*

Каждая из этих теорем понимается как высказывание вида

$$(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x), \qquad x \in M,$$

и, следовательно, все четыре теоремы имеют одинаковое строение.

В теореме 1 речь идет о двух предложениях:

$$A(n) \equiv \{\text{сумма цифр числа } n \text{ делится на } 3\},$$
$$B(n) \equiv \{\text{число } n \text{ делится на } 3\},$$

зависящих от переменной $n \in \mathbb{N}$.

В теореме утверждается, что для каждого натурального числа верно утверждение: если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3, т. е. утверждается истинность высказывания

$$(\forall n)\ A(n) \Rightarrow B(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Из арифметики известно, что это высказывание истинно, т. е. теорема 1 верна.

В теореме 2 рассматривается множество Q всех четырехугольников q и на этом множестве два предложения

$$A(q) \equiv \{\text{четырехугольник } q \text{ — прямоугольник}\},$$
$$B(q) \equiv \{\text{диагонали четырехугольника } q \text{ конгруэнтны}\}.$$

Теорема утверждает, что для любого четырехугольника верно следующее: если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали конгруэнтны. Таким образом, теорема 2 понимается как высказывание

$$(\forall q)\ A(q) \Rightarrow B(q), \qquad q \in Q.$$

В геометрии доказывается, что эта теорема верна.

В теореме 3 говорится о двух предложениях

$$A(n;\ m) \equiv \{n \text{ или } m \text{ делится на } 7\},$$
$$B(n;\ m) \equiv \{n+m \text{ делится на } 7\},$$

заданных на множестве всех пар $(n;\ m)$ натуральных чисел.

В теореме утверждается истинность высказывания

$$(\forall n;\ m)\ A(n;\ m) \Rightarrow B(n;\ m), \qquad n,\ m \in \mathbb{N},$$

которое, очевидно, ложно, и, следовательно, теорема 3 неверна. Для нас важно сейчас то, что логическое строение этой теоремы точно такое же, как и у теорем 1 и 2.

Из-за краткости формулировки теоремы 4 о диагоналях ромба может даже показаться, что эта теорема не имеет формы $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. На самом деле это не так. Точная формулировка этой теоремы такова (напомним, что ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны):

Теорема 4. *Пусть P — множество всех параллелограммов и пусть*

$A(p) \equiv \{$*параллелограмм p — ромб*$\}$,
$B(p) \equiv \{$*диагонали параллелограмма p взаимно перпендикулярны*$\}$
— два предложения, заданные на множестве P.

Тогда

$$(\forall p)\ A(p) \Rightarrow B(p), \qquad p \in P,$$

т. е. для любого параллелограмма верно утверждение: если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

В формулировке каждой теоремы, имеющей вид

$$(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x), \qquad x \in M,$$

можно выделить условие теоремы (предложение $A(x)$) и заключение теоремы (предложение $B(x)$).

Теоремы, отличающиеся друг от друга условием или заключением, являются *различными* теоремами.

Рассмотрим еще один пример.

Теорема 5. *Пусть Q — множество всех четырехугольников и пусть*

$A(q) \equiv \{$*четырехугольник q* — ромб$\}$,
$B(q) \equiv \{$*диагонали четырехугольника q взаимно перпендикулярны*$\}$

два предложения, заданные на множестве Q.

Тогда

$$(\forall q)\ A(q) \Rightarrow B(q), \qquad q \in Q,$$

т. е. для любого четырехугольника верно утверждение: если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

Теорема 5 не тождественна теореме 4, — это две *различные* теоремы, так как предложения $A(q)$ и $B(q)$ заданы в одном

случае на множестве всех параллелограммов, в другом — на множестве всех четырехугольников.

Четкое и однозначное выделение в каждой теореме условия и заключения позволяет *однозначно* определить понятия *обратной* и *противоположной* теорем.

Теоремы

$$(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x), \qquad x \in M,$$

и

$$(\forall x)\ B(x) \Rightarrow A(x), \qquad x \in M,$$

называются *взаимно обратными*.

Иногда одну из этих теорем называют прямой, тогда другую называют обратной.

Ясно, что *любую* из двух взаимно обратных теорем можно принять за прямую.

Из данного определения видно, что, поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, мы получаем формулировку теоремы, обратной исходной.

Важно понимать, что для пары взаимно обратных теорем могут осуществляться все три возможности, а именно:

1) обе теоремы верны,

2) одна из теорем верна, другая неверна,

3) обе теоремы неверны.

Для того чтобы показать, что первый случай может иметь место, достаточно рассмотреть теорему 1 и обратную ей теорему (если число делится на 3, то сумма цифр числа делится на 3).

Теорема 4 о диагоналях ромба и теорема, ей обратная (для любого параллелограмма верно утверждение: если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм есть ромб) также верны.

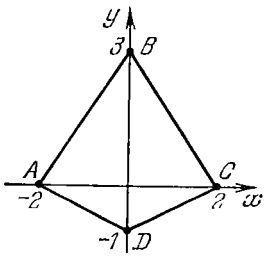


Рис. 28.

Для теоремы 2 обратная формулируется следующим образом: «если диагонали четырехугольника конгруэнтны, то четырехугольник является прямоугольником». Эта теорема неверна. В качестве контрпримера можно взять четырехугольник, изображенный на рис. 28; таким образом, из двух взаимно обратных теорем одна может быть верна, другая неверна.

Аналогично взаимно обратными являются теорема 5 и следующая теорема: «если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник есть ромб». Как известно, теорема 5 верна, а обратная ей — неверна. В качестве контрпримера можно опять взять четырехугольник, показанный на рис. 28.

Третий случай, когда обе теоремы — и прямая, и обратная — неверны, тоже может иметь место. Для теоремы 3 обратной является

теорема: «если сумма двух чисел делится на 7, то хотя бы одно из слагаемых делится на 7». Эта теорема, очевидно, неверна, так же как и обратная ей теорема 3. Обратим еще раз внимание на теоремы 4 и 5 о диагоналях ромба. Выше уже отмечалось, что эти теоремы суть различные теоремы; если бы мы не различали их, понятие обратной теоремы потеряло бы однозначный смысл: теорема имела бы две обратных, из которых одна была бы верна (обратная для теоремы 4), а другая нет (обратная для теоремы 5).

С понятием прямой и обратной теоремы тесно связано употребление слов «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» и им подобных.

Если теорема $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x)$ верна, то предложение $A(x)$ называется *достаточным условием* для $B(x)$, а предложение $B(x)$ — *необходимым условием* для $A(x)$.

Вернемся к теореме 2:

$$(\forall q)\, A(q) \Rightarrow B(q), \qquad q \in Q,$$

где

$$A(q) \equiv \{\text{четырехугольник } q \text{ — прямоугольник}\},$$
$$B(q) \equiv \{\text{диагонали четырехугольника } q \text{ конгруэнтны}\cdot$$

и Q — множество всех четырехугольников. Эта теорема верна, и, следовательно, $A(q)$ является *достаточным* условием для $B(q)$, т. е. для того чтобы диагонали четырехугольника были конгруэнтны, *достаточно*, чтобы четырехугольник был прямоугольником.

Предложение $B(q)$ является *необходимым* условием для $A(q)$, т. е. для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, *необходимо*, чтобы диагонали четырехугольника были конгруэнтны.

Если справедлива не только теорема

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x), \qquad x \in M,$$

но и ей обратная

$$(\forall x)\, B(x) \Rightarrow A(x), \qquad x \in M,$$

то $A(x)$ является необходимым и достаточным условием для $B(x)$, а $B(x)$ — необходимым и достаточным условием для $A(x)$.

Например, в начале параграфа проводилась теорема 1: «если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и число делится на 3». Эта теорема верна. Справедлива и обратная теорема. Поэтому можно сказать, что для делимости числа на 3 *необходимо* и *достаточно*, чтобы сумма цифр числа делилась на 3.

Следует помнить, что в тех случаях, когда в теореме содержатся слова «необходимо и достаточно», доказательство обязательно должно состоять из доказательства необходимости и из доказательства достаточности. Ведь в такой формулировке на самом деле объединены формулировки двух теорем: прямой и обратной. Каждая нуждается в доказательстве, так как из

справедливости одной ни в коем случае не следует справедливость другой.

Отметим еще, что вместо слов «*необходимо и достаточно*» иногда употребляют слова «*тогда и только тогда*», «*в том и только в том случае*» и т. п.

Например, теорема 1 и ей обратная, могут формулироваться так: «Натуральное число n делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа n делится на 3». Слово «условие» часто заменяют словом «признак», и говорят о *необходимом признаке*, или о *достаточном признаке*, или, наконец, о *необходимом* и *достаточном признаке*.

Перейдем к понятию противоположной теоремы.

Теоремы

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x), \qquad x \in M,$$

и

$$(\forall x)\, \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}, \qquad x \in M,$$

называются *взаимно противоположными*.

Если, следовательно, в формулировке некоторой теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями, то получится формулировка теоремы, противоположной исходной.

Всякая теорема

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x)$$

порождает, таким образом, еще три теоремы:

обратную $(\forall x)\, B(x) \Rightarrow A(x)$,

противоположную $(\forall x)\, \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$,

противоположную обратной $(\forall x)\, \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$.

Например, взяв в качестве исходной рассмотренную выше теорему 5, будем иметь (для произвольного четырехугольника):

1) *исходная теорема*: если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны (теорема верна);

2) *обратная теорема*: если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то четырехугольник есть ромб (теорема неверна);

3) *противоположная теорема*: если четырехугольник не ромб, то его диагонали не перпендикулярны (теорема неверна);

4) *противоположная обратной*: если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом (теорема верна).

В рассмотренном примере прямая теорема и противоположная обратной оказались истинными, а обратная и противоположная — ложными. Это совпадение не является случайным. Прямая теорема и теорема противоположная обратной либо обе истинны, либо обе ложны, т. е. имеет место равносильность

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x) = (\forall x)\, \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}, \qquad x \in M.$$

Часто доказательство одной из этих теорем вызывает трудности, в таком случае следует попытаться доказать другую.

Известный метод доказательства от противного как раз и состоит в том, что вместо исходной теоремы доказывают противоположную обратной.

§ 4. Метод математической индукции

Во многих разделах арифметики, алгебры, геометрии, анализа приходится доказывать истинность предложений $A(n)$, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной. Доказательство истинности предложения $A(n)$ для всех значений переменной часто удается провести методом математической индукции, который основан на следующем принципе.

Предложение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

1. Предложение $A(n)$ истинно для $n=1$.

2. Из предположения, что $A(n)$ истинно для $n=k$ (где k — *любое* натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n=k+1$.

Этот принцип называется принципом *математической индукции*. Обычно он выбирается в качестве одной из аксиом, определяющих натуральный ряд чисел, и, следовательно, принимается без доказательства.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения $A(n)$ для всех натуральных n, то, во-первых, следует проверить истинность высказывания $A(1)$ и, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, попытаться доказать, что высказывание $A(k+1)$ истинно. Если это удается доказать, причем доказательство остается справедливым для *каждого* натурального значения k, то в соответствии с принципом математической индукции предложение $A(n)$ признается истинным для всех значений n.

Метод математической индукции широко применяется при доказательстве теорем, тождеств, неравенств, при решении задач на делимость, при решении некоторых геометрических и многих других задач.

Пример 1. Доказать истинность предложения

$$A(n) \equiv \{\text{число } 5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1} \text{ кратно } 19\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

$\triangle$ 1. Высказывание $A(1) \equiv \{\text{число } 5\cdot 2+3^2 \text{ кратно } 19\}$ истинно.

2. Предположим, что для некоторого значения $n=k$

$$A(k) \equiv \{\text{число } 5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1} \text{ кратно } 19\}$$

истинно. Тогда, так как

$$5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}=8\cdot 5\cdot 2^{3k-2}+27\cdot 3^{3k-1}=$$
$$=8\,(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})+19\cdot 3^{3k-1},$$

очевидно, что и $A(k+1)$ истинно. Действительно, первое слагаемое делится на 19 в силу предположения, что $A(k)$ истинно; второе слагаемое тоже делится на 19, потому что содержит множитель 19. Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, предложение $A(n)$ истинно при всех значениях n. ▲

Пример 2. Доказать формулу

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n\in\mathbb{N}.$$

△ 1. При $n=1$ обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

2. Предположим, что формула верна при $n=k$, т. е.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$$
$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2(k^2+4k+4)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Таким образом, из того, что формула верна при $n=k$, следует, что она верна и при $n=k+1$. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k. Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана. ▲

Пример 3. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

△ 1. При $n=1$ неравенство справедливо, так как

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.$$

2. Предположим, что неравенство верно при $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1.$$

Прибавим к обеим частям неравенства сумму трех дробей

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

и перенесем первое слагаемое левой части, т. е. $\frac{1}{k+1}$ в правую часть неравенства. Тогда получим

$$\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+4}>1-\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

Правая часть этого неравенства больше единицы, так как

$$1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1.$$

Следовательно, левая часть тем более больше единицы, т. е.

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\ldots+\frac{1}{3(k+1)+1}>1.$$

Последнее неравенство из исходного неравенства получается при $n=k+1$.

Итак, предположив истинность неравенства при $n=k$, мы доказали его истинность при $n=k+1$. Таким образом, методом математической индукции неравенство доказано. ▲

Пример 4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа, причем $x_1x_2\ldots x_n=1$. Доказать, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n.$$

∧ 1. Если $n=1$, то по условию $x_1=1$ и, следовательно, можно написать $x_1\geqslant 1$, т. е. для $n=1$ утверждение верно.

2. Предположим, что утверждение верно для $n=k$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ — произвольные положительные числа и

$$x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}=1.$$

Могут представиться два случая: либо все эти числа равны 1, и тогда их сумма равна $k+1$ и неравенство доказано, либо среди этих чисел есть хотя бы одно число, не равное единице, и тогда обязательно есть, по крайней мере, еще одно число, не равное единице, причем если одно из них меньше единицы, то другое больше единицы. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_k>1$, а $x_{k+1}<1$. Рассмотрим теперь k чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, (x_kx_{k+1}).$$

Произведение их равно единице, и, следовательно, по индуктивному предположению

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\geqslant k.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства x_k+x_{k+1} перенесем x_kx_{k+1} направо и преобразуем правую часть неравенства:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}\geqslant k-x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}=$$
$$=k+1+x_k(1-x_{k+1})+x_{k+1}-1=k+1+x_k(1-x_{k+1})-(1-x_{k+1})=$$
$$=k+1+(1-x_{k+1})(x_k-1)\geqslant k+1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Утверждение доказано. Из приведенного доказательства следует, что знак равенства в доказываемом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$. ▲

Пример 5. Доказать неравенство

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа.

△ Это важное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел является простым следствием соотношения, доказанного в предыдущем примере. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа. Рассмотрим n чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}, \quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

Очевидно, что все эти числа положительны и произведение их равно единице. Следовательно, по доказанному в примере 4 их сумма больше или равна n, т. е.

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}} \geqslant n.$$

Отсюда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$. ▲

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел часто оказывается полезным при доказательстве других неравенств, при отыскании наименьших и наибольших значений функций (см. главу IV, § 6, 7).

Рассмотрим некоторые обобщения принципа математической индукции.

Пусть p — некоторое целое число.

Предложение $A(n)$, где n целое, истинно для всех целых значений $n \geqslant p$, если выполнены следующие два условия:

1. Предложение $A(n)$ истинно для $n=p$.

2. Из предположения, что $A(n)$ истинно для $n=k$ (k — целое, $k \geqslant p$), следует, что оно истинно для следующего значения $n=k+1$.

При $p=1$ получается первоначальная формулировка принципа математической индукции.

Пример 6. Доказать, что любую сумму денег, бо́льшую 7 копеек, можно разменять только трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

△ Пусть сумма равна n копейкам. Если $n=8$, то утверждение верно. Пусть утверждение верно для $n=k$. Могут представиться только два случая для размена суммы в k копеек:

а) потребовались только трехкопеечные монеты,

б) потребовалась хотя бы одна пятикопеечная монета.

В случае а) удаляем три трехкопеечные монеты, добавляем две пятикопеечные и тем самым разменяем сумму в $k+1$ копеек. В случае б) удаляем одну пятикопеечную монету, добавляем две трехкопеечные монеты и тем самым разменяем сумму в $k+1$ копеек. ▲

В некоторых задачах принцип математической индукции используется в следующей форме.

Предложение $A(n)$, где n — целое число, истинно для всех $n \geqslant p$ (p — некоторое целое число), если выполнены два условия:

1. Предположение $A(n)$ истинно для $n=p$ и $n=p+1$.

2. Из предположения, что $A(n)$ истинно для $n=k$ и $n=k-1$, следует, что оно истинно при $n=k+1$ (для любого $k>p$).

Проиллюстрируем применение этого принципа на следующем примере.

Пример 7. Доказать, что функция $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$ на отрезке $[-1; 1]$ совпадает с некоторым многочленом степени n (n — неотрицательное целое число).

1. При $n=0$ и $n=1$ получаем соответственно $T_0(x)=1$ и $T_1(x)=x$, т. е. утверждение верно и для $n=0$ и для $n=1$.

2. Рассмотрим $T_{k+1}(x)$ и проведем преобразования

$$T_{k+1}(x)=\cos((k+1)\arccos x)=$$
$$=\cos(k\arccos x)\cdot\cos(\arccos x)-\sin(k\arccos x)\cdot\sin(\arccos x)=$$
$$=T_k(x)\,T_1(x)-\frac{1}{2}(\cos((k-1)\arccos x)-\cos((k+1)\arccos x))=$$
$$=T_k(x)\,T_1(x)-\frac{1}{2}(T_{k-1}(x)-T_{k+1}(x)).$$

Мы получили следующее рекуррентное соотношение:

$$T_{k+1}(x)=2T_1(x)\,T_k(x)-T_{k-1}(x)$$

или

$$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x).$$

Сделаем индуктивное предположение: функции $T_{k-1}(x)$ и $T_k(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ совпадают с многочленами соответственно $k-1$-й степени и k-й степени. Тогда из полученной рекуррентной формулы следует, что $T_{k+1}(x)$ совпадает с многочленом степени $k+1$.

Согласно принципу математической индукции утверждение доказано для всех $n\geqslant 0$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображенной на рис. 29. Рассмотрим следующие четыре высказывания:

$A \equiv$ {элемент k цепи вышел из строя},

$B_i \equiv$ {элемент l_i цепи вышел из строя} $\quad (i=1, 2, 3)$.

Замкнута ли цепь, если

а) высказывание $A+B_1B_2B_3$ истинно,

б) высказывание $\bar{A}(\bar{B}_1+\bar{B}_2+\bar{B}_3)$ истинно?

2. Докажите формулу

$$A \Rightarrow B = \bar{A}+B.$$

3. На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй.

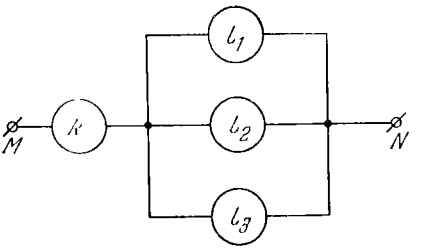


Рис. 29.

Кто из учащихся изучал логику?

4. «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

— Говорит Мегрэ. Есть новости?

— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила ...

— Все. Спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Рассмотрите следующие высказывания:

$A \equiv$ {Франсуа был пьян},

$B \equiv$ {Этьен убийца},

$C \equiv$ {Франсуа лжет},

$D \equiv$ {убийство произошло после полуночи}.

Запишите, используя логические операции, высказывания инспекторов Торранса, Жуссье и Люка. Составьте произведение этих трех высказываний и упростите его. Что следует из показаний испекторов? Какой вывод сделал комиссар Мегрэ?

5. Для доказательства равенства

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$$

ученик привел следующее рассуждение: «Возведя в куб обе части равенства, получим

$$14-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2=8$$

или

$$3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)=6;$$

но, так как

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2,$$

то

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=1,$$
$$\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}=1,$$
$$\sqrt[3]{1}=1, \quad 1=1,$$

что и требовалось доказать».

Доказал ли ученик равенство?

6. Ученику была предложена следующая задача:

«Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, один катет составляет с плоскостью α угол в 45°, другой — угол в 60°. Больший катет равен a. Найти гипотенузу».

Ученик сделал чертеж (рис. 30), из прямоугольного треугольника AOC нашел

$$|CO|=a\sin 45^\circ=a\sqrt{2}/2,$$

из прямоугольного треугольника BOC нашел

$$|BC|=\frac{|CO|}{\sin 60^\circ}=\frac{2|CO|}{\sqrt{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

и по теореме Пифагора определил гипотенузу

$$|AB|=\sqrt{|AC|^2+|BC|^2}=$$
$$=a\sqrt{1+\frac{2}{3}}=a\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

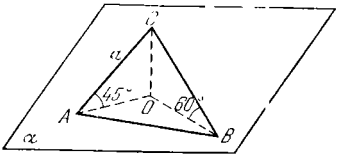


Рис. 30.

Верен ли полученный результат?

7. Дано неравенство $kx+l^2\leqslant 0$. При каких значениях k истинны следующие утверждения:

а) При *любом* l неравенство имеет *хотя бы одно* решение.

б) *Существует* l, при котором неравенство имеет *хотя бы одно* решение?

8. На множестве всех натуральных чисел заданы три предложения:

$A(n)\equiv$ {число $n+48$ является квадратом натурального числа},

$B(n)\equiv$ {число n оканчивается цифрой 4},

$C(n)\equiv$ {число $n-41$ есть квадрат натурального числа}.

При каких значениях n из данных трех предложений два истинны и одно ложно?

9. Для теоремы «если квадратное уравнение не имеет двух различных действительных корней, то дискриминант этого квадратного уравнения неположителен» сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы. Указать, какие из этих теорем верны.

10. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) Для делимости числа n^2-1 $(n\geqslant 5)$ на 24 достаточно, чтобы n было простым числом.

б) Для делимости числа n^2-1 $(n\geqslant 5)$ на 24 необходимо, чтобы n было простым числом.

11. Для каких натуральных значений n истинно предложение

$$A(n)\equiv\{2^n>4n^2+1\}?$$

12. На плоскости произвольным образом проведены n прямых. Доказать, что черной и белой красками можно так закрасить плоскость, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. По мишени произведено три выстрела. Пусть

$$A_k \equiv \{\text{мишень поражена при } k\text{-м выстреле}\}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Что означают следующие высказывания:

а) $A_1 + A_2 + A_3$; б) $A_1A_2A_3$; в) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$?

2. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление.

На следствии каждый из них сделал два заявления.

Б р а у н. Я не делал этого.
Смит сделал это.

Д ж о н с. Смит не виновен.
Браун сделал это.

С м и т. Я не делал этого.
Джонс не делал этого.

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой — дважды сказал правду, третий — один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

3. Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога B и F, синоптика F и G, радиста C и D, механика C и H, врача A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

4. Рассмотрим два определения легкой контрольной:

1. Контрольная работа называется легко, если *каждую* задачу решил *хотя бы один* ученик.

2. Контрольная работа называется легкой, если *хотя бы один* ученик решил *все* задачи.

а) Может ли контрольная быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?

б) Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

5. Ученики 10 В класса хвастались тем, что они выше ростом учеников 10 А. На вопрос учителя математики: «Что, собственно, означает, что вы выше ростом?» — ученики 10 В дали следующие ответы:

1. Любой из нас выше любого из них.

2. Самый высокий из нас выше самого высокого из них.

3. Для любого ученика нашего класса найдется ученик класса А меньшего роста.

4. Каждый ученик класса А ниже хотя бы одного ученика нашего класса.

5. Средний рост учеников нашего класса больше среднего роста учеников класса А.

Есть ли среди этих ответов равносильные? Если есть, то какие?

6. На множестве всех натуральных чисел заданы три предложения

$$A(n) \equiv \{\text{число } n^2-2 \text{ кратно } 7\},$$
$$B(n) \equiv \{\text{число } n-2 \text{ кратно } 7\},$$
$$C(n) \equiv \{4n^2-360n+8099<0\}.$$

При каких значениях n из данных трех предложений два истинны и одно ложно?

7. Даны три предложения, заданные на множестве всех действительных чисел:

$$A(x) \equiv \{x-\text{целое число}\},$$
$$B(x) \equiv \{x^2-3x-\text{целое отрицательное число}\},$$
$$C(x) \equiv \left\{x+\frac{1}{x}-\text{целое положительное число}\right\}.$$

При каких значениях x ложно *одно и только одно* из этих трех предложений?

8. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x+2by=a, \\ bx+(1-b)y=c^2+c, \end{cases}$$

где a, b, c — действительные числа.

При каких значениях a при *любом* b *найдется* такое c, при котором система имеет *хотя бы одно решение*?

9. Даны две точки A (0; 9), B (3; 6) и система неравенств

$$\begin{cases} 2x-y+a \leqslant 0, \\ 6x+3y+5a \geqslant 0. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a решением системы будут координаты

а) *хотя бы одной* точки отрезка AB,

б) *каждой* точки отрезка AB?

10. Для каждой из нижеследующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной. Указать, какие из теорем верны.

а) Если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник представляет собой ромб.

б) Если параллелограмм является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность.

в) Если многоугольник является четырехугольником, то сумма его внутренних углов равна 360°.

11. Какие из следующих шести теорем являются по отношению друг к другу обратными, противоположными, противоположными обратным? Какие из этих теорем верны?

Теорема 1. Если каждое из двух натуральных чисел делится нацело на 7, то их сумма делится на 7.

Теорема 2. Если ни одно из двух чисел не делится на 7, то и их сумма не делится на 7.

Теорема 3. Если хотя бы одно из двух чисел делится на 7, то и их сумма делится на 7.

Теорема 4. Если сумма двух чисел делится на 7, то каждое слагаемое делится на 7.

Теорема 5. Если сумма двух чисел не делится на 7, то ни одно из слагаемых не делится на 7.

Теорема 6. Если сумма двух чисел не делится на 7, то хотя бы одно из слагаемых не делится на 7.

12. Дана теорема: в любом четырехугольнике, который не является прямоугольником, диагонали не конгруэнтны. Сформулировать теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих четырех теорем верны?

13. Для теоремы: «Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней» — сформулировать теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих четырех теорем верны?

14. Замените многоточия словами «необходимо и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо» так, чтобы получились верные утверждения:

а) Для того чтобы выиграть в лотерее, ... иметь хотя бы один лотерейный билет.

б) Для того чтобы из трех чисел a, b, c хотя бы два были равны между собой, ..., чтобы

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

в) Для того чтобы сумма двух действительных чисел была числом рациональным, ..., чтобы каждое слагаемое было рациональным числом.

г) Для того чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит, ..., чтобы треугольник был прямоугольным.

д) Для того чтобы функция $y=ax^2+bx+c$ при всех целых x принимала целые значения, ..., чтобы $2a$, $a+b$, c были целыми числами.

15. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) Для того чтобы число n^2+20 $(n>3)$ было составным, достаточно, чтобы n было простым.

б) Для того чтобы число n^2+20 $(n>3)$ было составным, необходимо, чтобы n было простым.

16. Доказать, что при любом натуральном n:

а) $n(2n^2-3n+1)$ кратно 6;

б) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится нацело на 133;

в) n^5-n кратно 5; г) n^7-n кратно 7.

17. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ число $2^{2^n}+1$ оканчивается цифрой 7.

18. Методом математической индукции доказать справедливость равенств для каждого натурального значения n:

а) $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$;

б) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

в) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;

д) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

19. Доказать, что

$$3+33+\ldots+33\ldots3=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

(левая часть равенства содержит n слагаемых).

20. Доказать равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2\cos(\pi/2^{n+1}), \qquad n\in\mathbb{N}$$

(в левой части содержится n корней).

21. При каких натуральных значениях n верны неравенства:

а) $3^n>2^n+7n$; б) $2^n>n^2+4n+5$?

22. Методом математической индукции доказать справедливость следующих неравенств для всех натуральных $n>1$:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

б) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{14}$;

в) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

г) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

23. На сколько частей разделится сфера n плоскостями, проходящими через центр, если никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр.

24. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные неотрицательные числа, причем

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1/2.$$

Доказать, что

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geqslant 1/2.$$

Глава III

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Уравнения с одним и несколькими переменными

Любое предложение вида

$$f(x)=g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, называется *уравнением с одной переменной* x (или с одним неизвестным x). Функция $f(x)$ называется *левой частью*, а $g(x)$ — *правой частью* уравнения (1).

Число a называется *корнем* (или *решением*) данного уравнения с переменной x, если при подстановке числа a вместо x в обе части этого уравнения получаем верное числовое равенство, т. е. если при $x=a$ обе части уравнения определены и их значения совпадают.

Решить данное уравнение — значит найти множество всех корней (решений) этого уравнения в области $\mathbb{R}$.

Два уравнения называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одно и то же множество решений, т. е. если каждое решение первого уравнения является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения является решением первого уравнения, или если оба уравнения не имеют решений.

Например, уравнения $5x+1=6$ и $2x=2$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень $x=1$.

Уравнение вида

$$ax=b, \tag{2}$$

где a и b — некоторые заданные числа, называется *линейным уравнением*.

Очевидно, если $a=b=0$, то любое число является решением уравнения (2). Если $a=0$, но $b\neq 0$, то уравнение (2) решений не имеет. Если же $a\neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение $x=b/a$.

Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{3}$$

где a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, называется *квадратным*.

Простейшее квадратное уравнение имеет вид $x^2+c=0$. Оно не имеет решений, если $c>0$, имеет одно решение $x=0$, если $c=0$, и имеет два решения $x=\sqrt{-c}$ и $x=-\sqrt{-c}$, если $c<0$.

Легко проверяется, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Отсюда видно, что уравнение (3) не имеет решений, если $D=b^2-4ac<0$, имеет единственное решение $x=-\frac{b}{2a}$, если $D=0$, и имеет два решения $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$, если $D>0$.

Таким образом, все решения уравнения (3), если они есть, находятся по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2x+1}{3-x}=\frac{4-x}{x+1}.$$

△ Умножим обе части данного уравнения на $(3-x)(x+1)$. Очевидно, любое решение данного уравнения является и решением полученного уравнения

$$(2x+1)(x+1)=(4-x)(3-x).$$

Как легко видеть, оно равносильно квадратному уравнению

$$x^2+10x-11=0.$$

Находим корни этого уравнения:

$$x=-5\pm\sqrt{25+11}=-5\pm 6,$$

т. е. $x=-11$ и $x=1$.

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -11 и 1. Проверкой убеждаемся, что эти числа являются решениями данного уравнения.

Ответ: $\{-11, 1\}$. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}.$$

△ Любое решение данного уравнения является решением уравнения

$$3x(x+2)-2x(x-1)=3x-6,$$

которое получается из данного умножением на $(x-1)(x+2)$. Очевидно, это уравнение равносильно следующему квадратному уравнению

$$x^2+5x+6=0.$$

По формуле (4) находим его корни: $x=-3$ и $x=-2$.

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -3 и -2. Проверкой убеждаемся, что число -3 является его корнем, а число -2 не является его корнем, так как при $x=-2$ не определены обе части данного уравнения.

Ответ: $\{-3\}$. ▲

Пусть заданы два уравнения. Тогда, если любое решение первого уравнения является решением и второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Если уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ является следствием уравнения $f(x)=g(x)$, то будем писать

$$(f(x)=g(x)) \Rightarrow (f_1(x)=g_1(x)).$$

Если уравнения $f(x)=g(x)$ и $f_1(x)=g_1(x)$ равносильны, то, очевидно, каждое из них является следствием другого. В этом случае будем писать

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f_1(x)=g_1(x)).$$

Сформулируем несколько утверждений, широко используемых при решении уравнений. Их доказательство предоставляется читателям в качестве легкого, но полезного упражнения.

1. *Если функция* $\varphi(x)$ *определена для всех* x, *для которых определены* $f(x)$ *и* $g(x)$, *то*

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)).$$

В частности,

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)-g(x)=0).$$

2. *Если функция* $\varphi(x)$ *определена для всех* x, *для которых определены* $f(x)$ *и* $g(x)$, *то*

$$(f(x)=g(x)) \Rightarrow (f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)).$$

Если, кроме того, $\varphi(x)\neq 0$ *для всех* x, *то*

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)).$$

В частности, для любого числа $k\neq 0$

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (kf(x)=kg(x)).$$

3. *Для любых* $f(x)$, $g(x)$ *и* $\varphi(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)\right) \Rightarrow (f(x)=g(x)\varphi(x)).$$

Очевидно, что любое решение x_0 уравнения

$$f(x) = g(x)\,\varphi(x) \tag{5}$$

такое, что $\varphi(x_0) \neq 0$, является решением и уравнения

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g(x). \tag{6}$$

Следовательно, в множестве всех чисел, для которых $\varphi(x) \neq 0$, уравнения (5) и (6) имеют одни и те же решения. В этом случае будем говорить, что при условии $\varphi(x) \neq 0$ уравнения (5) и (6) равносильны, и писать

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow (\varphi(x) \neq 0,\ f(x) = g(x)\,\varphi(x)).$$

4. *Каждое решение уравнения* $f(x)\,g(x) = 0$ *является решением по крайней мере одного из уравнений* $f(x) = 0$ *или* $g(x) = 0$:

$$(f(x)\,g(x) = 0) \Rightarrow (f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0).$$

Если функция $f(x)$ *определена для всех* x, *где* $g(x) = 0$, *а функция* $g(x)$ *определена для всех* x, *где* $f(x) = 0$, *то*

$$(f(x)\,g(x) = 0) \Leftrightarrow (f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0).$$

5. *Для любых* $f(x)$ *и* $g(x)$ *и любого натурального* n

$$(f(x) = g(x)) \Rightarrow ((f(x))^n = (g(x))^n).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+5} = x+2.$$

△ Воспользуемся сформулированными выше утверждениями и введенными обозначениями. Тогда

$$(2\sqrt{x+5} = x+2) \Rightarrow (4(x+5) = (x+2)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x+20 = x^2+4x+4) \Leftrightarrow (x^2 = 16) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ или } x = -4).$$

Таким образом, решениями данного уравнения могут быть лишь $x = 4$ и $x = -4$. Проверкой убеждаемся, что только $x = 4$ является решением данного уравнения.

Ответ: $\{4\}$. ▲

Заметим, что уравнения $2\sqrt{x+5} = x+2$ и $4(x+5) = (x+2)^2$ равносильны при условии $x+2 \geqslant 0$. Поэтому схему решения уравнения можно изобразить так:

$$(2\sqrt{x+5} = x+2) \Leftrightarrow (x+2 \geqslant 0,\ 4(x+5) = (x+2)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \geqslant -2,\ x^2 = 16) \Leftrightarrow (x = 4).$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{4+2x-x^2} = x-2.$$

△ Имеем

$$(\sqrt{4+2x-x^2}=x-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4+2x-x^2=(x-2)^2;\ x\geqslant 2)\Leftrightarrow (x\geqslant 2;\ 2x^2-6x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\geqslant 2;\ x=0 \text{ или } x=3)\Leftrightarrow (x=3).$$

Ответ: {3}. ▲

Любое предложение вида

$$f(x;\ y)=g(x;\ y), \tag{7}$$

где $f(x;\ y)$ и $g(x;\ y)$ — некоторые функции переменных x и y, называется *уравнением с двумя переменными* x и y или с двумя неизвестными x и y. Функция $f(x;\ y)$ называется *левой частью*, а $g(x;\ y)$ — *правой частью* уравнения (7).

Решением данного уравнения с переменными x, y называется упорядоченная пара чисел $(a;\ b)$, при подстановке которых соответственно вместо x и y в обе части этого уравнения получается верное числовое равенство.

Множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения, называется *графиком* этого уравнения. Так, например, графиком уравнения $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где $R>0$, является окружность радиуса R с центром в точке $(x_0;\ y_0)$. Графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, является парабола.

Уравнение вида

$$ax+by+c=0, \tag{8}$$

где a, b, c — некоторые числа, называется *линейным*. Графиком линейного уравнения (8), у которого хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, является прямая. Если $a=b=c=0$, то любая пара чисел является решением уравнения (8), а если $a=b=0$, но $c\neq 0$, то уравнение (8) решений не имеет.

Если каждое решение уравнения (7) является и решением уравнения

$$f_1(x;\ y)=g_1(x;\ y), \tag{9}$$

то уравнение (9) называется *следствием* уравнения (7). В этом случае график уравнения (7) является частью графика уравнения (9) (в частности, они могут совпадать). Если графики уравнений совпадают, то они называются *равносильными*.

Легко доказать, что

1. $(f(x;\ y)=g(x;\ y))\Leftrightarrow (f(x;\ y)-g(x;\ y)=0)$.
2. $(f(x;\ y)=g(x;\ y))\Leftrightarrow (kf(x;\ y)=kg(x;\ y))$

для любого числа $k\neq 0$.

3. $\left(\dfrac{f(x;\ y)}{\varphi(x;\ y)}=g(x;\ y)\right)\Leftrightarrow (\varphi(x;\ y)\neq 0,\ f(x;\ y)=g(x;\ y)\varphi(x;\ y))$.
4. $(f(x;\ y)g(x;\ y)=0)\Rightarrow (f(x;\ y)=0 \text{ или } g(x;\ y)=0)$.

Пример 5. Нарисовать график уравнения $y^2 = 4x^2$.

△ Имеем

$$(y^2 = 4x^2) \Leftrightarrow (y^2 - 4x^2 = 0) \Leftrightarrow ((y - 2x)(y + 2x) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y - 2x = 0 \text{ или } y + 2x = 0) \Leftrightarrow (y = 2x \text{ или } y = -2x).$$

Таким образом, график уравнения $y^2 = 4x^2$ — это пара пересекающихся прямых, заданных уравнениями $y = 2x$ и $y = -2x$ (рис. 31). ▲

Наряду с уравнениями с одной переменной и с двумя переменными в дальнейшем будут рассматриваться уравнения с тремя и более переменными.

В общем случае *решением* уравнения с n переменными называется упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которых вместо переменных в обе части уравнения получается верное числовое равенство.

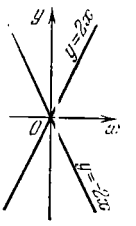


Рис. 31.

§ 2. Системы уравнений

Любое конечное множество уравнений называется *системой уравнений*. В общем случае можно рассматривать систему m уравнений с n переменными (неизвестными), причем возможны все три случая $m = n$, $m < n$ и $m > n$. *Решением* системы уравнений с n переменными называется упорядоченный набор из n чисел, являющийся решением каждого из уравнений системы. Решить систему — значит найти все ее решения.

Сформулируем несколько правил преобразования систем уравнений.

1. *Если в системе заменить какое-либо из уравнений на ему равносильное, а остальные оставить без изменения, то вновь полученная система равносильна исходной.*

2. *Пусть $f = g$ и $\varphi = \psi$ — какие-нибудь два уравнения системы. Тогда если в системе заменить уравнение $f = g$ на уравнение $f + \varphi = g + \psi$ (оно называется суммой уравнений $f = g$ и $\varphi = \psi$), а остальные оставить без изменения, полученная система равносильна исходной.*

3. *Пусть система содержит уравнение $x = \varphi$, где x — некоторая переменная, а φ — некоторая функция, не зависящая от x. Тогда если во всех уравнениях системы, кроме уравнения $x = \varphi$, вместо x подставить φ, полученная система равносильна исходной.*

На этом правиле основан способ решения систем, который называется *способом подстановки* или *способом исключения неизвестных*. Он сводит решение данной системы к решению системы меньшего числа уравнений с меньшим числом переменных (неизвестных).

4. *Если система содержит уравнение $f \cdot g = 0$, то она распадается на две системы, в одной из которых уравнение $f \cdot g = 0$ заме-*

нено на $f=0$, а в другой — на $g=0$. При этом каждое решение данной системы является решением одной из полученных систем.

Если же функции f и g определены на одном и том же множестве, то каждое решение полученных систем является решением исходной системы. В этом случае говорят, что данная система равносильна совокупности полученных систем.

На этом правиле основан способ решения систем, называемый *способом разложения на множители.*

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases}$$

△ Из второго уравнения системы находим $x=1+y$ и подставляем это выражение для x в первое уравнение. В результате получим уравнение $(1+y)^2+y^2=25$, содержащее только переменную y. После преобразований получаем квадратное уравнение $y^2+y-12=0$. Оно имеет корни $y_1=3$ и $y_2=-4$. Теперь, подставляя эти значения для y в уравнение $x=1+y$, находим $x_1=4$ и $x_2=-3$. Следовательно, данная система имеет решения (4; 3) и (−3; −4). Заметим, что при решении этой системы был применен метод подстановки.

Ответ: {(4; 3), (−3; −4)}. ▲

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения системы следует, что $y^2=(2x+1)^2$, т. е. $y=2x+1$ или $y=-2x-1$. Следовательно, данная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} y=2x+1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x-1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$$

Решим сначала первую систему. Подставив $y=2x+1$ во второе уравнение системы, получаем

$$4x^2+(2x+1)^2-3x(2x+1)=1,$$
$$2x^2+x+1=1,$$

и, наконец, $x(2x+1)=0$, т. е. $x=0$ или $x=-1/2$. Подставив эти значения для x в уравнение $y=2x+1$, получим соответственно $y=1$ и $y=0$. Следовательно, первая система имеет решения (0; 1) и (−1/2; 0).

Аналогично решается вторая система. Подставив $y=-2x-1$ во второе уравнение, получим, что $x(2x+1)=0$, т. е. $x=0$ или $x=-1/2$. Следовательно, вторая система имеет решения (0; −1) и (−1/2; 0).

Ответ: {(0; 1), (−1/2; 0), (0; −1)}. ▲

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

△ Умножив первое уравнение на 7, второе на -5 и сложив, получим уравнение

$$12y^2-2x^2-5xy=0.$$

Разложим его левую часть на два сомножителя. Для этого решим его, например, относительно y как квадратное уравнение:

$$y=\frac{5x\pm\sqrt{25x^2+96x^2}}{24}=\frac{5x\pm 11x}{24}.$$

Следовательно, $y=\frac{2}{3}x$ или $y=-\frac{1}{4}x$.

Данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ y=\frac{2}{3}x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x=-\frac{1}{4}x. \end{cases}$$

Подставляя $y=\frac{2}{3}x$ в первое уравнение, получаем

$$x^2-\frac{4}{9}x^2=5, \quad x^2=9, \quad x=\pm 3.$$

Следовательно, первая система имеет решения (3; 2) и (—3; —2). Аналогично получаем, что вторая система имеет решения $(4/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3})$ и $(-4/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$.

Ответ: $\{(3;2), (-3;-2), (4/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3}), (-4/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})\}$. ▲

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x}-\sqrt{x}=y\sqrt{y}+8\sqrt{y}, \\ x=y+5. \end{cases} \tag{1}$$

△ Введем новые переменные u и v:

$$\begin{cases} u=\sqrt{x}, \\ v=\sqrt{y}. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда из данной системы относительно переменных u и v получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^3-u=v^3+8v, \\ u^2=v^2+5. \end{cases} \tag{3}$$

Легко видеть, что система уравнений (1), (2) равносильна системе уравнений (2), (3). Следовательно, чтобы найти все решения

системы (1), нужно решить систему уравнений (2), (3). Причем, если $(x_1; y_1; u_1; v_1)$ — некоторое решение этой системы, то $(x_1; y_1)$ — решение системы (1).

Система уравнений (2), (3) имеет специальный вид: уравнения (3) не содержат переменных x и y. Поэтому сначала решают систему уравнений (3), а затем, подставив в (2) найденные значения для u и v, решают полученную систему уравнений относительно переменных x, y.

Решим систему (3). Для этого обе части первого уравнения возведем в квадрат:

$$u^2(u^2-1)^2 = v^2(v^2+8)^2$$

— и в полученном уравнении сделаем замену $u^2 = v^2 + 5$. В результате после некоторых преобразований получим уравнение

$$3v^4 + 8v^2 - 80 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно v^2. По формуле для корней квадратного уравнения находим $v^2 = 4$. Следовательно, любое решение системы (3) есть решение системы уравнений $v^2 = 4$, $u^2 = 9$, которая имеет четыре решения: (3; 2), (3; —2), (—3; 2), (—3; —2). Проверкой убеждаемся, что система (3) имеет только два решения (3; 2) и (—3; —2).

Теперь из уравнений (2) найдем соответствующие значения переменных x, y. Подставив в (2) значения $u = 3$, $v = 2$, получим $x = 9$, $y = 4$. При $u = -3$, $v = -2$ получим систему, не имеющую решений. Следовательно, система (1) имеет единственное решение $x = 9$, $y = 4$.

Ответ: $\{(9; 4)\}$. ▲

Приведенное решение схематически можно изобразить следующим образом:

$$\{(1);\ (2)\} \Leftrightarrow \{(2);\ (3)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{(2);\ u = 3,\ v = 2 \text{ или } u = -3,\ v = -2\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{(2);\ u = 3,\ v = 2\} \Leftrightarrow \{x = 9,\ y = 4,\ u = 3,\ v = 2\}.$$

Способ, который применялся при решении системы (1), называется *способом введения новых переменных (неизвестных)*. Этот способ часто применяется при решении систем. Приведем еще один пример решения системы способом введения новых переменных.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x^2 + y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

△ Преобразовав второе уравнение системы к виду

$$(x+y)^2 - 3xy = 3,$$

видим, что удобно ввести новые переменные $u=x+y$, $v=xy$. Для u, v получим систему уравнений

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-3v=3. \end{cases}$$

Выразив u из первого уравнения и подставив во второе, получим квадратное уравнение

$$v^2-v-2=0,$$

корнями которого являются числа $v_1=2$ и $v_2=-1$. Из уравнения $u=v+1$ находим $u_1=3$ и $u_2=0$.

Из предыдущего следует, что данная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=0, \\ xy=-1. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения (1; 2) и (2; 1). Вторая система имеет также два решения (1; —1) и (—1; 1).

Ответ: {(1; 2), (2; 1), (1; —1), (—1; 1)}. ▲

§ 3. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Если все числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 равны нулю, то любая пара чисел является решением данной системы. Если же a_1, b_1, a_2, b_2 равны нулю, а хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, то система не имеет ни одного решения.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел a_1, a_2, b_1, b_2 отлично от нуля. Пусть, например, $a_1\neq 0$.

Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_1}, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{2}$$

Прибавив ко второму уравнению первое уравнение, умноженное на $-a_2$, получим

$$\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\right)y=c_2-\frac{c_1}{a_1}a_2. \tag{3}$$

Следовательно, если $b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\neq 0$, т. е. $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4}$$

Подставив это значение y в первое уравнение системы (2), находим

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (5)$$

Таким образом, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система (2), а также и система (1), имеет единственное решение, которое определяется по формулам (4), (5).

Пусть теперь $a_1b_2-a_2b_1=0$. Тогда если $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$, то уравнение (3), а также система (1), не имеет решений. Если же $a_1c_2-a_2c_1=0$, то любая пара чисел $(x;\ y)$, где

$$x=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}y, \qquad y\in\mathbb{R},$$

является решением системы (1).

Таким образом, если $a_1b_2-a_2b_1=0$, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Пусть, по-прежнему, $a_1\neq 0$ и $b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2=0$. Обозначим $a_2/a_1=k$, тогда $a_2=ka_1$ и из условия $b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2=0$ следует, что $b_2=kb_1$. В этом случае система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ ka_1x+kb_1y=c_2. \end{cases}$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда $c_2=kc_1$.

Таким образом, если $a_1\neq 0$, а $a_1b_2-a_2b_1=0$, то система имеет решение тогда и только тогда, когда второе уравнение получается из первого почленным умножением на число $k=a_2/a_1$.

Выше предполагалось, что $a_1\neq 0$. Если же, например, $b_2\neq 0$, то, поменяв местами уравнения и переменные в обоих уравнениях, придем к уже разобранному случаю.

При нахождении решений систем в случае, когда $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, можно пользоваться формулами (4), (5), а можно проводить все преобразования, которые мы делали при выводе формул (4), (5).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=11, \\ 3x+2y=9. \end{cases}$$

△ Второе уравнение умножим на $\frac{2}{3}$ и вычтем почленно из первого. В результате получим $\frac{5}{3}y=5$, т. е. $y=3$. Подставив это значение y в первое уравнение заданной системы, получим $x=1$.

Ответ: $\{(1;\ 3)\}$. ▲

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 12x - 4y = 4. \end{cases}$$

△ Данная система равносильна одному уравнению $3x - y = 1$, так как второе уравнение получается из этого почленным умножением на 4. Следовательно, ей удовлетворяет любая пара чисел x, $y = 3x - 1$, и других решений система не имеет.

Ответ: $\{(x;\ 3x-1),\ x \in \mathbb{R}\}$. ▲

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$$

△ Ни одна пара чисел не удовлетворяет этой системе уравнений. Действительно, если первое уравнение почленно умножить на 2 и вычесть из второго, то получим уравнение $0=2$, которое, очевидно, не имеет решений.

Ответ: Система не имеет решений. ▲

Пример 4. При каких значениях параметра a система двух уравнений

$$\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a - 1 \end{cases} \tag{6}$$

имеет бесконечное множество решений?

Разделим первое уравнение на 8:

$$\frac{a+1}{8}x + y = \frac{a}{2}. \tag{7}$$

Из второго уравнения системы (6) вычтем уравнение (7), умноженное на $a+3$:

$$\left(a - \frac{(a+1)(a+3)}{8}\right)x = 3a - 1 - \frac{a}{2}(a+3). \tag{8}$$

Очевидно, что при любом a система уравнений (7), (8) равносильна данной. Следовательно, если в уравнении (8) коэффициент при x не равен нулю, т. е. если

$$a - \frac{(a+1)(a+3)}{8} \neq 0,$$

то система (6) будет иметь единственное решение. Поэтому система (6) может иметь бесконечное множество решений только тогда, когда $a - \frac{(a+1)(a+3)}{8} = 0$, т. е. когда

$$a^2 - 4a + 3 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $a = 3$ и $a = 1$.

При $a=3$ из (6) получаем систему

$$\begin{cases} 4x+8y=12, \\ 3x+6y=8, \end{cases}$$

которая, очевидно, не имеет ни одного решения.

При $a=1$ из (6) получаем систему

$$\begin{cases} 2x+8y=4, \\ x+4y=2, \end{cases}$$

равносильную одному уравнению $x+4y=2$. Решением этого уравнения будет любая пара чисел $(2-4y;\ y)$, где $y\in\mathbb{R}$. Следовательно, система (6) имеет бесконечное множество решений только при $a=1$.

Ответ: $a=1$. ▲

Линейным уравнением с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b, \tag{9}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые числа. Если все числа $a_1, \ldots, a_n, b$ равны нулю, то любой набор n чисел является решением этого уравнения. Если же все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю, а $b\neq 0$, то уравнение (9) не имеет решений. В дальнейшем будем предполагать, что не все коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю.

При нахождении решений системы m линейных уравнений с n переменными удобно пользоваться *методом Гаусса*. Этот метод является частным случаем метода исключения переменных и состоит в том, что равносильными преобразованиями данную систему приводят к так называемой *треугольной форме*.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+3z=13, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$$

△ Прибавив почленно к первому уравнению второе, умноженное на -2, получим

$$-y+z=1 \text{ или } y-z=-1.$$

Далее, к третьему уравнению системы прибавив второе, умноженное на -3, получим уравнение $-2y-2z=-10$. Наконец, прибавив к этому уравнению уравнение $y-z=-1$, умноженное на 2, получим $-4z=-12$, т. е. $z=3$.

В результате преобразований получили систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y-z=-1, \\ z=3, \end{cases}$$

которая, очевидно, равносильна данной.

Системы такого вида называются *треугольными*. Они легко решаются. Действительно, из третьего, второго и первого уравнений последовательно находим $z=3$, $y=z-1=2$, $x=6-y-z=1$.

Ответ: $\{(1;\ 2;\ 3)\}$. ▲

Решение системы линейных уравнений приведением к треугольной форме называется *методом Гаусса*.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+x_3=0. \end{cases}$$

△ Эту систему трех уравнений с четырьмя переменными решим методом Гаусса.

Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем

$$-2x_3-x_4=1, \quad x_3+\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2+x_3=0, \\ x_3+\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта система треугольной формы равносильна данной. Считая x_4 произвольным, последовательно находим

$$x_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_2=-x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4, \quad x_1=1-x_4.$$

Следовательно, любой упорядоченный набор из четырех чисел вида $\left(1-t;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t;\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t;\ t\right)$, где $t\in\mathbb{R}$, является решением данной системы уравнений, и других решений эта система не имеет.

Ответ: $\left\{\left(1-t;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t;\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t;\ t\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}$. ▲

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

△ Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем уравнение

$$x_2 + 4x_3 = 1.$$

Далее, вычитая из третьего уравнения системы первое, умноженное на 3, получаем

$$2x_2 + 8x_3 = 3, \quad x_2 + 4x_3 = 3/2.$$

Наконец, вычитая из последнего уравнения уравнение $x_2 + 4x_3 = 1$, получаем уравнение $0 = 1/2$, которое, очевидно, не имеет решений.

Следовательно, данная система не имеет решений.

Ответ: Система несовместна. ▲

Из приведенных примеров следует, что система линейных уравнений может иметь одно решение (см. пример 5), бесконечное множество решений (см. пример 6) и может не иметь ни одного решения (см. пример 7).

§ 4. Задачи на составление уравнений

Пример 1. На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 минут меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый из них за 7 часов, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше другого?

△ Обозначим через n количество деталей, которое обрабатывает первый рабочий за 7 часов. Тогда одну деталь он обрабатывает за $7/n$ часов. Второй рабочий за 7 часов обрабатывает $n - 8$ деталей, следовательно, одну деталь он обрабатывает за $7/(n-8)$ часов.

Так как на обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 мин меньше, то

$$\frac{7}{n-8} - \frac{7}{n} = \frac{1}{10}.$$

Решим это уравнение.

После умножения обеих частей уравнения на $n(n-8)$ и приведения подобных членов получаем квадратное уравнение

$$n^2 - 8n - 560 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$n = 4 \pm \sqrt{16 + 560} = 4 \pm 24.$$

Условию задачи удовлетворяют только положительные значения n, поэтому $n=28$. Следовательно, первый рабочий обрабатывает 28 деталей, второй на 8 меньше, т. е. 20 деталей.

Ответ: 28 и 20 деталей. ▲

Пример 2. В сосуде было 10 литров соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 64%-й раствор соляной кислоты?

△ Обозначим через x литров количество соляной кислоты, которое отлили первый раз. После первого отливания и добавления воды в смеси стало $10-x$ литров соляной кислоты и x литров воды. Следовательно, в каждом литре смеси содержится $\frac{10-x}{10}$ литра кислоты.

После отливания x литров смеси в сосуде остается $10-x$ литров смеси, в которой содержится

$$(10-x)\frac{10-x}{10}=\frac{(10-x)^2}{10}$$

литров соляной кислоты.

После доливания x литров воды в сосуде оказывается 10 литров смеси, из них $\frac{(10-x)^2}{10}$ литров соляной кислоты. Процентное содержание соляной кислоты равно

$$\frac{(10-x)^2}{10\cdot 10}\cdot 100\%.$$

С другой стороны, по условию задачи это содержание равно 64%. Поэтому для x получаем уравнение

$$(10-x)^2=64,$$

из которого следует, что $x=2$.

Ответ: 2 литра. ▲

Пример 3. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

△ Обозначим первую цифру искомого двузначного число через a, а вторую цифру через b. Тогда искомое двузначное числа равно $10a+b$.

Из первого условия задачи следует уравнение

$$10a+b=ab+16, \tag{1}$$

а из второго — уравнение

$$10a+b=(a-b)^2+ab. \tag{2}$$

В результате для a и b получили систему уравнений (1), (2). Левые части в уравнениях (1), (2) равны, следовательно, равны и правые, т. е. $ab+16=(a-b)^2+ab$. Из этого уравнения следует, что $(a-b)^2=16$, т. е. $a-b=\pm 4$.

Рассмотрим случай, когда $a-b=4$. Подставив $a=b+4$ в уравнение (1), после преобразований получим квадратное уравнение

$$b^2-7b-24=0.$$

По формуле корней квадратного уравнения имеем

$$b=\frac{7\pm\sqrt{49+96}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{145}}{2}.$$

Так как b — целое число, то в этом случае задача не имеет решений.

Рассмотрим второй случай, когда $a-b=-4$, т. е. $a=b-4$. Подставив это выражение для a в уравнение (1), получим квадратное уравнение

$$b^2-15b+56=0.$$

Решая это уравнение, находим $b_1=7$ и $b_2=8$. Из формулы $a=b-4$ находим $a_1=3$ и $a_2=4$.

Ответ: 37 и 48.

Пример 4. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 секунд меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 секунд. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

△ Пусть v_1, v_2 — скорости спортсменов. Для определенности положим $v_2>v_1$. Обозначим через S длину замкнутой дорожки стадиона. Тогда первый спортсмен пробегает ее за S/v_1 секунд, а второй — за S/v_2. Так как первый спортсмен затрачивает на 5 сек. больше, то получаем уравнение

$$\frac{S}{v_1}-\frac{S}{v_2}=5. \tag{3}$$

За 30 секунд спортсмены пробегают расстояния соответственно $30v_1$ и $30v_2$. Если они бегут в одном направлении, то в момент их встречи второй пробежит на один круг больше, т. е.

$$S=30(v_2-v_1). \tag{4}$$

Получили систему двух уравнений (3), (4) с тремя переменными v_1, v_2, S.

Разделив обе части уравнения (4) на $30S$, получим

$$\frac{v_2}{S}-\frac{v_1}{S}=\frac{1}{30}. \tag{5}$$

Введем обозначения $p_1 = v_1/S$ и $p_2 = v_2/S$. Тогда из уравнений (3), (5) для p_1 и p_2 получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = 5, \\ p_2 - p_1 = \dfrac{1}{30}. \end{cases} \tag{6}$$

Из второго уравнения находим

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{30}. \tag{7}$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (6), получим квадратное уравнение

$$150p_1^2 + 5p_1 - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$p_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 600}}{300} = \frac{-5 + 25}{300} = \frac{1}{15}.$$

(Здесь перед корнем взят только знак $+$, так как по условию задачи $p_1 > 0$). Подставив это значение p_1 в (7), получим $p_2 = 1/10$. Зная p_1 и p_2, легко ответить на вопрос, поставленный в задаче: через какое время спортсмены встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях. Действительно, это время равно

$$\frac{S}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{v_1}{S} + \frac{v_2}{S}} = \frac{1}{p_1 + p_2} = \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = \frac{30}{5} = 6.$$

Следовательно, искомое время равно 6 секундам.

Ответ: 6 с. ▲

Заметим, что p_1 и p_2 — это величины скоростей спортсменов в случае, если за единицу длины принять длину замкнутой дорожки стадиона.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

Решить уравнения (1—5):

1. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$.
2. $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.
3. $4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4$.
4. $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9} + \dfrac{x^2+4x+9}{x-3} = -2$.
5. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3 = 0$.

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса (6—8):

6. $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x+3y-6z=0, \\ 3x+3y-5z=0, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, \\ 4x_1-x_2+3x_3+x_4=4. \end{cases}$

Решить системы уравнений (9—13):

9. $\begin{cases} x^2+2y^2-2xy=5, \\ x+2y=7. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4xy=3, \\ 2x^2-y^2=7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3xy-x^2-y^2=5, \\ 7x^2y^2-x^4-y^4=155. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} xy-yz-2x-z=0, \\ xz-z^2+3x-3y=0, \\ x^2-xz+4y+2z=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 27x^3-y^3-13\dfrac{xy}{z}=0, \\ 3x^2z-4xy+\dfrac{3}{z}=0, \\ 3xz-yz=1. \end{cases}$

14. Найти все значения параметра c, при которых система

$$\begin{cases} -4x+cy=1+c, \\ (6+c)x+2y=3+c \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

15. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Катер прошел расстояние от A до C за 7 часов. На каждом из участков AB и BC его собственная скорость (скорость относительно воды) была постоянна, причем на участке BC в $1\frac{1}{2}$ раза меньше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A катер прошел за 8 часов, и на всем пути его собственная скорость была в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость катера была такой же, как и при движении из A в B, то участок от B до A он прошел бы за 6 часов. Сколько времени катер шел от B до C? (Скорость течения реки постоянна.)

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

Решить уравнения (1—11):

1. $1+\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2+3x}{x(x+2)}$. 2. $2+\dfrac{2t-1}{t+2}=\dfrac{4t+3}{2t+1}$.

3. $\dfrac{2y+1}{y-1}+\dfrac{y+1}{2y+1}=\dfrac{5y+4}{(y-1)(2y+1)}$.

4. $(x+2)^2+\dfrac{24}{x^2+4x}=18$. 5. $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$.

6. $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$. 7. $\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=2$.

8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$. 9. $2x+3-\sqrt{x^2-2x-3}=0$.

10. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

11. $|x^2+3x+2|+4x+10=0$.

12. При каких значениях параметра a уравнения $x^2+5x+a=0$ и $x^2+2ax+a^2-4a+25=0$ имеют действительные корни?

Решить системы уравнений методом Гаусса (13—18):

13. $\begin{cases} 5x+y-7z=0, \\ 5x-2z=3, \\ 3x-y+2z=3, \\ 3x+2y-10z=-3. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 2x+4y+z=1, \\ 4x+6y-z=1, \\ 3x+7y+3z=2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=3, \\ 3x_1-x_3+x_4=5. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 7x+2y-4z=19, \\ 5x+3y-3z=15, \\ 5x-3y+3z=15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=-3, \\ 5x_1-x_2+x_3-2x_4=3, \\ 8x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 7x_1-x_4=3. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3. \end{cases}$

Решить системы уравнений (19—30):

19. $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy=-12. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2-xy=6, \\ xy+y^2=4. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x+y=3x^2, \\ x+2y=3y^2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-xy^3=7, \\ xy^2-xy=3. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ (x+y)^2-\frac{1}{2}y^2=7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2|x-1|+3|y+2|=17, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{4}{y}=2, \\ \frac{18}{x}+\frac{y}{2}=5. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{10}{3}, \\ xy-2x-2y=2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y\sqrt{y}+\sqrt{y}=5\sqrt{x}-x\sqrt{x}, \\ x=y+3. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=2. \\ x+y=12. \end{cases}$

31. Сколько действительных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

в зависимости от параметра a?

32. Определить, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

Решить системы уравнений (33—38):

33. $\begin{cases} xy-xz+3y+6z=0, \\ y^2-yz+4x-4z=0, \\ zy-z^2-2x-y=0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} xy+2yz^2-4z^3=0, \\ y-yz-xz=0, \\ y^2-7xz^2-13z^3=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} y^2-xy+x^2=z^2, \\ x^2-xz+z^2=y^2, \\ z^2-y^2=x^2+yz+z^2. \end{cases}$

36. $\begin{cases} xy=5x+6y-4z, \\ y^2=3x+5y-z, \\ yz=x+4y+2z. \end{cases}$

37. $\begin{cases} xy+\dfrac{6}{xz}=2, \\ xz-\dfrac{4}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1. \end{cases}$

38. $\begin{cases} y^2+z^2=x^2+2yz-2, \\ z^2+x^2=y^2+2zx-3, \\ x^2+y^2=5zy-5zx+2xy-6. \end{cases}$

39. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

40. Имеется два раствора поваренной соли разной концентрации. Если слить вместе 100 г первого раствора и 200 г второго, то получится 50%-й раствор. Если же слить 300 г первого раствора и 200 г второго, то получается 42%-й раствор. Определить концентрации данных растворов.

41. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m кГ и n кГ, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

42. Бассейн, к которому подведены две трубы, через первую трубу наполняется на 5 часов быстрее, чем через вторую. Если сначала открыть вторую трубу, а через 8 часов открыть и первую, то бассейн будет наполнен за 18 часов. Какова емкость бассейна и сколько воды втекает через каждую трубу за 1 час, если за 5 часов через первую трубу и за 4 часа через вторую проходит в сумме 20 м³ воды?

43. Бассейн наполнялся несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались один за другим через равные промежутки времени. К моменту включения последнего насоса была заполнена 1/6 часть бассейна. В другой раз при наполнении этого бассейна производительность каждого насоса была уменьшена на 10%, а промежутки между включениями остались прежними. Какую часть бассейна наполнят насосы в этот раз за первую половину всего времени работы?

44. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал

в эту смену 6 часов, а второй — 7 часов, причем вместе они сработали 616 деталей?

45. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 часов и второй 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить 1/18 всей работы. За сколько часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

46. Две бригады колхозников должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

47. Две организации приобрели некоторое количество разных туристических путевок, первая — на 300 рублей, вторая — на 270 рублей. Вторая организация купила на 5 путевок меньше, но заплатила за каждую путевку на 3 рубля больше. Сколько путевок купила каждая организация?

48. ЭВМ должна решить две задачи. Первая состоит из 9 миллионов операций типа A и 16 миллионов операций типа B и требует 11 минут 40 секунд машинного времени. Вторая задача содержит вдвое больше операций типа A и вдвое меньше операций типа B, на ее решение машина тратит 13 минут 20 секунд. Сколько операций каждого типа может выполнить ЭВМ в секунду?

49. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

50. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходит мимо неподвижного наблюдателя за 7 сек и затрачивает 25 сек на то, чтобы пройти с той же скоростью мимо платформы длиной 378 м.

51. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 минут. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 минут. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

52. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый на 1 час раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на два часа позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно 2/3.

53. Пешеход и велосипедист отправляются из пункта A в пункт B одновременно. В пункте B велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин. после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта A, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин. после первой встречи. За какое время пешеход пройдет путь от A до B?

54. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая встреча их произошла, когда автобус прошел 5/9 всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после пер-

вого захода в B проехал 1/8 всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт A автобус прибыл на 16 мин. позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны.

55. Из пункта A в пункт B одновременно отправились два поезда. Каждый из них вначале двигался равноускоренно (ускорения поездов различны, начальные скорости равны нулю), а затем, набрав некоторую скорость, — равномерно. Пройдя треть пути от A до B, один из поездов поравнялся с другим поездом и с этого момента начал двигаться равномерно. Весь путь от A до B один из поездов прошел в 1,2 раза быстрее другого поезда. Определить отношение скоростей равномерного движения поездов.

56. Несколько самосвалов загружаются поочередно в пункте A (время загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт B, там они мгновенно разгружаются и возвращаются в A. Скорости машин одинаковы, скорость груженой машины составляет 6/7 скорости порожней. Первым выехал из A водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из A последним, и прибыл в A через 6 минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в B и встретил Иванова второй раз через 40 минут после первой встречи. От места второй встречи до A Иванов ехал не менее 16 минут, но не более 19 минут. Определить время загрузки.

Глава IV
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Функциональные неравенства. Понятие равносильности неравенств

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на некотором множестве X. Часто бывает необходимо узнать, при каких значениях x значения первой функции меньше соответствующих значений второй. Другими словами, требуется найти все значения переменной, при которых верны числовые неравенства $f(x) < g(x)$. Такого типа задачи принято называть задачами на решение неравенств.

Таким образом, решить неравенство

$$f(x) < g(x)$$

— это значит найти все значения x, при подстановке которых в неравенство получается верное числовое неравенство. Каждое такое значение x называется *решением* неравенства. Совокупность всех решений называется *множеством решений*. Решить неравенство — значит найти его множество решений. Неравенство $f(x) < g(x)$ называют *строгим*, неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ — *нестрогим*.

При решении неравенств, так же как и при доказательстве неравенств (о чем речь пойдет в § 6), фундаментальное значение имеет понятие равносильности неравенств.

Два неравенства

$$f_1(x) < g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) < g_2(x)$$

называют *равносильными на множестве* M, если каждое решение первого неравенства, принадлежащее множеству M, является решением второго неравенства и, наоборот, каждое решение второго неравенства, принадлежащее множеству M, является решением первого неравенства.

Равносильными на множестве M считают также неравенства, которые на этом множестве не имеют ни одного решения.

В некоторых случаях удается, последовательно преобразуя данное неравенство, свести его к более простому неравенству, равносильному исходному. При установлении равносильности неравенств чаще всего используются следующие утверждения.

1. Неравенства

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad -f(x) > -g(x)$$

равносильны на любом числовом множестве.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ на множестве M принимают только положительные значения, то неравенства

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)}$$

равносильны на M.

3. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ определены на множестве M, то неравенства

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$$

равносильны на множестве M.

Отсюда следует равносильность неравенств

$$f(x) < g(x) + \varphi(x) \quad \text{и} \quad f(x) - \varphi(x) < g(x),$$

т. е. правило переноса слагаемых из одной части неравенства в другую.

4. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ определены на множестве M и $\varphi(x) > 0$ на этом множестве, то неравенства

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$$

равносильны на M.

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и принимают только положительные значения, то неравенства

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f^2(x) < g^2(x)$$

равносильны на M.

Справедливость этих утверждений легко следует из соответствующих свойств числовых неравенств. Аналогичные утверждения верны и для нестрогих неравенств.

Заметим, что для доказательства неравносильности двух неравенств на некотором множестве достаточно указать один элемент этого множества, являющийся решением одного неравенства, но не удовлетворяющий другому неравенству.

Пример 1. Равносильны ли на множестве всех положительных чисел следующие неравенства:

а) $x^2 \leqslant x^3$ и $1 \leqslant x$,

б) $x^3 + \sqrt{x} < x^2 + \sqrt{x}$ и $x^3 < x^2$,

в) $\sqrt{x} \leqslant x + 1$ и $x \leqslant (x+1)^2$?

△ а) Неравенства равносильны в силу утверждения 4 для нестрогих неравенств:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad \varphi(x) = 1/x^2.$$

б) Равносильность неравенств следует из утверждения 3:

$$f(x)=x^3,\quad g(x)=x^2,\quad \varphi(x)=\sqrt{x}.$$

в) Неравенства равносильны согласно утверждению 5:

$$f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=x+1.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Равносильны ли неравенства из примера 1 на множестве всех действительных чисел?

△ а) Неравенства неравносильны, так как $x=0$ удовлетворяет первому неравенству и не удовлетворяет второму.

б) Неравенства неравносильны, так как $x=-1$ удовлетворяет только второму неравенству.

в) Неравенства неравносильны, так как $x=-1$ входит в множество решений второго неравенства, но не принадлежит множеству решений первого. ▲

Пример 3. Равносильны ли на множестве всех действительных чисел неравенства

$$\sqrt{x^3+x-2}>x \quad \text{и} \quad x^3+x-2>x^2?$$

△ Если $x^3+x-2\leqslant 0$, то решений нет ни у первого неравенства, ни у второго. Если $x^3+x-2>0$, то и $x>0$, и согласно утверждению 5 неравенства равносильны. Следовательно, данные неравенства равносильны на всем множестве действительных чисел. ▲

§ 2. Рациональные неравенства. Метод интервалов

В главе I в качестве простейших числовых функций рассматривались многочлены

$$y=P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

и функции, представимые в виде отношения двух многочленов

$$y=R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

т. е. рациональные функции.

Число a называется *нулем* функции $y=P_n(x)$ или *корнем* многочлена $P_n(x)$, если $P_n(a)=0$.

Например, многочлен $P_2(x)=6-5x+x^2$ имеет два нуля $x=2$ и $x=3$, так как $P_2(2)=0$ и $P_2(3)=0$. Многочлен может вообще не иметь нулей: например, $P_0(x)=1$ или $P_2(x)=1+x^2$. Известно, что число нулей многочлена не превышает его степени (гл. VIII, § 7).

Нули многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ будем называть *критическими значениями* переменной или *критическими точками* рациональной функции

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Например, для функции

$$y=\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+3x+2}=\frac{(x^2-1)(x-6)}{(x+1)(x+2)}$$

критическими значениями переменной являются

$$x=-2,\quad x=-1,\quad x=1,\quad x=6.$$

Рациональным неравенством называется неравенство, которое содержит только рациональные функции.

Рациональные неравенства часто удается решить так называемым методом интервалов. Этот метод основан на одном важном свойстве рациональной функции, которое мы примем без доказательства, а именно: *в интервале между двумя своими соседними критическими точками рациональная функция сохраняет знак.*

Метод интервалов состоит в следующем. Рациональное неравенство приводят к стандартному виду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0 \text{ или } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0 \text{ (в случае строгого неравенства),}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geqslant 0 \text{ или } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leqslant 0 \text{ (в случае нестрогого неравенства).}$$

Затем находят все критические точки рациональной функции. Эти точки отмечают на числовой оси. Вся числовая ось разбивается критическими точками на конечное число интервалов, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет знак. Чтобы определить знак левой части на всем интервале, достаточно определить знак $P_n(x)/Q_m(x)$ в одной какой-либо точке этого интервала и тем самым установить, входит ли этот интервал в множество решений данного неравенства.

Что касается самих критических точек, то в случае строгого неравенства $P_n(x)/Q_m(x)>0$ они, очевидно, не входят в множество решений; в случае нестрогого неравенства $P_n(x)/Q_m(x)\geqslant 0$ нули многочлена $P_n(x)$ входят в множество решений, если только они не являются нулями и многочлена $Q_m(x)$.

Не следует думать, что методом интервалов можно решить любое рациональное неравенство. Метод интервалов применим только тогда, когда известны (или могут быть найдены) нули многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. критические значения переменной для рациональной функции $P_n(x)/Q_m(x)$. К сожалению, задача отыскания нулей многочлена далеко не всегда может быть решена (см. гл. VIII, § 7).

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0.$$

△ Нули многочлена, стоящего в знаменателе: $x=-1$ и $x=-2$. Нули многочлена, стоящего в числителе, легко находятся.

В самом деле,

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1)(x+1).$$

Неравенство можно записать теперь следующим образом:

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} > 0.$$

Критические точки рациональной функции суть

$$x = -2, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

Числовая ось разбирается этими точками на 5 интервалов. Отмечаем точки на числовой оси (рис. 32). Для определения знака функции на каждом интервале можно действовать следующим образом. Замечаем, что при $x > 3$ все линейные множители числителя и знаменателя рациональной функции положительны и, следовательно, на интервале $]3; +\infty[$ функция принимает только положительные значения. На рис. 32 над интервалом $]3; +\infty[$ ставим знак «плюс».

При переходе через точку $x = 3$ от интервала $]3; +\infty[$ к интервалу $]1; 3[$ лишь один из линейных множителей, а именно $x - 3$, изменяет знак и, следовательно, функция становится отрицательной. На рис. 32 под интервалом $]1; 3[$ ставим знак «минус».

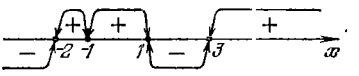


Рис. 32.

Затем, переходя к следующему интервалу $]-1; 1[$, устанавливаем, что знак изменяется только у множителя $x - 1$. Это означает, что при переходе через точку $x = 1$ левая часть неравенства изменяет знак. При переходе через точку $x = -1$ знак функции, очевидно, сохраняется, так как множитель $x + 1$ присутствует и в числителе и в знаменателе рациональной функции. Наконец, переход к последнему интервалу $]-\infty; -2[$ опять сопровождается изменением знака функции. Чередование знаков фиксируем на рисунке.

Поскольку неравенство строгое, сами критические точки не являются решениями. (Стрелки на рис. 32 как раз и указывают на это.)

Ответ: $]-2; -1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$. ▲

В процессе решения данного неравенства может возникнуть соблазн заменить его с самого начала более простым неравенством

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)} > 0.$$

Такое упрощение (сделанное без всяких оговорок) приведет к ошибке. Полученное неравенство неравносильно исходному, так как в его множество решений входит $x = -1$, а это значение переменной не является решением данного неравенства.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x} \geqslant 0.$$

△ Критические точки рациональной функции:

$$x=-3, \quad x=0, \quad x=4.$$

Числовая ось разбивается на 4 интервала (рис. 33), на каждом из которых легко определяется знак функции. При определении знака нужно следить только за изменением знака линейных множителей знаменателя, так как квадратичные множители числителя $(x+3)^2$ и x^2+x+1 положительны на всех четырех интервалах. Из трех критических точек только $x=-3$ входит в множество решений неравенства.

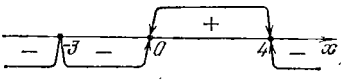


Рис. 33.

Ответ: $\{-3\} \cup]0;\ 4[$. ▲

Пример 3. Найти область определения функции

$$\sqrt{\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x-1}{x^3+1}}.$$

Для нахождения области определения данной функции нужно решить неравенство

$$\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x-1}{x^3+1} \geqslant 0.$$

Приводим его к стандартному виду:

$$\frac{2(x+1)-x^2+x-1-2x+1}{x^3+1} \geqslant 0, \quad \frac{-x^2+x+2}{x^3+1} \geqslant 0.$$

Находим критические точки $x=-1$ и $x=2$ и записываем неравенство следующим образом:

$$\frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \geqslant 0.$$

Так как $x^2-x+1>0$ для всех значений переменной, переходим к равносильному неравенству

$$\frac{-(x+1)(x-2)}{x+1} \geqslant 0.$$

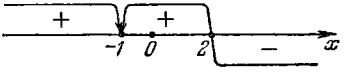


Рис. 34.

Критические точки разбивают числовую ось на три интервала (рис. 34). Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Исследуем сами критические точки: точка $x=2$ является нулем числителя и, так как неравенство нестрогое, входит в множество решений. Точка $x=-1$, хотя и

является нулем числителя, не принадлежит множеству решений из-за того, что обращает в нуль знаменатель.

Ответ: $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 2]$. ▲

§ 3. Иррациональные неравенства

Перейдем к рассмотрению неравенств, содержащих переменную под знаком корня (радикала). Обычный способ решения таких неравенств заключается в сведении их к рациональным неравенствам. Освободиться от радикалов иногда удается путем возведения обеих частей неравенства в степень. К сожалению, эта операция часто приводит к неравенству, неравносильному исходному. Поэтому при решении иррациональных неравенств рекомендуется проявлять максимальную осторожность. Прежде всего следует ограничиться рассмотрением только тех значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл. Рассмотрим типичный пример.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 2-x.$$

Нередко учащиеся приводят такое рассуждение: «при решении иррациональных уравнений и неравенств необходимо прежде всего избавиться от корня, поэтому возведем в квадрат обе части неравенства, т. е. напишем

$$x^2-4x+3\geqslant 4-4x+x^2,$$

но отсюда следует, что $3\geqslant 4$ что неверно; значит предложенное неравенство решений не имеет».

Зададимся вопросом, насколько правдоподобен полученный результат?

В данном случае достаточно внимательно посмотреть на неравенство, чтобы увидеть, что полученный результат не только неправдоподобен, но просто неверен. При $x=5$, например, левая часть неравенства положительна, тогда как правая отрицательна. Таким образом, неравенство имеет решения и, следовательно, приведенное рассуждение порочно.

Дадим правильное решение примера 1.

△ Очевидно, следует рассмотреть только те значения x, при которых $x^2-4x+3\geqslant 0$. Нули многочлена x^2-4x+3 суть $x_1=1$, $x_2=3$. Следовательно, множество решений неравенства $x^2-4x+3\geqslant 0$ таково: $]-\infty;\ 1]\cup[3;\ +\infty[$. Ясно, что на интервале $]1;\ 3[$ нет решений, так как левая часть неравенства при любом x из этого интервала не имеет смысла.

Заметим далее, что $\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 0$ (радикал понимается в арифметическом смысле), и так как при любом $x\geqslant 3$ правая часть неравенства меньше нуля, то все $x\geqslant 3$ являются решениями.

Если же $x \leqslant 1$, то $2-x>0$ и, возведя обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$x^2-4x+3 \geqslant 4-4x+x^2,$$

которое не имеет решений, так как неравенство $3 \geqslant 4$ ложно.

Ответ: $[3; +\infty[$. ▲

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}.$$

△ Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда $|x| \leqslant 1/2$ и $x \neq 0$.

Если $-1/2 \leqslant x < 0$, то левая часть неравенства отрицательна и, следовательно, решений на этом интервале нет.

Пусть $0 < x \leqslant 1/2$, тогда, после очевидных преобразований получим

$$\sqrt{1-4x^2} < 1-\frac{3}{2}x.$$

Обе части неравенства неотрицательны, поэтому, возводя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$1-4x^2 < 1-3x+\frac{9}{4}x^2.$$

Последовательно упрощая это неравенство, получим

$$\frac{25}{4}x^2-3x>0, \quad \frac{25}{4}x-3>0, \quad x>\frac{12}{25}.$$

Учитывая ограничение $0 < x \leqslant 1/2$, приходим к окончательному результату $12/25 < x \leqslant 1/2$.

Ответ: $]12/25; 1/2]$. ▲

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5} \geqslant \sqrt{5-2x}.$$

△ Обе части неравенства имеют смысл для тех и только тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ 2x-5 \geqslant 0, \\ 5-2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система имеет одно решение $x=5/2$. Подстановкой в неравенство убеждаемся, что $x=5/2$ является решением.

Ответ: $\{5/2\}$. ▲

§ 4. Неравенства с модулем

В школьном курсе математики часто встречаются неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (под знаком модуля).

Для решения таких неравенств рекомендуется разбить числовую ось на отдельные промежутки так, чтобы на каждом из них можно было записать неравенство, не используя знака абсолютной величины.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2-|5x+6|>0.$$

△ Всю числовую ось разобьем на два промежутка

$$]-\infty;\ -6/5[\text{ и } [-6/5;\ +\infty[.$$

На каждом из этих промежутков неравенство может быть записано без знака модуля.

Для промежутка $]-\infty;\ -6/5[$ верно равенство $|5x+6|=-5x-6$, и, следовательно, неравенство принимает вид

$$x^2+5x+6>0 \quad \text{или} \quad (x+3)(x+2)>0,$$

откуда $x\in]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ +\infty[$. Учитывая, что переменная принадлежит промежутку $]-\infty;\ -6/5[$, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке:

$$]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ -6/5[.$$

На втором промежутке $[-6/5;\ +\infty[$ справедливо равенство $|5x+6|=5x+6$, и, следовательно, неравенство записывается так: $x^2-5x-6>0$, или $(x+1)(x-6)>0$, откуда $x\in]-\infty;\ -1[\cup]6;+\infty[$. Учитывая, что переменная принадлежит промежутку $[-6/5;\ -\infty[$, получаем множество решений неравенства на этом промежутке:

$$[-6/5;\ -1[\cup]6;\ +\infty[.$$

Ответ: $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ -1[\cup]6;\ +\infty[$. ▲

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2}\geq\frac{1}{2}.$$

△ Для $x\geq 1/2$ неравенство можно переписать без знака абсолютной величины:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2}\geq\frac{1}{2}.$$

Это рациональное неравенство. Приводим его к стандартному виду

$$\frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)}\geq 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем $x \in]-1; 0[\cup]2; 5[$. Ограничение $x \geqslant 1/2$ заставляет оставить лишь интервал $]2; 5[$. Если $x < 1/2$, то неравенство примет вид

$$\frac{-2x+1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2}.$$

Приводим неравенство к стандартному виду

$$\frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

Применяя метод интервалов, легко получаем, что $x \in$ $\in]-4; -1[\cup]1; 2[$. Ограничение $x < 1/2$ заставляет оставить только интервал $]-4; -1[$.

Ответ: $]-4; -1[\cup]2; 5[$. ▲

Пример 3. Решить неравенство

$$|x-1|+|x+1|<4.$$

△ На интервале $]-\infty; -1[$ по определению модуля имеем $|x-1| = -x+1$, $|x+1| = -x-1$, и, следовательно, на этом интервале неравенство равносильно линейному неравенству $-2x < 4$, которое справедливо при $x > -2$. Таким образом, в множество решений входит интервал $]-2; -1[$. На отрезке $[-1; 1]$ исходное неравенство равносильно верному числовому неравенству $2 < 4$. Поэтому все значения переменной, принадлежащие этому отрезку, входят в множество решений.

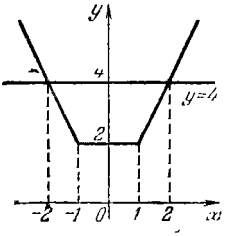


Рис. 35.

На интервале $]1; +\infty[$ опять получаем линейное неравенство $2x < 4$, справедливое при $x < 2$. Поэтому интервал $]1; 2[$ также входит в множество решений. Объединяя полученные результаты, делаем вывод: неравенству удовлетворяют все значения переменной из интервала $]-2; 2[$ и только они.

Тот же результат можно получить из наглядных и в то же время строгих геометрических соображений. На рис. 35 построены графики функций

$$y = f(x) = |x-1|+|x+1| \quad \text{и} \quad y = 4.$$

На интервале $]-2; 2[$ график функции $y = f(x)$ расположен под графиком функции $y = 4$, а это и означает, что неравенство $f(x) < 4$ справедливо.

Ответ: $]-2; 2[$. ▲

§ 5. Неравенства с параметрами

Решение неравенств с одним или несколькими параметрами представляет собой, как правило, задачу более сложную по сравнению с задачей, в которой параметры отсутствуют.

Например, неравенство

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a,$$

содержащее параметр a, естественно, требует для своего решения гораздо больших усилий, чем неравенство

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1.$$

Что значит решить первое из этих неравенств? Это, по существу, означает решить не одно неравенство, а целый класс, целое множество неравенств, которые получаются, если придавать параметру a конкретные числовые значения. Второе же из выписанных неравенств является частным случаем первого, так как получается из него при значении $a=1$.

Таким образом, решить неравенство, содержащее параметры, это значит определить, при каких значениях параметров неравенство имеет решения и для *всех* таких значений параметров найти *все* решения.

Подчеркнем еще раз: неравенство с параметрами должно быть рассмотрено при *всех* значениях параметров. Если *хотя бы одно* значение какого-либо параметра не исследовано, решение задачи не может быть признано полным.

Пример 1. Решить линейное неравенство

$$x-2\frac{a-1}{a}\leqslant\frac{2}{3a}(x+1).$$

△ Заметим сразу, что при $a=0$ неравенство решений не имеет, так как обе части неравенства теряют смысл.

Затем преобразуем неравенство следующим образом:

$$\left(1-\frac{2}{3a}\right)x\leqslant\frac{2}{3a}+2-\frac{2}{a},\quad x\left(1-\frac{2}{3a}\right)\leqslant 2\left(1-\frac{2}{3a}\right).$$

Если $1-\frac{2}{3a}>0$, то $x\leqslant 2$. Решая неравенство

$$1-\frac{2}{3a}>0,$$

получаем $a<0$ или $a>2/3$. Таким образом, если $a<0$ или $a>2/3$, то $x\leqslant 2$.

Если

$$1-\frac{2}{3a}<0,$$

т. е. $0<a<2/3$, то $x\geqslant 2$. И, наконец, если $a=2/3$, то x — любое число.

Ответ: Если $a<0$, то $x\in\,]-\infty;\ 2]$,
если $a=0$, то решений нет,
если $0<a<2/3$, то $x\in[2;+\infty[$,
если $a=2/3$, то $x\in\,]+\infty;\ +\infty[$,
если $a>2/3$, то $x\in\,]-\infty;\ 2]$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $|x-a|+|x+a|<b$, $a\neq 0$.

△ Частный случай этого неравенства $a=1$, $b=4$ был рассмотрен в примере 3 § 4. Для решения данного неравенства с двумя параметрами a и b воспользуемся геометрическими соображениями. На рис. 36 построены графики функций

$$y=f(x)=|x-a|+|x+a| \quad \text{и} \quad y=b.$$

Очевидно, что при $b\leqslant 2|a|$ прямая $y=b$ проходит не выше горизонтального отрезка кривой $y=|x-a|+|x+a|$ и, следовательно, неравенство в этом случае не имеет решений (рис. 36, *а*).

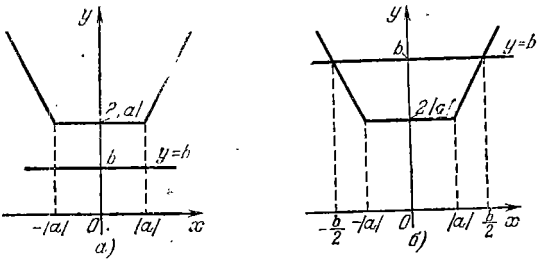


Рис. 36.

Если же $b>2|a|$, то прямая $y=b$ пересекает график функции $y=f(x)$ в двух точках $(-b/2;\ b)$ и $(b/2;\ b)$ (рис. 36, *б*) и неравенство в этом случае справедливо при $-b/2<x<b/2$, так как при этих значениях переменной кривая $y=|x+a|+|x-a|$ расположена под прямой $y=b$.

Ответ: Если $b\leqslant 2|a|$, то решений нет,
если $b>2|a|$, то $x\in\,]-b/2;\ b/2[$. ▲

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a.$$

Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда x и a удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a+x\geqslant 0, \\ a-x\geqslant 0. \end{cases}$$

При $a<0$ эта система, очевидно, не имеет решений. Если $a=0$, то система имеет единственное решение $x=0$. Но при $a=0$ значение переменной $x=0$ не удовлетворяет неравенству. Если $a>0$, то решениями системы будут все значения переменной x, принадлежащие отрезку $[-a;\ a]$. При условиях $a>0$ и $|x|\leqslant a$ исходное неравенство можно, не нарушая равносильности, почленно возвести в квадрат и получить

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2,$$

откуда

$$2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a.$$

Теперь придется рассмотреть три случая:

1°. Если $a^2-2a<0$, т. е. $0<a<2$, то, так как левая часть неравенства при $|x|\leqslant a$ неотрицательна, а правая — отрицательна, неравенство справедливо при всех $|x|\leqslant a$.

2°. Если $a^2-2a=0$, т. е. $a=2$, то неравенство имеет вид $2\sqrt{4-x^2}>0$ и удовлетворяется при $|x|<2$.

3°. Если $a^2-2a>0$, т. е. $a>2$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, приходим к равносильному неравенству

$$4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2,$$

упрощая которое, получаем

$$-4x^2>a^3(a-4), \quad \text{т. е.} \quad x^2<\frac{a^3(4-a)}{4}.$$

Теперь видно, что при $a\geqslant 4$ решений нет. В случае, когда $2<a<4$, решениями последнего неравенства будут все значения x, для которых

$$|x|<\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}.$$

Будут ли все эти значения x давать решение исходного неравенства? Это зависит от того, будут ли значения выражения $\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ при $a\in\,]2;\,4[$ превосходить a или не будут. Напомним, что мы рассматриваем лишь те значения переменной x, для которых $|x|\leqslant a$. Докажем, что они не будут превосходить a, т. е. что

$$\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant a \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant 1.$$

Возводя в квадрат обе части неравенства, получаем

$$\frac{a(4-a)}{4}\leqslant 1 \quad \text{или} \quad 4a-a^2\leqslant 4,$$

т. е. $a^2-4a+4\geqslant 0$ и, следовательно, приходим к верному неравенству $(a-2)^2\geqslant 0$. Проведя рассуждения в обратном порядке, убедимся в справедливости неравенства

$$\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant a.$$

Ответ: Если $a\leqslant 0$, то решений нет;
если $0<a<2$, то $x\in[-a;\,a]$;
если $a=2$, то $x\in\,]-2;\,2[$;
если $2<a<4$, то $x\in\left]-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2};\,\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right[$;
если $a\geqslant 4$, то решений нет. ▲

Помимо задач рассмотренного типа, в которых требуется решить неравенство при всех значениях параметра, встречаются

задачи, где нужно из всех значений параметра выделить те, при которых неравенство будет обладать некоторыми задаваемыми свойствами; например, будет удовлетворяться при любом значении переменной, или вообще не будет иметь решений, или будет иметь только одно положительное решение и т. д. Рассмотрим задачу такого типа.

Пример 4. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2} \leqslant 3$$

верно при всех значениях переменной?

△ Так как $1-x+x^2>0$ при всех x, то данное неравенство равносильно квадратичному неравенству

$$2-ax-x^2 \leqslant 3-3x+3x^2 \quad \text{или} \quad 4x^2+(a-3)x+1 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо при всех значениях переменной при условии $(a-3)^2-16 \leqslant 0$, т. е. $|a-3| \leqslant 4$, откуда $-4 \leqslant a-3 \leqslant 4$ и, следовательно, $-1 \leqslant a \leqslant 7$.

Ответ: $a \in [-1; 7]$. ▲

§ 6. Доказательство неравенств

В предыдущих параграфах рассматривались задачи, в которых нужно было решить неравенство, т. е. найти множество его решений. Часто встречается другая постановка задач, связанных с неравенствами. Помимо неравенства задается некоторое множество значений переменной и требуется доказать, что все его элементы принадлежат множеству решений данного неравенства. Такие задачи принято называть задачами на доказательство неравенств.

Если в задаче на доказательство неравенства множество значений переменной не оговаривается — это означает, что справедливость неравенства требуется установить для всех действительных значений переменной.

Для решения подобных задач используются самые разнообразные приемы и методы. В тех случаях, когда переменная или параметр, входящие в неравенство, принадлежат множеству натуральных чисел, часто с успехом может быть применен метод математической индукции, о котором рассказывалось во второй главе.

Рассмотрим некоторые другие способы доказательства неравенств. Иногда неравенство удается доказать путем сведения его с помощью равносильных преобразований к очевидному неравенству.

Пример 1. Доказать справедливость неравенства

$$10x^3-9x^2+9x+\frac{1}{10}>0$$

для всех положительных значений переменной.

△ Преобразуем неравенство следующим образом:

$$x(10x^2-9x+9)+\frac{1}{10}>0,$$

$$x\left(\left(\sqrt{10}\,x-\frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2+9-\frac{81}{40}\right)+\frac{1}{10}>0,$$

$$x\left(\left(\sqrt{10}\,x-\frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2+\frac{279}{40}\right)+\frac{1}{10}>0.$$

Справедливость полученного неравенства при всех $x>0$ очевидна. Но последнее неравенство равносильно исходному, которое тем самым доказано. ▲

Пример 2. Доказать неравенство

$$x^2+y^2-xy-x-y+1\geqslant 0.$$

△ Преобразуя неравенство

$$2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2\geqslant 0,$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1\geqslant 0,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geqslant 0,$$

приходим к очевидному неравенству. Проведенные преобразования не нарушают равносильности неравенств, поэтому данное неравенство верно при любых значениях переменных x и y. ▲

В следующем примере сведение к очевидному неравенству не удается провести сразу для всех значений переменной. Однако для каждого из трех промежутков, на которые предварительно разбивается вся числовая ось, справедливость неравенства устанавливается элементарно.

Пример 3. Доказать неравенство

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

△ На промежутке $]-\infty;\ 0]$ неравенство верно, так как первые четыре слагаемые левой части неотрицательны. На интервале $]0;\ 1[$ справедливость неравенства становится очевидной после следующей группировки слагаемых:

$$x^8+x^2(1-x^3)+(1-x)>0.$$

Если, наконец, $x\in]1;\ +\infty[$, то, переписав неравенство в таком виде

$$x^5(x^3-1)+x(x-1)+1>0,$$

убеждаемся в его истинности.

Неравенство доказано для всех действительных значений переменной. ▲

Следующие два примера иллюстрируют применение метода оценок при доказательстве неравенств.

Пример 4. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

△ Левая часть неравенства содержит n слагаемых, каждое из которых не меньше последнего слагаемого. Поэтому левая часть неравенства оценивается снизу следующим образом:

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n},\qquad n\in\mathbb{N},\quad n>1.$$

△ Каждое слагаемое левой части неравенства допускает следующую оценку сверху:

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

и, следовательно, левая часть неравенства оценивается таким образом:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=$$
$$=1-\frac{1}{n},$$

а именно это и требовалось доказать. ▲

Рассмотрим еще один распространенный способ доказательства неравенств. Он заключается в использовании некоторых известных неравенств. В главе второй было доказано замечательное неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\quad x_i>0\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

причем было подчеркнуто, что неравенство является строгим тогда и только тогда, когда не все x_i равны между собой. Это неравенство, которое обычно связывают с именем великого французского математика XIX века О. Коши, бывает очень полезно при доказательстве многих неравенств.

Пример 6. Доказать неравенство

$$x^4+y^4+z^4+t^4\geqslant 4xyzt.$$

△ Положим в неравенстве Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$x_1=x^4,\quad x_2=y^4,\quad x_3=z^4,\quad x_4=t^4\ \text{ и }\ n=4.$$

Тогда получим

$$\frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{4} \geqslant \sqrt[4]{x^4y^4z^4t^4} = |xyzt| \geqslant xyzt,$$

что и требовалось доказать. ▲

Пример 7. Доказать, что последовательность

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

монотонно возрастает, т. е. доказать справедливость неравенства

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n.$$

△ Рассмотрим $n+1$ положительных чисел

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1+\frac{1}{n}, \quad x_3 = 1+\frac{1}{n}, \ \ldots, \ x_{n+1} = 1+\frac{1}{n},$$

и применим к ним неравенство Коши.

Получим

$$\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

т. е.

$$1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \ ▲$$

Пример 8. Доказать, что сопротивление последовательного соединения n проводников превышает сопротивление параллельного соединения тех же проводников не менее, чем в n^2 раз.

△ Обозначим сопротивление данных проводников через r_1, r_2, ..., r_n. Пусть R — сопротивление последовательного их соединения, R_1 — сопротивление параллельного их соединения. Тогда

$$R = r_1+r_2+\ldots+r_n; \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}$$

и, следовательно,

$$\frac{R}{R_1} = (r_1+r_2+\ldots+r_n)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}\right),$$

но по теореме о среднем арифметическом можем записать

$$r_1+r_2+\ldots+r_n \geqslant n\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n},$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\ldots\frac{1}{r_n}},$$

откуда получаем $\frac{R}{R_1} \geqslant n^2$, что и требовалось доказать. ▲

§ 7. Приложение неравенств к задачам на наибольшие и наименьшие значения

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций чрезвычайно важны для математики, физики и для других наук. В математике разработан мощный аппарат (дифференциальное исчисление) для решения подобных задач. Применение дифференциального исчисления для нахождения наибольших и наименьших значений функций рассматривается в VI главе, § 8. Тем не менее, иногда такого типа задачи элементарными средствами удается решить быстрее, проще и изящнее. Неравенства, рассмотренные в § 6, оказываются здесь очень полезными.

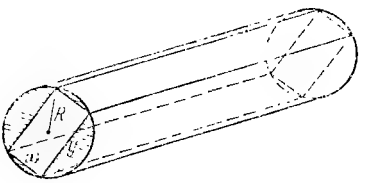


Рис. 37.

Из неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом вытекают два важных утверждения.

1. Если сумма произвольных положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n равна s, то их произведение $P=x_1x_2\ldots x_n$ достигает *наибольшего* значения, равного $(s/n)^n$, при равенстве всех чисел.

2. Если произведение произвольных положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n равно P, то их сумма $s=x_1+\ldots+x_n$ принимает *наименьшее* значение, равное $n\sqrt[n]{P}$, при равенстве всех чисел.

Пример 1. Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку так, чтобы количество отходов было наименьшим (рис. 37).

△ Количество отходов определяется площадью заштрихованной части в сечении бревна, поэтому задачу можно свести к следующей: в круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади. Если x и y — стороны прямоугольника, S — площадь прямоугольника, то $S=xy$. Если прямоугольник вписан в круг, то $x^2+y^2=4R^2$. Следовательно, $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$. Заметим, что S будет достигать наибольшего значения тогда, когда будет наибольшим $S^2=x^2(4R^2-x^2)$.

Но сумма множителей x^2 и $4R^2-x^2$ постоянна и равна $4R^2$, следовательно, наибольшее значение их произведения равно $(4R^2/2)^2$, а наибольшее значение S равно $2R^2$, причем оно достигается, если $x^2=4R^2-x^2$, т. е. при $x=\sqrt{2}R$, но тогда $y=\sqrt{2}R$. Количество отходов будет наименьшим, если в сечении балки будет квадрат. ▲

Пример 2. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=x+\frac{a}{x},\ a>0,\ \text{на интервале }]0;\ +\infty[.$$

△ Положим $x_1 = x$, $x_2 = a/x$. Произведение $x_1 x_2 = a$, т. е. постоянно, следовательно, сумма $x_1 + x_2$ принимает наименьшее значение, равное $2\sqrt{a}$, при $x = \sqrt{a}$.

Отметим, что отсюда следует полезное неравенство

$$\left| x + \frac{a}{x} \right| \geqslant 2\sqrt{a}, \quad a > 0,$$

причем равенство достигается при $x = \sqrt{a}$. ▲

Пример 3. Найти наименьшее значение рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 4}{x}$$

на интервале $]0; +\infty[$.

△ Представим $f(x)$ в виде суммы шести слагаемых

$$f(x) = x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x},$$

произведение которых равно единице. Сумма таких слагаемых достигает наименьшего значения при равенстве всех слагаемых, т. е. при условии $x^3 = x = 1/x$, откуда следует, что $x = 1$. Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ на интервале $]0, +\infty[$ равно 6. ▲

В заключение следует сказать, что среди задач на наибольшие и наименьшие значения функций, которые могут быть решены элементарными средствами, т. е. без привлечения производной, учащимся чаще всего предлагаются задачи, при решении которых используется следующее экстремальное свойство квадратичной функции. Из тождества

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \quad a \neq 0,$$

видно, что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет наименьшее (если $a > 0$) или наибольшее (если $a < 0$) значение, равное $c - b^2/4a$, при $x = -b/2a$.

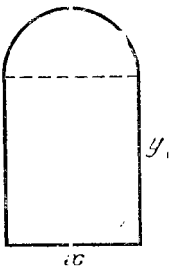


Рис. 38.

Пример 4. Окно имеет форму прямоугольника, дополненного полукругом (рис. 38). Периметр окна равен P. При каком отношении сторон прямоугольника окно будет пропускать больше света?

△ Обозначим длины сторон прямоугольника x и y; тогда площадь окна $S = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$, но x и y связаны соотношением

$$x + 2y + \pi\frac{x}{2} = P.$$

Следовательно,

$$S = x\left(\frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\frac{x^2}{8}$$

или

$$S = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 + \frac{P}{2}x.$$

Функция S достигает наибольшего значения при $x=\frac{P/2}{1+\frac{\pi}{4}}=$ $=\frac{2P}{4+\pi}$. Нетрудно подсчитать, что $y=\frac{P}{4+\pi}$.

Таким образом, высота прямоугольной части окна должна быть в два раза меньше ширины. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Равносильны ли неравенства $\frac{x}{3-x}>\frac{x-7}{2}$ и $2x>(x-7)(3-x)$ на отрезке $[4; 8]$?

Исследовать на равносильность неравенства (2—4) на множестве всех действительных чисел:

2. $x-1\leqslant\sqrt{x}$ и $(x-1)^2\leqslant x$.

3. $x+1\leqslant\sqrt{x}$ и $(x+1)^2\leqslant x$.

4. $\sqrt{x^3+x-2}<x$ и $x^4+x-2<x^2$.

Решить неравенства (5—6):

5. $x>\frac{15}{x+2}$. **6.** $\frac{(2-x^3)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geqslant 0$.

7. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+4}{2x+5}}.$$

Решить неравенства (8—12):

8. $\sqrt{x^2-40x+39}\leqslant x-1$.

9. $\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-13}>\sqrt{13-2x}$.

10. $\sqrt{45x^2-30x+1}<7+6x-9x^2$.

11. $\left|x-\frac{4}{x}-2\right|\geqslant 1$. **12.** $\frac{2a+1}{ax-3x-2a+6}\geqslant\frac{x}{x-2}$.

13. Доказать неравенство

$$x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)\geqslant 6\sqrt{xyz}$$

для всех неотрицательных значений переменных x, y, z.

14. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

15. Доказать неравенство

$$2^n-1\geqslant n2^{(n-1)/2}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

16. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} ax-1 \leqslant 0, \\ x-4a \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

17. При каких значениях a все нули функции

$$f(x)=(a-2)\,x^2+2ax+a+3$$

лежат на интервале $]-2;\ 1[$?

18. Определить, при каких значениях переменной многочлен

$$P_4(x)=x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)$$

принимает наименьшее значение. Чему оно равно?

19. Спортплощадку площадью 0,9 гектара, имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада — проволочным. Установка 1 метра деревянного забора обходится в 5 рублей, проволочного — в 2 рубля. На строительство выделено 1200 рублей. Достаточно ли этой суммы?

20. Через пункт B проходят две прямолинейные дороги, одна в пункт A, другая в пункт C, причем $\widehat{ABC}=120^\circ$. Из A в B и из B в C одновременно выезжают два автомобиля. Найти отношение их скоростей, если известно, что наименьшее расстояние между автомобилями было в тот момент, когда автомобиль, вышедший из пункта A, прошел седьмую часть своего пути.

21. Из квадратного листа жести со стороной a, отрезая по углам конгруэнтные квадраты и загибая края, составляют прямоугольную открытую коробку. Чему должна быть равна сторона выбрасываемых квадратов, чтобы получилась коробка наибольшей вместимости?

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

Исследовать на равносильность на множестве всех действительных чисел неравенства (1—5):

1. $(x+7)\,(2x+1)>(x+7)^2$ и $2x+1>x+7$.

2. $x^2+x+\sqrt{x}<2+\sqrt{x}$ и $x^2+x<2$.

3. $\sqrt{x-7}\geqslant x$ и $x-7\geqslant x^2$.

4. $1-\sqrt{2x^2}>0$ и $1-\sqrt{2}\,x>0$.

5. $\sqrt{x-1}\geqslant x$ и $x\geqslant x^2+5$.

Решить неравенства (6—18):

6. $(3x^2-13x+4)\,(4x^2+12x+9)<0$.

7. $(2x-5)\,(x^2-4)\,(x^2+8)\leqslant 0$.

8. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-10x+20}<0$. **9.** $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}<\dfrac{1}{x-3}$.

10. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\geqslant\dfrac{x+1}{x}$. **11.** $\dfrac{(x^2+3x-4)\,(x^2-16)}{x\,(x+1)}<0$.

12. $\frac{8+4x}{4x+x^2} \leqslant \frac{2}{x} + \frac{3}{4+x}$. 13. $\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1} < \frac{3}{(x-2)^2}$.

14. $\frac{x+2}{x^3-x^2} < \frac{2x+1}{x^3+3x^2}$. 15. $\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{(x+2)^2} \geqslant \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$.

16. $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \geqslant \frac{2x-1}{x^3+1}$. 17. $\frac{2}{2-x} + \frac{3}{2+x} \geqslant \frac{4x}{4-x^2}$.

18. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{2}{x^2} + \frac{2}{(x+1)^2}$.

Найти область определения функций (19—20):

19. $f(x) = \sqrt{\frac{3-3x}{15-2x-x^2}} - 1$. 20. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x - \frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2}}}$.

Решить неравенства (21—40):

21. $\sqrt{2x+5} > x+1$. 22. $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.

23. $\sqrt{x^2-x-12} > x-1$. 24. $\sqrt{x^2-3x-4} > x-2$.

25. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$. 26. $\sqrt{x^2-x-2} > 2x+3$.

27. $\frac{x^2-3|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 1$. 28. $\sqrt{(x(x+3))^2} \geqslant 2-x^2$.

29. $20\sqrt{(x^2-x)^2} < 1$. 30. $\sqrt{\left(\frac{x+1}{3-2x}\right)^2} > 1$.

31. $\frac{2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \leqslant 3$. 32. $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$.

33. $\frac{1-3\sqrt{16-x^2}}{x} \leqslant 1$. 34. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-4}$.

35. $\sqrt{2-x} \leqslant \sqrt{x+17} + \sqrt{2x-4}$. 36. $||x|-1| \geqslant \sqrt{x^2-1}$.

37. $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$. 38. $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$.

39. $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

Указание: сделать замену переменной $3x^2+5x+\frac{9}{2} = t$.

40. $\sqrt{x^2+233} + \sqrt{x^2-49} - \sqrt{128-x} \leqslant \frac{56}{x} + 5$.

Решить неравенства с параметрами (41—46):

41. $\frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6}$.

42. $\frac{ax+1}{3} - \frac{x-4a}{2} \geqslant \frac{a^2}{6}$. 43. $\frac{2a+1}{(a-3)(x-2)} \geqslant \frac{x}{x-2}$.

44. $ax > 1/x$. 45. $x + \sqrt{a-x} > 0$, $a \geqslant 0$.

46. $|x-a| + |x| + |x+a| \leqslant b$.

Указание: полезно построить графики функций

$$f(x) = |x-a| + |x| + |x+a| \text{ и } g(x) = b.$$

47. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{ax^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5$$

удовлетворяется при всех значениях переменной?

48. При каких значениях параметра a неравенство

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

удовлетворяется при всех значениях переменной?

49. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{x^2+3x+a}{x^2+x+1}<2$$

справедливо при всех значениях переменной кроме одного?

50. При каких значениях параметра a неравенство

$$ax^2+4x>1-3a$$

справедливо при всех положительных значениях переменной?

51. При каких значениях a корни уравнения

$$(a-3)x^2-2ax+6a=0$$

положительны?

52. При каких значениях a один из корней уравнения

$$(2a+1)x^2-ax+a-2=0$$

больше единицы, а другой меньше единицы?

Доказать неравенства (53—55):

53. $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}>2$. **54.** $(x+y+z)^3\geqslant 27xyz$.

55. $(x^3+x^2+x+1)^2\geqslant 16x^3$; $x\in[0;\ +\infty[$.

56. Доказать неравенство

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geqslant x+y+z$$

для всех положительных значений переменных x, y, z.

57. Доказать неравенство

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 12$$

для всех значений переменных, удовлетворяющих условию $x+y+z=6$.

58. Доказать неравенство

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\leqslant\frac{n^2x+nx+2n}{4\sqrt{x}}$$

для всех натуральных значений n и всех положительных значений x.

59. Найти наибольшее и наименьшее значения суммы $2x^2+3y^2$ при условиях $x+y=2$, $x>0$, $y>0$.

60. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, сумма трех сторон которого равна ста метрам?

61. Плоская фигура состоит из прямоугольника и равностороннего треугольника, построенного на стороне прямоугольника. Как велика может быть площадь такой фигуры при заданном периметре?

62. У продавца испортились весы (плечи весов оказались неравными). Продавец отпустил покупателю два веса: первый раз на одну чашку весов положил килограммовую гирю, а на вторую — товар, во второй раз поменял гирю и товар местами. Сколько получил покупатель: два килограмма, больше двух килограммов или меньше двух килограммов товара?

63. Водоем имеет форму правильного треугольника. Между расположенными на берегу пунктами A и B ходит паром. Велосипедист, которому нужно попасть из A в B, может воспользоваться паромом или может ехать по берегу. При каком наименьшем отношении скорости велосипедиста к скорости парома при любом расположении пунктов A и B переправа на пароме не дает выигрыша во времени?

64. Две дороги пересекаются под прямым углом. По направлению к перекрестку движутся две автомашины: по первой дороге — со скоростью 60 км/ч, по второй — со скоростью 80 км/ч. В 12 часов обе машины находились в 10 км от перекрестка.

В какой момент расстояние между машинами будет наименьшим? Где будут находиться машины в этот момент?

65. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый первую половину времени шел со скоростью v_1, а вторую половину со скоростью v_2; второй турист первую половину пути шел со скоростью v_1, а вторую половину — со скоростью v_2. Кто из них затратил меньше времени на прохождение пути из A в B?

66. Расстояние между пунктами A и B равно 100 км. Из A в B одновременно отправляются два велосипедиста. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго. В пути первый велосипедист делает остановку на 50 минут, но в пункт B прибывает первым. В каких пределах заключена скорость первого велосипедиста?

67. Лодка плывет по реке из пункта A в пункт B и обратно. Расстояние между пунктами A и B равно a, скорость течения реки равна v. Какова должна быть скорость лодки, чтобы время, затраченное на весь путь, было меньше t?

68. При каких значениях x рациональная функция $y=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ принимает наименьшее значение? Чему оно равно?

69. В турнире шахматистов II разряда 24 участника. Для выполнения нормы I разряда нужно набрать не менее $14^1/_2$ очков. Каково наибольшее число шахматистов, которые могут выполнить норму I разряда? (В шахматных турнирах выигравший получает одно очко; если партия заканчивается вничью, каждый из игравших получает $^1/_2$ очка.)

70. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа — 40 деталей, ящик третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки ящика первого типа 20 руб., ящика второго типа — 10 руб., ящика третьего типа — 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Глава V

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Бесконечные последовательности. Последовательности ограниченные и неограниченные

Бесконечной *числовой последовательностью* называется числовая функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Аргумент этой функции обычно обозначается n, а сама функция — буквой с индексом внизу: a_n, b_n, x_n и т. п. Таким образом, бесконечная последовательность задана, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное число a_n.

Бесконечная последовательность a_n, $n \in \mathbb{N}$, записывается в виде

$$a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$$

или кратко (a_n). Числа a_1, a_2, a_n называются *элементами* или *членами* последовательности, a_1 — первым членом, a_2 — вторым, a_n — n-м членом последовательности.

Рассмотрим примеры:

а) Каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $(n-1)/(n+1)$, тем самым определяется последовательность

$$0;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ \ldots;\ \frac{n-1}{n+1};\ \ldots$$

с n-м членом $a_n = (n-1)/(n+1)$.

б) Каждому натуральному числу n сопоставляется число, равное n-му десятичному знаку после запятой числа 8/33 в десятичной записи. Этот закон соответствия определяет последовательность, у которой $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$. Нетрудно показать, что n-й член этой последовательности можно записать в виде

$$a_n = 3 + (-1)^n.$$

Последовательности задаются различными способами. Например, указывается формула, связывающая значения n-го члена последовательности с его номером для любого натурального n (такова последовательность а)). Закон соответствия между номером члена и значением этого члена может быть задан словесно, как, например, в последовательности б). Используется также

рекуррентный способ: задаются несколько первых членов последовательности и формула, называемая *рекуррентным соотношением*, выражающая следующие члены последовательности через предыдущие, например, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$ при $n \geqslant 2$.

Пример 1. Доказать, что если $a_1 = 1$ и $a_n = 2a_{n-1} + 3$ при $n \geqslant 2$, то n-й член последовательности имеет вид

$$a_n = 2^{n+1} - 3. \tag{1}$$

△ Используем метод математической индукции. При $n = 1$ формула (1) верна. Предположим, что она верна при $n = k \geqslant 1$, т. е. $a_k = 2^{k+1} - 3$. Подставляя это выражение для k-го члена в рекуррентное соотношение $a_{k+1} = 2a_k + 3$, получим $a_{k+1} = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$. Но это и есть формула (1) для $n = k + 1$. Из принципа математической индукции следует, что формула (1) справедлива для любого натурального числа n. ▲

Важным частным случаем последовательностей являются арифметическая и геометрическая прогрессии. Они рассматриваются в §§ 4 и 5.

Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если существуют два числа a и b такие, что при всех n выполняются неравенства

$$a \leqslant a_n \leqslant b. \tag{2}$$

При этом говорят, что число a ограничивает последовательность снизу, а число b — сверху.

Последовательность $((n-1)/(n+1))$ ограничена, так как при всех n имеют место неравенства $0 \leqslant (n-1)/(n+1) \leqslant 1$.

Последовательность $((-1)^n)$ также ограничена, так как для любого натурального n справедливы неравенства $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Можно показать, что данному определению ограниченной последовательности равносильно следующее: последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если существует число M такое, что при всех n выполняется неравенство

$$|a_n| \leqslant M.$$

Не всякая последовательность является ограниченной.

Пример 2. Доказать, что последовательность (n) не является ограниченной.

△ Предположим противное, т. е. предположим, что последовательность (n) ограниченная. Это означает, что существует такое число M, что при всех n справедливо неравенство $|n| \leqslant M$. Однако, например, для натурального числа $n = [M] + 1$ (здесь $[M]$ — *целая часть* числа M) это неравенство не выполняется. Следовательно, предположение неверно, т. е. последовательность (n) не является ограниченной. ▲

Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной*. Сформулируем определение неограниченной последовательности, построив отрицание определения ограниченной последовательности: (a_n) — неограниченная последовательность, если для любого числа M найдется такой номер n, что $|a_n| > M$.

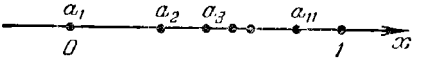


Рис. 39.

Если изображать члены последовательности точками координатной прямой, то все члены ограниченной последовательности лежат на некотором отрезке. Например, у последовательности $a_n = (n-1)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, все члены лежат на отрезке $[0; 1]$ (рис. 39).

Для неограниченной последовательности вне любого отрезка найдутся члены этой последовательности.

§ 2. Предел последовательности. Теоремы о сходящихся последовательностях

Число a называется *пределом* последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности (a_n), записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

△ Неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, выполняется при всех $n > 1/\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно взять, например, $N = [1/\varepsilon] + 1$. Если учесть, что $N > 1/\varepsilon$, то для любого $n > N$ будем иметь $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Это и означает, что $(-1)^n/n \to 0$ при $n \to \infty$. ▲

Заметим, что неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Это означает, что число a_n принадлежит интервалу $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$. Такой интервал называется *ε-окрестностью* точки a (рис. 40).

Определение предела можно перефразировать следующим образом, придав ему геометрическую наглядность: число a называется *пределом последовательности* (a_n), если в любую ε-окрестность числа a попадают все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа их. Действительно, если $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что все члены последовательности с номерами $n > N$ лежат в ε-окрестности числа a и, значит, вне этой окрестности могут находиться только первые N членов последовательности.

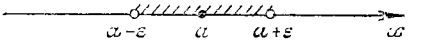


Рис. 40.

Например, для последовательности $((-1)^n/n)$ в ε-окрестность точки нуль при $\varepsilon = 1/10$ попадают все члены последовательности, кроме первых десяти, при $\varepsilon = 1/100$ — все члены последовательности, кроме первых ста, так как

$$-\frac{1}{10} < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{10} \quad \text{при} \quad n \geqslant 11,$$

$$-\frac{1}{100} < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{100} \quad \text{при} \quad n \geqslant 101.$$

Пример 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a > 0$. Доказать, что начиная с некоторого номера все члены последовательности (a_n) положительны.

Δ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, то для $\varepsilon = a/2 > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < a/2$. Перепишем это неравенство в виде $-a/2 < a_n - a < a/2$, тогда получим

$$a_n > a/2 > 0. \ \blacktriangle$$

Геометрический смысл доказанного утверждения вполне очевиден: если число a положительно, то существует его окрестность, не

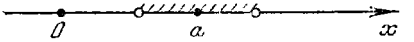


Рис. 41.

содержащая нуля, и в эту окрестность согласно определению попадают все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа (рис. 41).

Пример 3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geqslant 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

△ а) $a=0$. По определению предела для любого $\varepsilon>0$ по числу ε^2 найдется такое N, что при $n>N$ имеет место $|a_n|<\varepsilon^2$. Так как по условию $a_n\geqslant 0$, то $0\leqslant a_n<\varepsilon^2$. Но тогда при тех же $n>N$ выполняется неравенство $|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\varepsilon$.

б) $a>0$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что при $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon\sqrt{a}$. Тогда при тех же $n>N$ будет справедливо неравенство

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

В обоих случаях доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. ▲

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, если $|q|<1$.

△ При $q=0$ утверждение очевидно; если же $q\neq 0$, то $\frac{1}{|q|}>1$. Обозначим $\alpha=\frac{1}{|q|}-1\ (\alpha>0)$, тогда $|1/q|=1+\alpha$ и $|1/q|^n=(1+\alpha)^n$. Применяя неравенство Бернулли [1]), получим $|1/q|^n=(1+\alpha)^n>1+\alpha n>\alpha n$, откуда следует

$$|q|^n<1/\alpha n. \tag{1}$$

Для любого $\varepsilon>0$ возьмем $N=[1/\alpha\varepsilon]+1$. Так как $N>1/\alpha\varepsilon$, то при $n>N$ из (1) будет следовать $|q|^n<1/\alpha n<1/\alpha N<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$. ▲

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*.

Пример 5. Доказать, что последовательность с n-м членом $a_n=1+(-1)^n$ является расходящейся.

△ Предположим противное, т. е. предположим, что существует число a, являющееся пределом этой последовательности. Тогда по определению предела для $\varepsilon=1/2$ найдется такое натуральное число N, что для любого $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-a|<1/2$.

Отсюда следует, что если $n_1>N$ и $n_2>N$, то

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|=|(a_{n_1}-a)+(a-a_{n_2})|\leqslant|a_{n_1}-a|+|a_{n_2}-a|<1. \tag{2}$$

Однако, если взять $n_1=2N$ $(n_1>N)$ и $n_2=2N+1$ $(n_2>N)$, то для таких номеров получим

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|=|(1+(-1)^{2N})-(1+(-1)^{2N+1})|=|2-0|=2>1,$$

что противоречит (2). Следовательно, не существует числа a, являющегося пределом последовательности $a_n=1+(-1)^n$, эта последовательность расходящаяся. ▲

---

[1]) См. «Алгебра и начала анализа». Учебное пособие для 9-го класса средней школы под редакцией А. Н. Колмогорова, стр. 12.

Напомним теоремы о сходящихся последовательностях, которые изучаются в школьном курсе математики.

Теорема 1. *Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.*

Теорема 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Теорема 3. *Если последовательности a_n и b_n сходятся, то*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Если, кроме того, $b_n\neq 0$ для любого n и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Из теоремы 2 следует, что любая неограниченная последовательность является расходящейся. Например, последовательности (n), $((n^2+1)/n)$, (2^n) расходящиеся, так как они неограниченные. Из теоремы 3 следует, что постоянную можно выносить за знак предела, т. е. если последовательность (a_n) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Рассмотрим примеры на вычисление пределов.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-3n+12}{n^2+2n+2}$.

△ Применяя теорему 3, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-3n+12}{n^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{7-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+12\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}=7. \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

△ Так как

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$ (см. пример 3), то по теореме 3 будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}. \blacktriangle$$

§ 3. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1}>a_n$. Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1}<a_n$.

Например, последовательность (n^2) возрастающая, так как для любого натурального n имеет место $a_{n+1}=(n+1)^2>n^2=a_n$. Последовательность $(1/n)$ убывающая, так как для каждого n справедливо неравенство $1/(n+1)<1/n$, т. е. $a_{n+1}<a_n$.

Последовательность (a_n) называется *неубывающей*, если $a_{n+1}\geqslant a_n$ для любого n, и *невозрастающей*, если $a_{n+1}\leqslant a_n$ для любого n.

Например, последовательность с n-м членом $a_n=[(n+1)/2]$ неубывающая: 1; 1; 2; 2; 3; 3; ...

Все такие последовательности (возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие) называются *монотонными*.

Пример 1. Доказать монотонность последовательности, n-й член которой имеет вид $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

△ Заметим, что

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

поэтому при любом n

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\frac{-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0.$$

Таким образом, $a_{n+1}<a_n$, т. е. последовательность убывающая. ▲

Не всякая последовательность монотонная. Примером немонотонной последовательности является последовательность $((-1)^n/n)$. Каждый ее элемент с четным номером больше как предыдущего, так и последующего:

$$-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ \ldots\ -\frac{1}{2k-1};\ \frac{1}{2k};\ -\frac{1}{2k+1};\ \ldots$$

Для монотонных и ограниченных последовательностей справедлива следующая теорема:

Теорема Вейерштрасса. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.*

Эта очень важная в математическом анализе теорема дает достаточные условия существования предела последовательности. Из теоремы Вейерштрасса следует, например, что последовательность площадей правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного радиуса, имеет предел, так как является возрастающей и ограниченной последовательностью. Предел этой последовательности обозначается π.

Пример 2. Доказать, что последовательность $a_1 = 2$, $a_n = (a_{n-1} + 1)/2$ при $n \geqslant 2$ имеет предел и найти его.

△ Найдем несколько первых членов последовательности:

$$a_1 = 2;\ a_2 = 3/2;\ a_3 = 5/4;\ a_4 = 9/8.$$

Все они принадлежат промежутку $]1; 2]$. Докажем, что при всех n выполняются неравенства

$$1 < a_n \leqslant 2. \tag{1}$$

Применим метод математической индукции. При $n = 1$ неравенства (1) справедливы, так как $a_1 = 2$. Предположим, что при $n = k \geqslant 1$ имеет место $1 < a_k \leqslant 2$. Так как $a_{k+1} = (a_k + 1)/2$, то из $a_k > 1$ следует $a_{k+1} > 1$, а из $a_k < 2$ получаем $a_{k+1} < 2$. Таким образом, $1 < a_{k+1} \leqslant 2$, т. е. (1) выполняется и при $n = k + 1$. Из принципа математической индукции следует, что неравенства (1) выполняются для любого натурального n.

Далее,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 1}{2} - a_n = \frac{1 - a_n}{2},$$

отсюда, учитывая что $a_n > 1$ для любого n, получим $a_{n+1} - a_n < 0$. Следовательно, $a_{n+1} < a_n$ при всех n — последовательность убывающая. По теореме Вейерштрасса эта последовательность имеет предел, обозначим его a: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Очевидно, что если последовательность (a_n) имеет предел, то

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}.$$

Для рассматриваемой последовательности $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2}$, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} a_n + \frac{1}{2},$$

т. е.

$$a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2},$$

откуда находим, что $a = 1$. Итак, доказано, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$. ▲

§ 4. Арифметическая прогрессия

Последовательность (a_n), у которой $a_1 = a$ и при любом n

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

где a и d — любые заданные числа, называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия является монотонной последовательностью: возрастающей при $d > 0$ (так как $a_{n+1} - a_n = d > 0$), убывающей при $d < 0$ (так как $a_{n+1} - a_n = d < 0$), невозрастающей при $d = 0$. Для n-го члена арифметической прогрессии справедлива формула

$$a_n = a + d(n-1). \tag{2}$$

Докажем ее методом математической индукции.

□ При $n = 1$ эта формула верна: $a_1 = a$. Предположим, что формула (2) верна при $n = k \geqslant 1$, т. е. $a_k = a + d(k-1)$. По определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Подставляя сюда выражение для k-го члена, получим

$$a_{k+1} = a + d(k-1) + d = a + dk,$$

а это есть формула (2) при $n = k+1$. Из принципа математической индукции следует, что формула (2) верна для любого натурального n. ■

Из формулы (2) следует, что если разность арифметической прогрессии отлична от нуля, то арифметическая прогрессия является неограниченной последовательностью. Доказательство этого факта аналогично доказательству неограниченности последовательности (n) (см. пример 2 § 1).

Чаще всего рассматривается арифметическая прогрессия, содержащая конечное число членов, которая называется *конечной арифметической прогрессией*.

Свойства арифметической прогрессии.

1. *Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при* $k \geqslant 2$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}. \tag{3}$$

2. *У конечной арифметической прогрессии* $a_1; a_2; \ldots; a_n$ *сумма членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т. е. для* $k = 1, 2, \ldots, n$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n. \tag{4}$$

3. *Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т. е.*

если $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *то*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{5}$$

□ При $k \geqslant 2$ имеем $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, откуда следует (3).

В конечной арифметической прогрессии a_1; a_2; ...; a_n члены a_k и a_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $a_k = a + d(k-1)$ и $a_{n-k+1} = a + d(n-k)$. Сумма этих членов $a_k + a_{n-k+1} = 2a + d(n-1)$ и равна сумме крайних членов $a_1 + a_n = 2a + d(n-1)$.

Если $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, то $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1$. Складывая почленно эти равенства и используя свойство 2, получаем

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n),$$

откуда следует формула (5)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad ■$$

Если в формулу (5) подставить выражение (2) для n-го члена, то получим

$$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n. \tag{6}$$

Пример 1. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно 3. Найти сумму первых шестнадцати членов этой прогрессии.

△ Обозначим первый член прогрессии a, а ее разность d. Тогда по формуле (2) имеем $a_3 = a + 2d$ и $a_7 = a + 6d$. По условию $a_3 + a_7 = 6$, $a_3 a_7 = 8$. Подставляя сюда выражения для a_3 и a_7, получим систему

$$\begin{cases} 2a + 8d = 6, \\ (a + 2d)(a + 6d) = 8, \end{cases}$$

решая которую, находим $a = 1$, $d = 1/2$ и $a = 5$, $d = -1/2$. По формуле (6) вычисляем сумму первых 16-ти членов для каждой из прогрессий:

$$S_{16} = \frac{2a + 15d}{2} \cdot 16 = 76 \quad \text{при} \quad a = 1, \quad d = 1/2,$$

$$S_{16} = 20 \quad \text{при} \quad a = 5, \quad d = -1/2. \quad ▲$$

Пример 2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов.

△ Если S_k — сумма первых k членов прогрессии, то условие можно записать следующим образом: $S_n = \frac{1}{2}(S_{2n} - S_n)$, откуда

следует $3S_n = S_{2n}$. Используя формулу (6) для суммы S_k отсюда получим

$$2a = d(n+1). \tag{7}$$

Искомое отношение S_{3n}/S_n имеет вид

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = 3\,\frac{2a+d(3n-1)}{2a+d(n-1)}.$$

Подставляя сюда a из (7) и сокращая на $d \neq 0$, находим $S_{3n}/S_n = 6$. ▲

§ 5. Геометрическая прогрессия

Последовательность (a_n), у которой $a_1 = a$ и для любого n

$$a_{n+1} = a_n q, \tag{1}$$

где a и q — любые отличные от нуля заданные числа, называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Если $a > 0$ и $q > 1$, то геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, так как для любого n имеем $a_{n+1}/a_n = q > 1$, т. е. $a_{n+1} > a_n$; если же $a > 0$ и $0 < q < 1$, то геометрическая прогрессия убывающая: $a_{n+1} = a_n q < a_n$.

Очевидно, что при $a < 0$, наоборот, геометрическая прогрессия убывающая, если $q > 1$, и возрастающая, если $0 < q < 1$.

При $q < 0$ каждый член прогрессии имеет знак, противоположный знаку последующего члена, она не будет монотонной.

Формула для n-го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$a_n = aq^{n-1}. \tag{2}$$

Докажем ее методом математической индукции.

□ Формула (2), очевидно, верна при $n = 1$, предположим, что она верна и при $n = k \geqslant 1$, т. е. $a_k = aq^{k-1}$. Из (1) следует $a_{k+1} = a_k q$. Подставляя сюда выражение для k-го члена, получаем $a_{k+1} = aq^k$, т. е. формула (2) верна и при $n = k+1$. Из принципа математической индукции следует, что формула (2) справедлива для любого натурального n. ■

Геометрическая прогрессия, содержащая конечное число членов, называется *конечной геометрической прогрессией*.

Пусть (a_n) — геометрическая прогрессия с первым членом a и знаменателем q.

Свойства геометрической прогрессии.

1. *Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних членов, т. е. при* $k \geqslant 2$

$$a_k^2 = a_{k-1} a_{k+1}. \tag{3}$$

Если все члены геометрической прогрессии положительны то это свойство формулируется так: *каждый член геометрической про-*

грессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов, т. е. $a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$.

2. *У конечной геометрической прогрессии* $a_1; a_2; \ldots; a_n$ *произведение членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов, т. е.*

$$a_k a_{n-k+1} = a_1 a_n. \tag{4}$$

3. *Если знаменатель геометрической прогрессии* q *не равен единице и* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *то*

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{5}$$

Доказательства свойств 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих свойств арифметической прогрессии. Докажем свойство 3.

□ Пусть $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Используя формулу (2), можно записать

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}, \tag{6}$$

тогда

$$qS_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^n. \tag{7}$$

Вычитая почленно из равенства (6) равенство (7), получим

$$(1-q)S_n = a(1-q^n),$$

откуда при $q \neq 1$ следует формула (5). ■

Пример 1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырех членов равна 480. Найти первый член прогрессии.

△ Пусть a — первый член и q — знаменатель геометрической прогрессии. По формуле (5)

$$a\frac{1-q^4}{1-q} = 30. \tag{8}$$

Следующие четыре члена aq^4, aq^5, aq^6, aq^7 образуют геометрическую прогрессию с первым членом aq^4 и знаменателем q, поэтому по формуле (5)

$$aq^4\frac{1-q^4}{1-q} = 480. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует $q^4 = 16$, откуда $q = 2$ или $q = -2$. Если $q = 2$, то из (8) находим $a = 2$, а при $q = -2$ получаем $a = -6$. ▲

В примере 4 § 2 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$. Из этого следует, что если знаменатель q геометрической прогрессии (a_n) удовлетворяет условию $|q| < 1$, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, так как $a_n = aq^{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} = a\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$$

Геометрическая прогрессия, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q|<1$, называется *бесконечно убывающей* геометрической прогрессией.

Если (a_n) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то существует предел последовательности сумм ее первых n членов. По формуле (5)

$$S_n=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\cdot q^n,$$

и так как $q^n\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=a/(1-q)$.

Этот предел называется *суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии и обычно обозначается S. Итак

$$S=\frac{a}{1-q}. \tag{10}$$

Пример 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 7, а произведение этих членов равно 8.

△ Пусть a — первый член и q — знаменатель геометрической прогрессии. По условию

$$\begin{cases} a(1+q+q^2)=7, \\ a^3q^3=8. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $aq=2$, тогда, подставляя $a=2/q$ в первое уравнение системы, получаем квадратное уравнение $2q^2-5q+2=0$, корни которого $q=1/2$ и $q=2$. Последовательность бесконечно убывающая, $|q|<1$. Следовательно, $q=1/2$, и тогда $a=4$. Сумму этой прогрессии находим по формуле (10): $S=\frac{a}{1-q}=8$. ▲

§ 6. Предел функции. Непрерывность функции

Напомним, что любой интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью* точки a. Симметричный интервал $]a-\delta;\ a+\delta[$ при любом $\delta>0$ называется δ-*окрестностью* точки a.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, т. е. никаких предположений о том, определена ли функция в точке a или нет, не делается.

Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Для обозначения того, что число b есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a, пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \quad \text{или} \quad f(x)\to b \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Заметим, что условия $|x-a|<\delta$, $x\neq a$ означают, что точка x принадлежит δ-окрестности точки a и отлична от a; эти условия можно объединить в такой записи:

$$0<|x-a|<\delta.$$

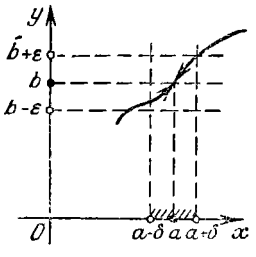


Рис. 42.

Данное определение предела можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 42). Возьмем число $\varepsilon>0$ и на оси Oy отметим ε-окрестность точки b, т. е. интервал $]b-\varepsilon;\ b+\varepsilon[$, через концы которого проведем прямые, параллельные оси Ox. Получим полосу шириной 2ε. Если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что график функции $y=f(x)$, рассмотренный для x из δ-окрестности точки a и не равных a, целиком находится в этой полосе, то число b является пределом $f(x)$ при x,стремящемся к a.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$.

△ Функция $f(x)=3x-1$ определена в любой окрестности точки $x=1$. Неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$, т. е. $|(3x-1)-2|=3|x-1|<\varepsilon$, будет выполняться для всех x, удовлетворяющих условию $|x-1|<\varepsilon/3$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\varepsilon/3$, тогда для всех x таких, что $|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $|f(x)-2|=3|x-1|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=2. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$, она определена всюду за исключением точки $x=1$. Доказать, что при x, стремящемся к 1, эта функция имеет предел, равный 2.

△ При всех $x\neq 1$ имеем $(x^2-1)/(x-1)=x+1$, следовательно, $|f(x)-2|=|x-1|$ и неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$ выполняется, если $|x-1|<\varepsilon$ и $x\neq 1$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\varepsilon$, тогда при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$. Таким образом, по определению $(x^2-1)/(x-1)\to 2$ при $x\to 1$. ▲

Решения примеров 1 и 2, в частности, показывают, что δ зависит от ε, причем зависимость эта, вообще говоря, различна для различных функций.

Пример 3. Пусть $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $b>0$. Доказать, что при x, стремящемся к a, существует предел функции $\sqrt{f(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{b}$.

△ Из определения предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| > \varepsilon/b$. Тогда для тех же x из неравенства

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{b}| = \frac{|f(x) - b|}{\sqrt{f(x)} + b} < \frac{|f(x) - b|}{b}$$

следует $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{b}| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}$. ▲

Не для всякой функции, определенной в окрестности точки a, существует предел при стремлении x к a. Рассмотрим, например, функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 43. Докажем, что эта функция не имеет предела в точке $x = 0$. Проведем доказательство методом от противного.

□ Предположим, что существует число b такое, что

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x = b.$$

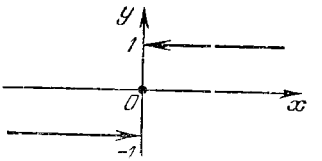


Рис. 43.

По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, для $\varepsilon = 1/2$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta$, будет справедливо неравенство $|\operatorname{sign} x - b| < 1/2$. Таким образом, если x_1 и x_2 такие, что $0 < |x_1| < \delta$ и $0 < |x_2| < \delta$, то $|\operatorname{sign} x_1 - b| < 1/2$ и $|\operatorname{sign} x_2 - b| < 1/2$ и, следовательно,

$$|\operatorname{sign} x_1 - \operatorname{sign} x_2| = |\operatorname{sign} x_1 - b + b - \operatorname{sign} x_2| \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{sign} x_1 - b| + |\operatorname{sign} x_2 - b| < 1.$$

Однако, взяв $x_1 = \delta/2$ и $x_2 = -\delta/2$, будем иметь $|\operatorname{sign} x_1 - \operatorname{sign} x_2| = |1 - (-1)| = 2 > 1$.

Полученное противоречие показывает, что функция $\operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке $x = 0$. ■

Для функций, имеющих предел в точке, справедлива теорема, аналогичная теореме о сходящихся последовательностях.

Теорема. *Пусть при x, стремящемся к a, существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда при x, стремящемся к a, существуют также пределы суммы, разности и произведения этих функций, при этом*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, *то существует предел частного* $f(x)/g(x)$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-3}{3+7x}$.

△ По теореме о пределах имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{3+7x}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(3+7x)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 3}x-3}{3+7\lim\limits_{x\to 3}x}=\frac{2\cdot 3-3}{3+7\cdot 3}=\frac{1}{8}. \blacktriangle$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

△ При x, стремящемся к 1, предел знаменателя равен нулю, поэтому применить теорему о пределе частного нельзя. Однако, преобразовав дробь следующим образом:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

и сократив на $x-1$ (если $x\to 1$, то $x\neq 1$), получим

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$ (см. пример 3), то

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}. \blacktriangle$$

Для некоторых функций предел при x, стремящемся к a, равен значению функции в точке a (см. примеры 1 и 4). Однако это не всегда так, например для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0,\end{cases}$$

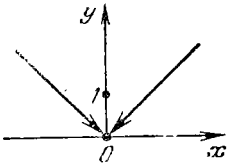


Рис. 44.

график которой представлен на рис. 44, предел при $x\to 0$ равен нулю, а $f(0)=1$.

Если предел функции $f(x)$ в точке a равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a.

Из теоремы о пределах следует, что линейная функция непрерывна в любой точке, т. е. для любой точки x_0 имеет место

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1 x_0.$$

Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ также является непрерывной функцией в любой точке:

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

Это следует из того, что многочлен есть конечная сумма слагаемых вида $a_k x^k$, $k \geqslant 0$, для каждого из которых

$$\lim_{x \to x_0} a_k x^k = a_k (x_0)^k$$

(последнее устанавливается методом математической индукции).

Из непрерывности многочлена и теоремы о пределе частного следует, что рациональная функция непрерывна в любой точке области определения, так как

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, \quad \text{если} \quad Q_m(x_0) \neq 0.$$

Все элементарные функции, например

$$x^k,\ a^x\ (a > 0),\ \sin x,\ \operatorname{tg} x, \log_a x\ (a > 0,\ a \neq 1),$$

непрерывны в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, она называется *непрерывной на этом интервале*. График непрерывной на интервале функции может быть нарисован одним движением карандаша без отрыва от бумаги.

Каждая элементарная функция непрерывна на любом интервале, на котором она определена.

§ 7. Производная, ее геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $]a; b[$, содержащем точку x_0. Для любой другой точки x интервала $]a; b[$ разность $x - x_0$ обозначается Δx и называется *приращением аргумента*; соответствующая разность значений функции $f(x) - f(x_0)$ обозначается $\Delta f(x_0)$ (или $\Delta y(x_0)$) и называется *приращением функции*. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ следует $x = x_0 + \Delta x$ и

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если $x \to x_0$, то, очевидно, $\Delta x \to 0$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению

аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для существования производной $f'(x_0)$ необходимо, чтобы функция $f(x)$ была определена в некоторой окрестности точки x_0. Покажем, что также необходимо, чтобы функция была непрерывна в точке x_0. Пусть существует $f'(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, это и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в* этой *точке*; операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется *дифференцируемой на* этом *интервале*. Производная дифференцируемой на интервале функции $y=f(x)$ сама является функцией аргумента x, ее обозначают $f'(x)$ или $y'(x)$ и называют *производной функцией*.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ дифференцируема на интервале $]0;\ +\infty[$ и $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ для любого $x\in$ $\in]0;\ +\infty[$.

△ Пусть $x_0>0$ и $x>0$. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=\sqrt{x}-\sqrt{x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

т. е.

$$\Delta f(x_0)=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

Отсюда, зная, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{x_0+\Delta x}=\sqrt{x_0}$ (см. пример 3 § 6), получаем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Это означает, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ дифференцируема в каждой точке интервала $]0;\ +\infty[$ и $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ▲

Укажем основные формулы и правила дифференцирования, с помощью которых в большинстве случаев можно при дифферен-

цировании обойтись без непосредственного вычисления производной как предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Производные элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$.
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Правила дифференцирования.

Пусть c — постоянная, $u(x)$, $v(x)$ и $u_i(x)$ — дифференцируемые на некотором интервале $]a; b[$ функции, на этом же интервале справедливы приводимые формулы:

$$c' = 0.$$
$$(cu)' = cu'.$$
$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'.$$
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Приведем примеры нахождения производных.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

$\triangle$ $y' = (x^2)' + (x^{-1})' = 2x - 1 \cdot x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2}$. Формула $(x^n)' = -nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, следует из правила дифференцирования частного, если положить $u = 1$, $v = x^n$. ▲

Пример 3. Найти производную функции $y = x^4 - 2x^3 + 3x - 7$.

$\triangle$ $y' = (x^4)' - 2(x^3)' + 3(x)' - (7)' = 4x^3 - 6x^2 + 3$. ▲

Пример 4. Найти производную функции $y = x \ln x$.

$\triangle$ $y' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. ▲

Пример 5. Найти производную функции $y = \frac{2x-1}{3+x}$.

$\triangle$ $y' = \frac{(2x-1)'(3+x) - (2x-1)(3+x)'}{(3+x)^2} = \frac{2(3+x) - (2x-1) \cdot 1}{(3+x)^2} =$

$= \frac{7}{(3+x)^2}$. ▲

Правило дифференцирования сложной функции.

Пусть $y = F(u)$, $u = u(x)$ и $y(x) = F(u(x))$ — сложная функция. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y(x) = F(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0) = F'(u_0)\, u'(x_0).$$

Пример 6. Найти производную функции $y=(\sin x+\cos x)^3$.

△ Полагаем здесь $u(x)=\sin x+\cos x$, $y=u^3$. По правилу дифференцирования сложной функции для любого x получаем

$$y'(x)=(u^3)'u'(x)=3u^2u'(x)=3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x). \blacktriangle$$

Пример 7. Найти производную функции $y(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

△ Полагая $u(x)=x^2-2x$, получаем $y(x)=\sqrt{u(x)}$. Так как $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ (см. пример 1), то имеем

$$y'(x)=(\sqrt{u})'u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}. \blacktriangle$$

Геометрический смысл понятия производной становится ясным из рассмотрения графика функции $y=f(x)$, определенной на некотором интервале $]a;\ b[$. Для значений аргумента $x_0+\Delta x$ и x_0 из интервала $]a;\ b[$ соответствующие ординаты графика функции равны $f(x_0+\Delta x)$ и $f(x_0)$, разность значений этих ординат есть $\Delta y(x_0)$: $\Delta y(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Отношение $\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta y}$ равно угловому коэффициенту прямой, проходящей через точки графика $M(x_0,\ f(x_0))$ и $N(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$. Прямая MN называется *секущей* (рис. 45).

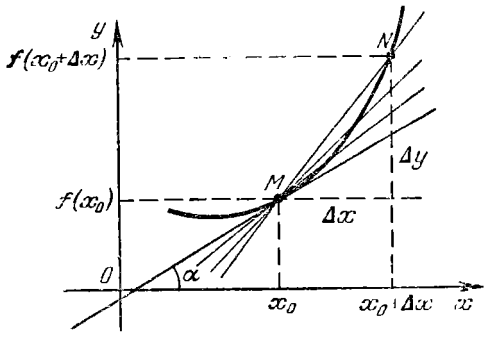


Рис. 45.

Пусть $\Delta x\to 0$, тогда точка N стремится к точке M. Если существует производная $f'(x_0)$, т. е. предел отношения $\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, то секущая MN стремится к прямой, проходящей через точку M, с угловым коэффициентом $f'(x_0)$. Предельное положение секущей MN при стремлении N к M называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке M. Угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, иначе $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$. Уравнение касательной, как уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$ с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, может быть записано в виде $\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$ или (так как $y_0=f(x_0)$)

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0). \qquad (1)$$

Пример 8. Найти уравнение касательной к параболе $y=x-x^2+6$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

△ Находим производную функции $f(x)=x-x^2+6$:

$$f'(x)=1-2x,$$

и подставляем в уравнение касательной (1) значения $x_0=1$, $f(x_0)=6$ и $f'(x_0)=-1$, получаем уравнение касательной $y+x=7$. ▲.

Понятие производной является одним из основных в математическом анализе. О применении производных к исследованию функций см. главу VI.

§ 8. Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена вне некоторого отрезка $[c; d]$, как говорят, определена в окрестности бесконечности.

Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число M, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to\infty$.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$.

△ Функция $f(x)=1/x$ определена для всех $x\neq 0$. Для любого $\varepsilon>0$ неравенство $|f(x)-0|=1/|x|<\varepsilon$ будет выполняться, если $|x|>1/\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $M=1/\varepsilon$, тогда при всех x таких, что $|x|>M$, будет справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$. Это и означает, что $1/x\to 0$ при $x\to\infty$. ▲

Теорема о пределах, сформулированная в § 6, остается справедливой, если всюду $x\to a$ заменить на $x\to\infty$.

Пример 2. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+5}.$$

△ Как было отмечено, теорема о пределах останется справедливой при $x\to\infty$, в частности, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то существует предел отношения и равен отношению пределов, поэтому имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2+3\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2}{1+5\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2}=2.\ ▲$$

Часто представляет интерес нахождение пределов функции отдельно при стремлении x к $+\infty$ и к $-\infty$. Определим эти пределы следующим образом:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,

если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число M, что для всех x, удовлетворяющих условию $x>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,

если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число M, что для всех x, удовлетворяющих условию $x<M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то, как нетрудно видеть,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

Например, из того, что $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$, следует $1/x\to 0$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Заметим также, что теорема о пределах останется справедливой, если всюду вместо $x\to a$ подставить $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

Пример 3. Найти пределы функции $f(x)=\frac{2x}{1+|x|}$, когда x стремится к $+\infty$ и когда x стремится к $-\infty$.

△ Если $x>0$, то $\frac{2x}{1+|x|}=\frac{2x}{1+x}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+1}=2.$$

Если же $x<0$, то $\frac{2x}{1+|x|}=\frac{2x}{1-x}$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}=-2.\ \blacktriangle$$

§ 9. Односторонние пределы. Бесконечные пределы

Рассмотренная в § 6 функция $\operatorname{sign} x$ (см. рис. 43) не имеет предела в точке $x=0$. Однако, если ограничиться рассмотрением только положительных x, то предел при x, стремящемся к 0, существует и равен $+1$. Если же рассматривать только отрицательные x, то предел при x, стремящемся к 0, также существует и равен -1. Говорят, что функция $\operatorname{sign} x$ при x, стремящемся к нулю, имеет *односторонние* пределы: *правый предел*, равный $+1$, и *левый предел*, равный -1.

Правой окрестностью точки a назовем любой интервал $]a;\ a+c[$ при $c>0$. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой окрестности точки a. Число b называется *правым пределом* (или *пределом справа*) функции $f(x)$ в точке a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta$, т. е. принадлежащих правой δ-окрестности точки a, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. При этом пишут:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Аналогично определяется предел слева. *Левой окрестностью* точки a называется любой интервал $]a-c;\ a[$ при $c>0$ Пусть функция $f(x)$ определена на некоторой левой окрестности точки a.

Число b называется *левым пределом* (или *пределом слева*) функции $f(x)$ в точке a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех x, удовлетворяющих условию $a-\delta<x<a$, т. е. принадлежащих левой δ-окрестности точки a, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Если левый предел в точке a равен b, то пишут

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b.$$

В том частном случае, когда рассматриваются правый и левый пределы в точке нуль, они записываются в виде

$$\lim_{x\to+0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-0} f(x).$$

Таким образом, для функции $\operatorname{sign} x$

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x=1, \qquad \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x=-1.$$

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}=1.$$

△ Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$ определена при $x>0$ и при этом

$$\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}=\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Поэтому

$$|f(x)-1|=\left|\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-1\right|=\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}<2\sqrt{x}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ возьмем $\delta=\varepsilon^2/4$, тогда, если $0<x<\delta$, то $|f(x)-1|<2\sqrt{x}<2\sqrt{\delta}=\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}=1$. ▲

Утверждения теоремы о пределах функций, сформулированной в § 6, останутся в силе, если всюду $x\to a$ заменить на $x\to a+0$ (соответственно на $x\to a-0$).

Бесконечные пределы. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой окрестности точки a и существует правый предел функции $\dfrac{1}{f(x)}$, равный нулю:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Например, функция $f(x)=1/\sqrt{x-1}$ определена при $x>1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}(1/f(x))=\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}=0$.

Если $f(x)>0$ в некоторой правой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a+0}(1/f(x))=0$, то говорят, что функция $f(x)$ *стремится к плюс бесконечности* при стремлении x справа к точке a и пишут

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty$$

(читается: предел функции $f(x)$ справа в точке a равен плюс бесконечности).

Если $f(x)<0$ в некоторой правой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a+0}(1/f(x))=0$, то говорят, что функция $f(x)$ *стремится к минус бесконечности* при стремлении x справа к точке a и пишут

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$$

(читается: предел функции $f(x)$ справа в точке a равен минус бесконечности).

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1+0}(1/\sqrt{x-1})=+\infty$, так как $1/\sqrt{x-1}>0$ при $x>1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}=0$.

Аналогично определяются *бесконечные пределы слева* в точке a для функции $f(x)$, определенной в некоторой левой окрестности точки a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty,$$

если $f(x)>0$ в некоторой левой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a-0}(1/f(x))=0$.

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty,$$

если $f(x)<0$ в некоторой левой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a-0}(1/f(x))=0$.

Пример 2. Для функции $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ найти пределы справа и слева в точке $x=1$.

△ Функция $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ определена в окрестности точки $x=1$, но не в самой этой точке, и

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0.$$

Далее, функция $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ положительна на интервале $]1;\ 3/2[$ и отрицательна на интервале $]1/2;\ 1[$, поэтому по определению

бесконечных пределов справа и слева имеем

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=+\infty \text{ и } \lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty \quad \text{(рис. 46).} \blacktriangle$$

Если функция $f(x)$ при x, стремящемся к a справа или слева, имеет бесконечный предел, то при графическом изображении этой функции проводят также прямую $x=a$. Это делает изображение более наглядным.

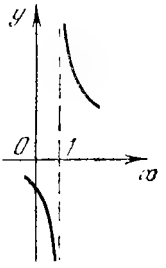


Рис. 46.

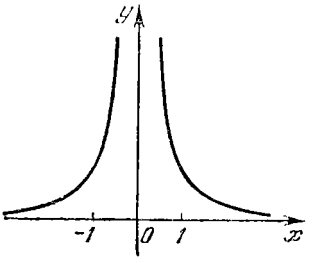


Рис. 47.

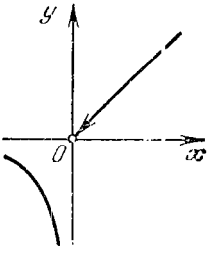


Рис. 48.

Для функции, определенной в правой и левой окрестностях точки a, ее правый и левый пределы могут быть оба бесконечные и разных знаков (рис. 46), оба бесконечные одного знака, как, например, у функции $f(x)=1/x^2$ в точке $x=0$ (рис. 47).

Может быть и так, что один из односторонних пределов конечный, другой — бесконечный (рис. 48).

Бесконечные пределы определяются также при x, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$, например, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, если $f(x)$ определена и положительна при всех $x<M$ для некоторого M и $\lim\limits_{x\to-\infty}(1/f(x))=0$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x-x^2}{x+2}=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x-x^2}{x+2}=+\infty.$$

Понятие бесконечного предела широко применяется при исследовании функции и построении их графиков (см. гл. VI).

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА 1

1. Исходя из определения предела, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$ и заполнить следующую таблицу зависимости N от ε:

ε	1/10	1/100	1/1000
N			

2. Доказать, что последовательность $\left(n^{(-1)^n}\right)$ является неограниченной.

3. Доказать, что последовательность $\left(\frac{n+(-1)^n n}{n+2}\right)$ является расходящейся.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^{\alpha})=0$ для любого $\alpha>0$.

5. Пусть последовательности (a_n) и (b_n) таковы, что $|a_n|\leqslant|b_n|$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

7. Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно: $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}$, $n\in\mathbb{N}$. Найти предел этой последовательности.

Найти пределы последовательностей:

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ при $|a|<1$ и $|b|<1$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$.

10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ для любого $a>0$.

11. Пусть последовательности (a_n), (b_n) и (x_n) таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$ и для любого n выполняется неравенство $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

13. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно: $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет теореме Вейерштрасса. Найти предел этой последовательности.

14. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 членов равно 1/2, а отношение суммы всех членов без первых трех к сумме всех членов без последних трех равно 4/3.

15. Сумма членов арифметической прогрессии и ее первый член положительны. Если увеличить разность этой прогрессии на 3, не меняя первого члена, то сумма ее членов увеличится в два раза. Если же первый член исходной прогрессии увеличить в четыре раза, не меняя ее разности, то сумма членов увеличится также в два раза. Найти разность исходной прогрессии.

16. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна 16/3, содержит член, равный 1/6. Отношение суммы всех членов прогрессии, стоящих до него, к сумме всех членов прогрессии, стоящих после него, равно 30. Определить порядковый номер этого члена прогрессии.

17. Найти значение произведения $0{,}2\,(7)\cdot 0{,}1\,(63)$ в виде простой дроби.

18. Исходя из определения предела функции в точке, доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

Найти пределы функций:

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$. 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$. 22. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$.

23. Найти пределы справа и слева в точке $x=0$ функции

$$f(x)=\frac{x-|x|}{2x}.$$

24. Найти пределы справа и слева в точке $x=1$ функции

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2|x-1|-1}.$$

25. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$.

26. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

27. Доказать, что при $x\to+\infty$ функция $f(x)=\sin x$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

28. Найти производную функции $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{50}$.

29. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{4x-3-x^2}$ в точке с абсциссой $x=3/2$.

30. Найти уравнение общей касательной к параболам

$$y=x^2-2x+5 \text{ и } y=x^2+2x-11.$$

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Доказать ограниченность последовательностей:

а) $\left(\dfrac{2n^2-1}{2+n^2}\right)$; б) $\left(\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$; в) $\left(\dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}\right)$.

2. Исходя из определения предела, доказать:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-n^2}{2n^2+3}=-\dfrac{1}{2}$.

Для каждой из последовательностей заполнить таблицу зависимости N от ε:

ε	1/10	1/100	1/1000
N			

3. Доказать, что следующие последовательности являются неограниченными:

а) $a_n=(-1)^n\cdot n$, $n\in\mathbb{N}$; б) $a_n=n^2-n$, $n\in\mathbb{N}$;

в) $a_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}$; г) $a_n=n+(-1)^n\cdot n$, $n\in\mathbb{N}$.

4. Доказать, что следующие последовательности являются расходящимися:

а) $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$;

г) $a_n = \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ (здесь $[\ ]$ — знак целой части числа).

Найти пределы последовательностей (5—14):

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^5 n}{10^5 + n}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 - 2n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - n + 2n^2}{5n^2 + n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n}$. 12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{2^{1/n} + 1}$.

15. Доказать монотонность следующих последовательностей:

а) $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$; б) $\left(\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right)$; в) $(2^n - 1)$;

г) Начиная с какого n последовательность $(n \cdot q^n)$ при $0 < q < 1$ будет монотонна?

16. Найти, при каких соотношениях между a, b, c и d последовательность $\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ будет: а) возрастающей, б) убывающей.

17. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$ при $|q| < 1$.

18. Доказать, что последовательность имеет предел и найти его:

а) $a_1 = 1/2$, $a_n = 1/(2 - a_{n-1})$ при $n \geqslant 2$;

б) $a_1 = 1/2$, $a_n = 2/(3 - a_{n-1})$ при $n \geqslant 2$.

19. Найти формулу n-го члена для каждой из следующих последовательностей и найти ее предел:

а) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$ при $n > 1$;

б) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_n = \frac{3}{2} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-2}$ при $n \geqslant 3$.

20. Записать в виде обыкновенной несократимой дроби:

а) $\frac{0{,}2\,(5)}{0{,}12\,(7)}$. б) $0{,}3\,(8) \cdot 0{,}5\,(45)$. в) $\frac{0{,}2\,(27)}{0,\ (63)}$.

21. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 23 членов к сумме последних 23 членов равно 2/5, а отношение суммы всех членов без первых семи к сумме всех членов без последних семи равно 10/7.

22. Найти число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы первых 11 членов к сумме последних 11 членов равно $\frac{1}{8}$, а отношение суммы всех членов без первых девяти к сумме всех членов без последних девяти равно 2.

23. Три числа x; y; z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x; $2y$; $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии, отличной от 1.

24. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

25. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

26. Найти четыре целых числа a; b; c; d, первые три из которых a; b; c в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а последние три b; c; d в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

27. В арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найти отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.

28. Найти первый член геометрической прогрессии, у которой отношение суммы первых пяти членов к сумме их обратных величин равно 49, а сумма первого и третьего членов равна 35.

29. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношения суммы кубов всех членов к сумме квадратов всех членов равно 3, а отношение суммы всех членов к сумме квадратов всех членов равно 3/7.

30. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член уменьшить на 4, то полученные три числа в том же порядке опять составляют геометрическую прогрессию. Если третий член новой прогрессии уменьшить на 9, то получится арифметическая прогрессия. Найти эти числа.

31. Три числа, сумма которых равна 78, образуют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать также как первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

32. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а сумма ее в 8 раз меньше суммы квадратов ее членов.

33. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в три раза меньше суммы первых $3n$ членов.

34. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма первого и пятого членов которой равна 34, а произведение первого и девятого членов равно 4.

35. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, все члены которой положительны, если сумма первых трех членов этой прогрессии равна 39, а сумма обратных величин этих членов равна 13/27.

36. Найти сумму S бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если эта сумма на 6 больше суммы первых трех ее членов, а сумма первых трех на 1 больше суммы следующих трех членов.

37. Две арифметические прогрессии содержат одинаковое число членов. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй прогрессии равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой прогрессии и равно 4. Отношение суммы членов первой прогрессии к сумме членов второй прогрессии равно 2. Определить отношение разностей этих прогрессий.

38. Сумма членов и разность арифметической прогрессии положительны. Если увеличить разность прогрессии на 2, не меняя ее первого члена, то сумма ее членов увеличится в три раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, не меняя первого члена, то сумма членов прогрессии увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

39. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой прогрессии является первым членом второй прогрессии. Сумма сумм обеих прогрессий равна 2. Найти первый член первой прогрессии, если ее знаменатель равен 1/3.

40. Исходя из определения предела функции в точке, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=3$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$.

Найти пределы функций (41—51):

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+3}{2-x}$. **42.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$. **43.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

44. $\lim\limits_{x=1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. **45.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. **47.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-2x+1}{x^4-2x+1}$.

48. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$. **49.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. **51.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

52. Найти пределы справа и слева в точке $x=0$ функции

$$f(x)=\frac{x^2+|x|+x}{x^2-|x|+3x}.$$

53. Найти пределы справа и слева в точке $x=0$ функции

$$f(x)=\frac{x^2-|x|}{x^2+x}.$$

54. Найти пределы справа и слева в точке $x=1$ функции

$$f(x)=\frac{x-1+|x-1|}{x^2-1}.$$

55. Для функции $f(x)=\dfrac{2(x-x^3)+|x-x^3|}{2(x-x^3)-|x-x^3|}$ а) найти пределы справа и слева в точке $x=0$, б) найти пределы справа и слева в точке $x=1$.

56. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

57. В точке $x=0$ найти пределы справа и слева функции $f(x)=2^{1/x}$.

58. В точке $x=1$ найти пределы справа и слева функции $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$.

Найти производную функции $y(x)$ (59 — 64):

59. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$. **60.** $y=(x-2)\cos x-\sin x$.

61. $x=\dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+1}$. **62.** $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

63. $y=x\ln(x^2-1)$. **64.** $y=2^x\cdot(1-x)$.

65. Упростить выражение для $f(x)$ и найти $f'(x)$:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}.$$

66. Найти точку x, в которой обращается в нуль производная функции $f(x)=e^{2x-1}+2e^{1-2x}+7x-5$.

67. Решить неравенство $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{2}{x}$ и $g(x)=x-x^3$.

68. Найти уравнение касательной к параболе $y=3x^2-x+1$ в точке с абсциссой $x=1/2$.

69. Найти, какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-5x+7$ в точке $M(2;\ 1)$.

70. Найти уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$.

71. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(1/2;\ 2)$, касающуюся параболы $y=2-\dfrac{x^2}{2}$, и пересекающей график функции $y=\sqrt{4-x^2}$: а) в одной точке, б) в двух точках.

Глава VI

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. Четные и нечетные функции

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$-x \in X \text{ и } f(-x) = f(x).$$

Очевидно, что функции $f(x) = 1$ и $f(x) = x^2$, определенные на всей числовой оси, являются четными функциями. Однако функция $f(x) = x^2$, $x \in [1; 2]$, определенная лишь на отрезке $[1; 2]$, не является четной, так как точка 1,5 принадлежит области определения функции, а точка —1,5 не принадлежит.

График четной функции на координатной плоскости симметричен относительно оси ординат.

□ Действительно, пусть функция $f(x)$, $x \in X$, четная и пусть точка M с координатами x_0, y_0 принадлежит графику этой функции, т. е. $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0)$. Тогда согласно определению четной функции

$$-x_0 \in X, \quad f(-x_0) = f(x_0) = y_0,$$

а это и означает, что точка $M'(-x_0; y_0)$, являющаяся симметричной точке $M(x_0; y_0)$ относительно оси Oy, принадлежит графику данной функции. ■

Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то эта функция $f(x)$ четная.

Если две четные функции имеют одну и ту же область определения, то сумма, разность и произведение этих функций являются четными функциями.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$-x \in X \quad \text{и} \quad f(-x) = -f(x).$$

Например, функции $f(x) = x^3$ и $f(x) = \sin x$, определенные на всей числовой прямой, являются нечетными функциями.

Легко показать, что график нечетной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O, то функция $f(x)$ является нечетной функцией.

Если две нечетные функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения X, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ являются также нечетными функциями, а функция $f(x)\cdot g(x)$ является четной функцией.

Отметим, что области определения четных и нечетных функций являются симметричными относительно точки O на координатной прямой Ox.

Например, функция $\ln x$ не является ни четной, ни нечетной, так как она определена лишь для $x>0$. Функция $f(x)=1/(x-1)$ также не является ни четной, ни нечетной, так как точка -1 принадлежит области определения функции, а точка 1 не принадлежит. Функция $f(x)=x^2+3x$, хотя и определена на всей числовой прямой, однако не является ни четной, ни нечетной, так как, например, $f(1)=4$, а $f(-1)=-2$, т. е. $f(1)\neq f(-1)$ и $f(1)\neq -f(-1)$.

Приведенные выше примеры показывают, что существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Для любой функции $f(x)$ можно доказать следующее утверждение.

Если функция $f(x)$ определена на множестве X, которое является симметричным относительно точки O на координатной прямой Ox, то ее можно представить в виде суммы двух функций — четной и нечетной, причем такое представление единственно.

□ Действительно, пусть существуют четная функция $f_1(x)$ и нечетная функция $f_2(x)$ такие, что

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

для любого $x\in X$. Тогда для каждого $x\in X$ $f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)-f_2(x)$. Для определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$f(-x)=f_1(x)-f_2(x),$$

из которой следует, что

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{1}$$

Следовательно, искомые функции однозначно определяются по данной функции формулами (1). Из этих же формул следует, что искомое представление всегда существует. ■

Пример 1. Представить функцию

$$f(x)=3x^5-4x^4+x^2+1$$

в виде суммы четной и нечетной функций.

△ Данная функция является суммой нечетной функции $f_2(x)=3x^5$ и четной функции $f_1(x)=-4x^4+x^2+1$. Очевидно, что эти же функции получаются и по формулам (1).

Заметим, что функция $f_1(x)$ содержит только те слагаемые, в которых x входит в четной степени, а функция $f_2(x)$ содержит, слагаемые, в которых x входит в нечетной степени. ▲

Пример 2. Пусть на отрезке $[0; 1]$ задана функция $f(x) = 2x + 1$. Можно ли доопределить эту функцию во всех точках числовой оси так, чтобы вновь полученная функция была: а) четной, б) нечетной.

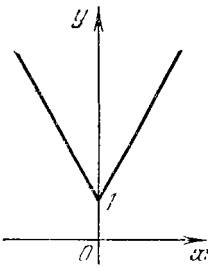


Рис. 49.

△ а) Функцию $f(x)$ можно доопределить на всей числовой прямой так, чтобы вновь полученная функция была четной. Одной из таких функций является функция $F(x) = 1 + 2|x|$, $x \in \mathbb{R}$ (рис. 49).

Очевидно, что такая функция не определяется однозначно. Действительно, таким свойством обладает и функция $F_1(x)$, которая равна $1 + 2x$ на отрезке $[-1; 1]$ и равна нулю для всех x, $|x| > 1$.

б) Заметим, что если нечетная функция определена при $x = 0$, то $f(0) = f(-0) = -f(0)$ и, следовательно, $f(0) = 0$.

Так как заданная функция $f(x)$ при $x = 0$ принимает значение 1, то доопределить ее на всей числовой прямой так, чтобы она была нечетной функцией, невозможно. ▲

§ 2. Периодические функции

Многие важные процессы в природе и технике являются периодическими. Изучение таких процессов приводит к необходимости рассмотрения периодических функций.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$x + T \in X, \quad x - T \in X$$

и

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции $f(x)$, $x \in X$.

Очевидно, что если T — период некоторой функции, то и любое число вида nT, где $n \in \mathbb{N}$, является периодом этой функции.

Покажем, что если число $T_0 > 0$ является наименьшим периодом некоторой функции, то любой период этой функции имеет вид nT_0, $n \in \mathbb{N}$.

□ Пусть T_0 — наименьший период, а T — какой-то период функции $f(x)$, $x \in X$. Найдем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $T = nT_0 + \alpha T_0$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$f(x) = f(x + T) = f(x + nT_0 + \alpha T_0) = f(x + \alpha T_0).$$

А так как T_0 — наименьший период, то отсюда следует, что $\alpha = 0$, т. е. $T = nT_0$. ■

Рассмотрим функцию $\sin x$. Из ее определения следует, что она периодическая и что число 2π является ее периодом. Покажем, что любое положительное число $T < 2\pi$ не является ее периодом. Действительно, $\sin(\pi/2) = 1$, но $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) < 1$. Следовательно, 2π является наименьшим периодом функции $\sin x$.

Не всякая периодическая функция имеет наименьший период. Например, функция $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$, является периодической, ее периодом является любое положительное число. Очевидно, что эта функция не имеет наименьшего периода.

Из самого определения следует, что если периодическая функция $f(x)$ не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках вида $x_0 \pm nT$, где $n \in \mathbb{N}$, а T — период функции $f(x)$. Поэтому любая функция, определенная во всех точках числовой прямой, кроме одной точки, не является периодической.

Также из самого определения следует, что если функция не определена, например для всех $x \leqslant a$ или $x \geqslant a$, то она не является периодической. Так, например, функция $f(x) = \sin\sqrt{x}$, определенная лишь для $x \geqslant 0$, не является периодической.

Функция $f(x) = x^4$ определена на всей числовой прямой, но тем не менее не является периодической. Действительно, если число $T > 0$ — период этой функции, то $f(0) = f(T)$, т. е. $0 = T^4$, что невозможно.

Пример 1. Доказать, что функция $\cos^2 x$ периодическая, и найти ее наименьший период.

△ Так как функция $\cos x$ периодическая с периодом 2π, то и функция $\cos^2 x$ периодическая и число 2π является ее периодом. Найдем ее наименьший период.

Легко убедиться, что число π является периодом функции $\cos^2 x$. Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

А так как $\cos^2 0 = \cos^2 \pi = 1$ и $\cos^2 x < 1$ для любого $x \in]0; \pi[$, то число π является наименьшим периодом данной функции. ▲

Очевидно, что если две периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $x \in X$, имеют один и тот же период T, то их сумма, разность и произведение тоже будут периодическими функциями и число T будет их периодом.

Если периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $x \in X$, имеют соизмеримые периоды T_1 и T_2, то они имеют общий период.

Действительно, так как T_1 и T_2 соизмеримы, то существуют натуральные числа n и m такие, что $mT_1 = nT_2 = T$. Следовательно, число T — общий период функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. В частности, в этом случае функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ являются периодическими с периодом T.

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x)=\cos 3x+\cos 4x$$

периодическая, и найти ее наименьший период.

△ Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1=2\pi/3$, а функция $\cos 4x$ — период $T_2=2\pi/4$. Периоды T_1 и T_2 соизмеримы: $3T_1=4T_2=2\pi$. Следовательно, число 2π является периодом данной функции. Покажем, что этот период наименьший.

Наибольшее значение функции $f(x)$ равно 2, и оно достигается в тех точках, где $\cos 3x=1$ и $\cos 4x=1$. На отрезке $[0;\ 2\pi]$ функция $\cos 3x$ принимает значение 1 в точках $0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 2\pi$, а функция $\cos 4x$ принимает значение 1 в точках $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$. Следовательно, функция $f(x)=\cos 3x+\cos 4x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ принимает значение 2 лишь в точках 0 и 2π. Отсюда и следует, что число 2π — наименьший период. ▲

Если периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $x\in X$, несоизмеримы, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ не является периодической функцией.

§ 3. Асимптоты

При исследовании функции и построении ее графика важно выяснить характер ее поведения в окрестности точек разрыва и точек, где функция не определена, а также выяснить ее поведение при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}. \tag{1}$$

Она определена для всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=-1$. Исследуем поведение функции (1) при $x\to+\infty$. Так как $f(x)=x+1-\frac{1}{x+1}$, то разность $f(x)-(x+1)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$. Заметим, что модуль разности $f(x)-(x+1)$ равен расстоянию от точки $M(x;\ f(x))$ до точки $M'(x;\ x+1)$ прямой l, заданной уравнением $y=x+1$. А так как $|MM'|=\sqrt{2}\,|MN|$ (рис. 50), где N — проекция точки M на l, то отсюда следует, что расстояние от точки M до прямой l стремится к нулю при $x\to+\infty$. В этом случае прямая l называется *асимптотой* графика функции $y=f(x)$ *при* $x\to+\infty$. Аналогично показывается, что в данном случае расстояние от точки M графика функции до прямой l стремится к нулю при $x\to-\infty$. Прямая l называется асимптотой графика функции $y=f(x)$ *при* $x\to-\infty$.

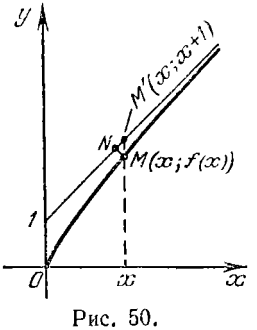


Рис. 50.

Дадим соответствующие определения.

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном интервале $]a; +\infty[$. Прямая $y=kx+b$ называется *асимптотой* графика функции $y=f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0.$$

Аналогично прямая $y=kx+b$ называется *асимптотой* графика функции $y=f(x)$, $x\in]-\infty; b[$ *при* $x\to-\infty$, если

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0.$$

Теперь изучим поведение функции (1) при $x\to-1$.

Так как при $x\to-1$ предел числителя равен -1, а предел знаменателя равен 0, причем $x+1<0$ при $x<-1$ и $x+1>0$ при $x>-1$, то

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=-\infty.$$

Отсюда следует, что график данной функции в окрестности точки $x=-1$ имеет вид, указанный на рис. 51. Видно, что точка $M(x; f(x))$ графика функции при $x\to-1$ приближается к прямой $x=-1$: расстояние от точки M до прямой $x=-1$, равное $x+1$, стремится к нулю при $x\to-1$.

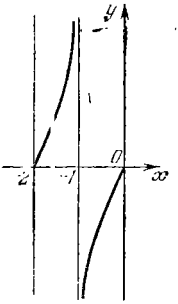


Рис. 51.

Прямая $x=-1$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to-1$ слева и справа.

Дадим соответствующее определение.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $]a; b[$. Если $f(x)\to\infty$ при $x\to a+0$, то прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции при $x\to a$ *справа*. А если $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$, то прямая $x=b$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to b$ *слева*.

Пусть прямая $y=kx+b$ является асимптотой графика функции при $x\to+\infty$. Рассмотрим функцию $\alpha(x)=f(x)-kx-b$. Из определения асимптоты следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

Так как $b=f(x)-kx-\alpha(x)$, то

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx), \tag{2}$$

а так как

$$k=\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{\alpha(x)}{x},$$

то

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (3)$$

Очевидно, что если существуют пределы (2) и (3), то прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции при $x \to +\infty$.

Аналогично можно показать, что если функция $y = f(x)$ определена на интервале $]-\infty; a[$ и если существуют пределы

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой*, если $k \neq 0$. Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой*.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|+1}.$$

△ Функция $f(x)$ представима в таком виде:

$$f(x) = \frac{|x|^2}{|x|+1} = \frac{|x|^2 + |x| - |x| - 1 + 1}{|x|+1} = |x| - 1 + \frac{1}{|x|+1}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|+1} = 0$, то прямая $y = x - 1$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, а прямая $y = -x - 1$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$. Так как $\frac{1}{|x|+1} > 0$ для любого x, то график функции $y = f(x)$ лежит выше асимптот.

Вертикальных асимптот график функции $y = f(x)$ не имеет. ▲

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

△ Функция $y = f(x)$ определена для $|x| \geqslant 1$.

Вертикальных асимптот график функции $f(x)$ не имеет.

По формуле (3)

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

По формуле (2)

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-1} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0.$$

Таким образом, график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = x$ при $x \to +\infty$.

Найдем асимптоту графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0.$$

Следовательно, график функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=-x$ при $x\to-\infty$. ▲

Заметим, что график функции $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ имеет различные асимптоты при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. График функции (1) имеет одну и ту же асимптоту при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

△ Так как $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to0$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$, то прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. ▲

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x\in[\pi;\ +\infty)$.

△ Функция $y=f(x)$ представляет собой произведение ограниченной функции $\sin x$ на функцию $1/x$, которая стремится к 0 при $x\to+\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

т. е. прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$.

Этот пример интересен тем, что график функции $f(x)$ пересекает асимптоту $y=0$ бесконечное число раз. ▲

§ 4. Преобразования графиков функций

В этом параграфе покажем, как из графика функции $y=f(x)$ можно получить графики функций вида $y=Af(ax+b)+B$, где A, B, a, b — некоторые действительные числа.

1. График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(0;\ b)$.

Если $b>0$, то перенос совершается параллельно оси ординат на расстояние b вверх, а если $b<0$, то вниз на расстояние $|b|$.

На рис. 52 изображены графики функций $y=f(x)$, $y=f(x)+1$ и $y=f(x)-2$.

2. График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(-a;\ 0)$.

Если $a>0$, то график переносится параллельно оси абсцисс влево на расстояние a, а если $a<0$, то вправо на расстояние $|a|$.

На рис. 53 изображены графики функций $y=f(x)$, $y=f(x+1)$ и $y=f(x-2)$.

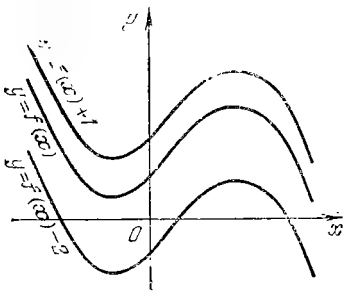


Рис. 52.

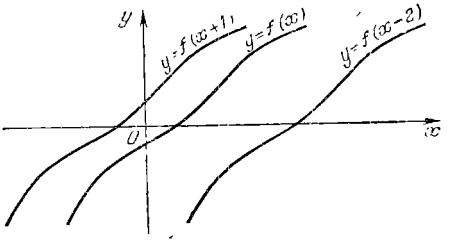


Рис. 53.

3. График функции $y=Af(x)$, где $A>0$, получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием к оси или растяжением от оси Ox в отношении $1:A$, т. е. если $0<A<1$, то сжатием в $1/A$ раз, а если $A>1$, то растяжением в A раз.

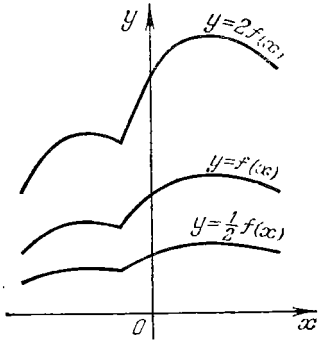


Рис. 54.

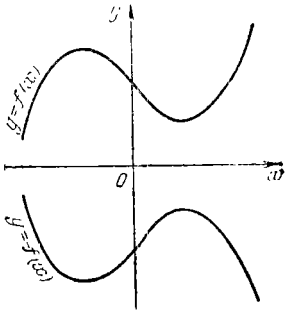


Рис. 55.

На рис. 54 изображены графики функций $y=f(x)$, $y=2f(x)$ и $y=\frac{1}{2}f(x)$.

4. График функции $y=-f(x)$ получают из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс.

На рис. 55 изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=-f(x)$.

5. График функции $y=f(kx)$, где $k>0$, получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием к оси ординат или растяжением от оси ординат в отношении $1:\frac{1}{k}$, т. е. если $0<k<1$, то растяжением в $1/k$ раз, а если $k>1$, то сжатием в k раз.

На рис. 56 изображены графики функций $y=f(x)$, $y=f(2x)$ и $y=f(x/2)$.

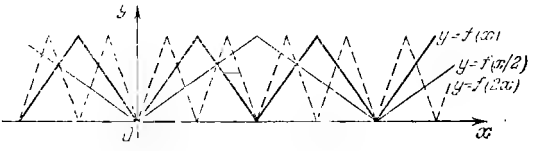


Рис. 56.

6. График функции $y=f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси ординат.

На рис. 57 изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=f(-x)$.

7. Рассмотрим теперь, как получается график функции $y=Af(ax+b)+B$, где $A>0$ и $a>0$, из графика функции $y=f(x)$. Так как

$$y=Af\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+B,$$

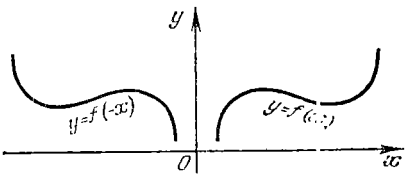


Рис. 57.

то сжатием к оси ординат в отношении $1:\frac{1}{a}$ из графика функции $y=f(x)$ получим график функции $y=f(ax)$. Из этого графика сжатием к оси абсцисс в отношении $1:A$ получим график функции $y=Af(ax)$, из которого параллельным переносом $\boldsymbol{r}(-b/a;\ B)$ получим график функции $y=Af(ax+b)+B$.

§ 5. Элементарные функции и их графики

1. *Линейной функцией* называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — некоторые действительные числа. Она определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Если $k\neq 0$, то ее множеством значений является все множество $\mathbb{R}$, если же $k=0$, то множество значений состоит из одного числа b.

Функция $y=kx+b$ является монотонной: при $k>0$ она возрастает на $\mathbb{R}$, при $k<0$ она убывает, а при $k=0$ она постоянная.

Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая, проходящая через точку $(0;\ b)$ с угловым коэффициентом k. При $k\neq 0$ эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $x=-b/k$, а при $k=0$ она параллельна оси абсцисс.

На рис. 58 изображены графики прямых $y=x$, $y=2$, $y=-2x+1$.

2. *Квадратичной функцией* называется функция вида

$$y=ax^2+bx+c,$$

где a, b, c — некоторые действительные числа, причем $a\neq 0$. Она определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и принимает действительные значения.

Простейшей квадратичной функцией является функция вида $y=ax^2$, где $a>0$. Эта функция является четной, неотрицательной и принимает любое значение из множества $[0; +\infty[$. На промежутке $]-\infty; 0[$ она убывает, а на промежутке $[0, +\infty[$ возрастает. Точка $x=0$ является точкой минимума. При любом $a>0$ график функции $y=ax^2$ получается из графика функции $y=x^2$ сжатием к оси абсцисс в отношении $1:a$.

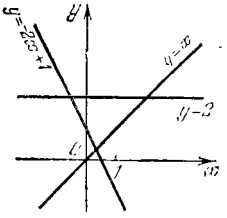


Рис. 58.

График функции $y=ax^2$, где $a<0$, получается из графика функции $y=|a|x^2$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс. При $a<0$ функция $y=ax^2$ на промежутке $]-\infty; 0[$ возрастает, а на $]0; +\infty[$ убывает. Точка $x=0$ является ее точкой максимума.

На рис. 59 изображены графики функций $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=-x^2/3$.

При любом $a\neq 0$ функция $y=ax^2$ является четной, и поэтому ось Oy является осью симметрии графика этой функции. График функции $y=ax^2$ называется *параболой*, точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется *вершиной* параболы. Очевидно, что у параболы, заданной уравнением $y=ax^2$, вершина находится в точке $O(0; 0)$. Ветви параболы при $a>0$ направлены вверх, при $a<0$ — вниз.

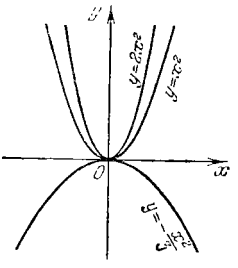


Рис. 59.

Покажем, что графиком любой квадратичной функции является парабола с вершиной в некоторой точке $M_0(x_0; y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси ординат. Действительно, так как

$$ax^2+bx+c=$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

то график функции $y=ax^2+bx+c$ получается из графика функции $y=ax^2$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Таким образом, вершина параболы, заданной уравнением $y=ax^2+bx+c$, находится в точке с координатами

$$x_0=-b/2a, \quad y_0=(4ac-b^2)/4a.$$

Осью симметрии является прямая $x=-b/2a$, причем ветви параболы направлены вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$.

Пример 1. Построить график функции $y=-2x^2+4x+1$.

△ Так как

$$y=-2x^2+4x+1=-2(x^2-2x)+1=-2(x-1)^2+3$$

то график данной функции получается из графика функции $y=-2x^2$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(1;\ 3)$. Таким образом, графиком данной функции является парабола, у которой ветви направлены вниз и вершина лежит в точке $M_0(1;\ 3)$ (рис. 60). ▲

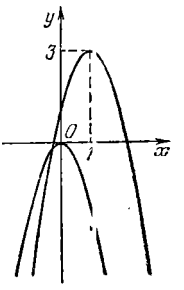


Рис. 60.

3. *Дробно-линейная функция* задается формулой

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — некоторые действительные числа. Очевидно, что если $c=d=0$, то формула (1) не задает никакой функции. Если же $c=0$, $d\neq 0$, то получается линейная функция

$$y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}.$$

Поэтому будем считать, что дробно-линейная функция задается формулой (1), где $c\neq 0$, и определена для всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=-d/c$. В этом случае правую часть формулы (1) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{x+\frac{d}{c}}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что функция, заданная формулой (1), где $bc-ad=0$, во всех точках определения принимает постоянное значение a/c. Эта функция отличается от постоянной функции лишь тем, что она не определена в точке $-d/c$.

Предыдущее исследование делает естественным следующее определение: *дробно-линейной функцией* называется функция вида (1), где $c\neq 0$ и $bc-ad\neq 0$.

Из формулы (2) следует, что график дробно-линейной функции (1) получается параллельным переносом $\boldsymbol{r}(-d/c;\ a/c)$ из графика функции

$$y=\frac{k}{x}, \quad \text{где} \quad k=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

Как известно, графики функций вида $y=k/x$, где $k\neq 0$, называются *гиперболами*. Из формулы (2) следует, что графиком любой дробно-линейной функции является гипербола.

Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой гиперболы $y=k/x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, а прямая $x=0$ является ее вертикальной асимптотой. Из (2) следует, что прямая $y=a/c$ является горизонтальной асимптотой графика дробно-линейной функции (1) при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, а прямая $x=-d/c$ является вертикальной асимптотой.

4. *Показательной функцией* называется функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Показательная функция определена на всей числовой прямой и взаимно однозначно отображает интервал $]-\infty;\ +\infty[$ на интервал $]0;\ +\infty[$.

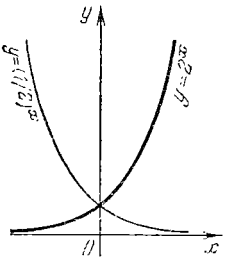


Рис 61

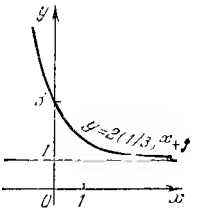


Рис. 62.

При $a>1$ функция $y=a^x$ возрастает, при $0<a<1$ — убывает.

Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=a^x$ при $x\to-\infty$, если $a>1$, и, соответственно, при $x\to+\infty$, если $0<a<1$.

На рис. 61 изображены графики функций $y=2^x$, $y=(1/2)^x$.

Пример 2. Построить график функции

$$y=2\,(1/3)^x+1.$$

△ График данной функции получается параллельным переносом $\boldsymbol{r}(0;\ 1)$ из графика функции $y=2\,(1/3)^x$, который получается из графика показательной функции $y=(1/3)^x$ растяжением от оси абсцисс в два раза (рис. 62). Прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=2\,(1/3)^x+1$ при $x\to+\infty$. ▲

5. *Логарифмической функцией* называется функция вида

$$y=\log_a x, \tag{3}$$

где $a>0$, $a\neq 1$. Она определена только для положительных значений x и взаимно однозначно отображает интервал $]0;\ +\infty[$ на интервал $]-\infty;\ +\infty[$. Из определения логарифма числа по основанию a следует, что логарифмическая функция $\log_a x$ является обратной к показательной функции a^x.

Если $a>1$, то логарифмическая функция (3) возрастающая, а если $0<a<1$, то убывающая. График логарифмической функции пересекает ось абсцисс в точке $x=1$, а ось ординат не пересекает. Заметим, что график логарифмической функции (3) может

быть получен из графика функции $y=a^x$ зеркальным отражением относительно прямой $y=x$.

На рис. 63 изображены графики функций $y=\log_2 x$ и $\log_{1/2} x$.

Пример 3. Построить график функции

$$y=\log_{1/3}|27x-54|. \tag{4}$$

△ Так как

$$y=\log_{1/3}27|x-2|=-3+\log_{1/3}|x-2|,$$

то график данной функции получается параллельным переносом $r(2;-3)$ из графика функции

$$y=\log_{1/3}|x|. \tag{5}$$

Эта функция определена для всех $x\neq 0$ и является четной. Следовательно, часть ее графика, соответствующая $x<0$, получается из графика функции $y=\log_{1/3}x$, где $x>0$, зеркальным отражением относительно оси ординат. На рис. 64 изображен график функции $y=\log_{1/3}|x|$, а на рис. 65 — график функции $y=\log_{1/3}|27x-54|$. ▲

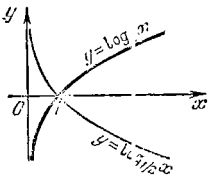


Рис. 63.

6. *Степенной функцией* с показателем p называется функция, задаваемая формулой

$$y=x^p, \tag{6}$$

где p — некоторое действительное число.

Сделаем несколько замечаний относительно естественной области определения функции, задаваемой формулой (6).

Из определения степени следует, что если p — натуральное число, то формула (6) определяет функцию на всей числовой прямой. В частности, при $p=1$ получается линейная функция,

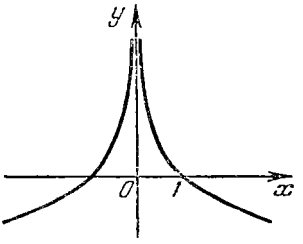


Рис. 64.

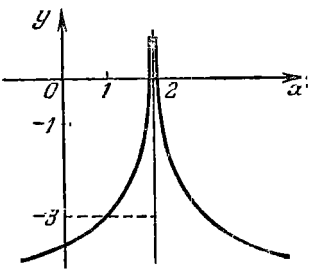


Рис. 65.

а при $p=2$ — квадратичная функция. Если p — целое отрицательное число, то функция (6) определена для всех действительных значений x, кроме $x=0$. В частности, если $p=-1$, то функция (6) является простейшей дробно-линейной функцией.

Если p не является целым числом, то степень x^p в общем случае определена лишь для $x > 0$. Например, функция $y = x^{1/2}$ определена на бесконечном промежутке $[0; +\infty[$, а функция $y = x^{-1/2}$ определена на бесконечном промежутке $]0; +\infty[$. На рис. 66 изображены графики этих функций.

Таким образом, естественная область определения функции, задаваемой формулой (6), существенно зависит от показателя p.

Однако следует заметить, что на практике часто под областью определения степенной функции понимается естественная область определения соответствующей формулы. Например, естественно считать, что функция $y = x^{1/3}$, являющаяся обратной к функции $y = x^3$, определена на всей числовой прямой.

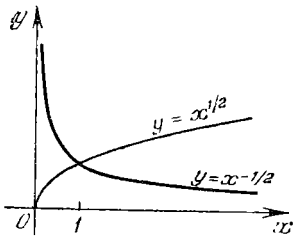


Рис. 66.

7. Основными тригонометрическими функциями называются функции *синус, косинус, тангенс, котангенс*:

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Функция синус определена на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, является нечетной и периодической с наименьшим периодом 2π. График синуса называется *синусоидой* (рис. 67). Функция $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ возрастает от -1 до $+1$, на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ убывает от $+1$ до -1, и т. д. Так как функция $\sin x$

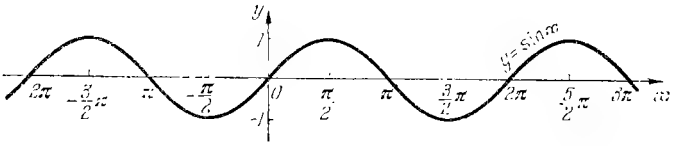


Рис. 67.

периодическая с периодом 2π, то ее график на любом отрезке $[\alpha + 2\pi n; \alpha + 2\pi(n+1)]$ длины 2π получается из ее графика на отрезке $[\alpha; \alpha + 2\pi]$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(2\pi n; 0)$.

Функция косинус определена на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, является четной и периодической с наименьшим периодом 2π. На отрезке $[0; \pi]$ она убывает от $+1$ до -1, а на отрезке $[\pi; 2\pi]$ она возрастает от -1 до $+1$. Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то графиком функции $y = \cos x$ является синусоида, которая получается из синусоиды $y = \sin x$, изображенной на рис. 67, параллельным переносом $\boldsymbol{r}(-\pi/2; 0)$. График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 68.

Функция

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, т. е. кроме тех точек, в которых $\cos x$

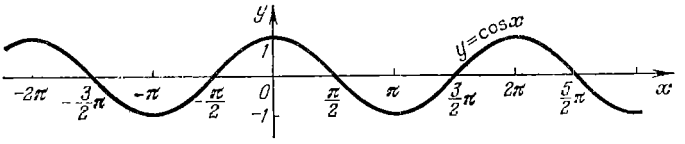


Рис. 68.

обращается в нуль. Функция $\operatorname{tg} x$ является нечетной и периодической с наименьшим периодом π. На интервале $]-\pi/2;\ \pi/2[$ она возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Прямые $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y=\operatorname{tg} x$. Так как функция $\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то ее график на любом интервале вида $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ получается из ее графика на $]-\pi/2;\ \pi/2[$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(n\pi;\ 0)$. График функции $y=\operatorname{tg} x$ изображен на рис. 69.

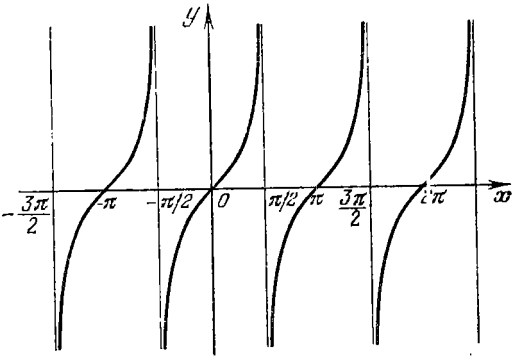


Рис. 69.

Функция

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел вида $n\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$. Функция $\operatorname{ctg} x$ является нечетной и периодической с наименьшим периодом π. На интервале $[0;\ \pi]$ она убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Прямые $x=0$, $x=\pi$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y=\operatorname{ctg} x$. Так как функция $\operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π, то ее график на любом интервале $]n\pi;\ (n+1)\pi[$ получается из ее графика на $]0;\ \pi[$ параллельным переносом $\boldsymbol{r}(n\pi;\ 0)$.

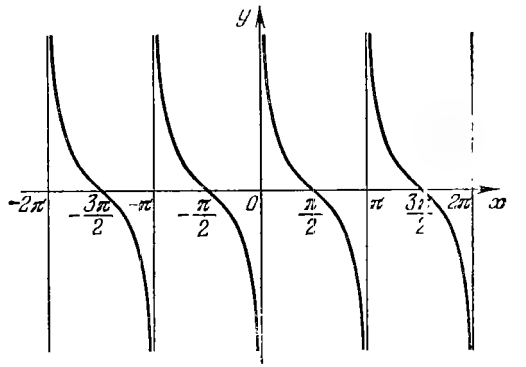


Рис. 70.

График функции $y=\operatorname{ctg} x$ изображен на рис. 70.

Пример 4. Построить график функции $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

△ Так как

$$y=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

то искомый график получается из графика функции $y=\sin x$ последовательным применением следующих преобразований: 1) сжатием к оси ординат в два раза из синусоиды $y=\sin x$ получается

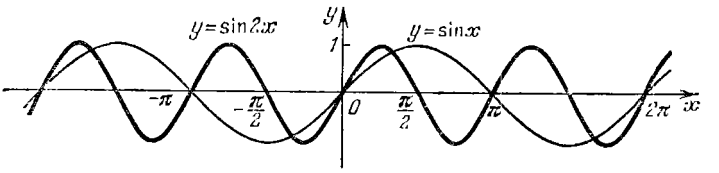


Рис. 71.

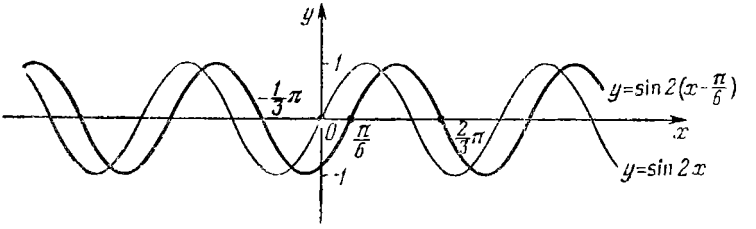


Рис. 72.

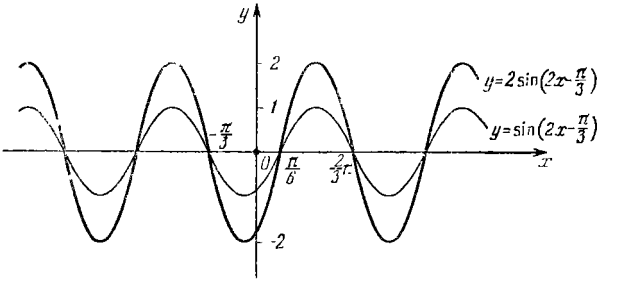


Рис. 73.

график функции $y=\sin 2x$, который называется синусоидой с периодом π (рис. 71), 2) параллельным переносом $\boldsymbol{r}(0;\ \pi/6)$ из синусоиды $y=\sin 2x$ получается график функции $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 72), 3) растяжением от оси абсцисс в два раза из синусоиды $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ получается искомый график (рис. 73). Он также называется синусоидой. ▲

Вообще, график функции $y = A\sin\omega(x-\alpha)$, где $A>0$ и $\omega>0$, называется *синусоидой с периодом* $2\pi/\omega$, *амплитудой* A и *начальной фазой* α.

§ 6. Построение графиков функций

При построении графиков функций целесообразно действовать по следующей схеме.

1. Найти область определения функции (если она не указана).
2. Установить, является ли функция четной или нечетной.
3. Установить, является ли функция периодической.
4. Найти асимптоты.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Найти экстремумы функции.

Данные исследования функций сразу же по мере их получения наносим на чертеж.

Пример 1. Построить график функции

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}. \qquad (1)$$

Δ Функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой и является четной, так как $f(x)=f(-x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ не является периодической.

Так как

$$f(x)=1-\frac{2}{x^2+1}\to 1 \quad \text{при} \quad x\to+\infty \quad \text{и при} \quad x\to-\infty,$$

то прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Заметим, что $f(x)<1$ для любого $x\in\mathbb{R}$ и, следовательно, график функции $f(x)$ расположен ниже прямой $y=1$. Так как функция $\frac{2}{x^2+1}$ на интервале $]0;+\infty[$ убывает, то функция $f(x)=1-\frac{2}{x^2+1}$ возрастает на этом интервале. На интервале $]-\infty;0[$ функция $\frac{2}{x^2+1}$ возрастает, а потому функция $f(x)=1-\frac{2}{x^2+1}$ убывает на интервале $]-\infty;0[$.

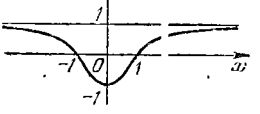


Рис. 74

График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точках $x=1$ и $x=-1$, а ось ординат в точке $y=-1$.

Функция $\frac{2}{x^2+1}$ принимает наибольшее значение при $x=0$, следовательно, функция $f(x)$ при $x=0$ принимает наименьшее значение, равное -1.

График функции (1) изображен на рис. 74. ▲

Пример 2. Построить график функции

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

△ Функция $f(x)$ определена для всех $x\neq 0$ и является нечетной, так как $f(x)=-f(-x)$ для любого $x\neq 0$. Функция $f(x)$ не является периодической. Действительно, любое число $T>0$ принадлежит ее области определения, а число $T-T=0$ не принадлежит области определения, следовательно, никакое число $T>0$ не может являться периодом функции $f(x)$.

Построим график функции $f(x)$ для $x>0$. Так как

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой, а прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$.

На промежутке $]0;\ 1]$ функция $f(x)$ убывает, а на $[1;\ +\infty[$ возрастает. Действительно, пусть $0<x_1<x_2$, тогда

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)-\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

Отсюда следует, что если $0<x_1<x_2\leqslant 1$, то $1-\frac{1}{x_1x_2}<0$ и, следовательно, $f(x_2)<f(x_1)$. Если же $1\leqslant x_1<x_2$, то $1-\frac{1}{x_1x_2}>0$ и $f(x_2)>f(x_1)$. Так как на $]0;\ 1[$ функция $f(x)$ убывает, а на $[1;\ +\infty[$ возрастает, то точка $x=1$ является точкой минимума функции: $f(x)>f(1)=2$ для любого $x>0$, $x\neq 1$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 75. ▲

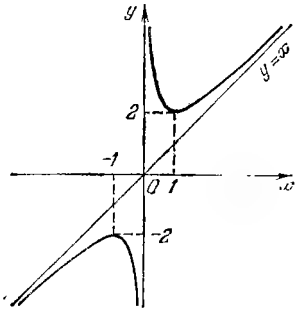


Рис. 75.

Пример 3. Построить график функции

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}. \qquad (2)$$

Функция (2) определена для всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=0$. Если $x>0$, то $e^{1/x}>1$ и, следовательно, $f(x)<1/2$. На интервале $]0;\ +\infty[$ функция $e^{1/x}$ убывает, и поэтому функция $f(x)$ возрастает, причем

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=1/2$ является горизонтальной асимптотой графика функции (2) при $x\to+\infty$, причем график функции (2) при $x>0$ лежит ниже этой прямой. Если $x<0$, то $e^{1/x}<1$ и, следовательно, $f(x)>1/2$. Функция $e^{1/x}$ убывает на интервале $]-\infty;\ 0[$, и поэтому функция $f(x)$ возрастает, причем

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{2}.$$

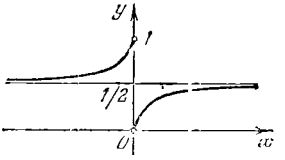


Рис. 76.

Следовательно, прямая $x=1/2$ является горизонтальной асимптотой графика функции (2) при $x\to-\infty$, причем график функции (2) при $x<0$ лежит над асимптотой. График функции (2) изображен на рис. 76.

§ 7. Применение производной к исследованию функций и построению их графиков

При исследовании функций и построении их графиков широко используются производные. С их помощью у заданной функции находятся интервалы возрастания и убывания и точки экстремумов.

Справедливы следующие утверждения.

Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала имеет положительную производную $f'(x)$, то она возрастает на этом интервале, а если отрицательную производную, то $f(x)$ убывает.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x. \tag{1}$$

△ Данная функция определена и имеет производную на всей числовой прямой. Так как

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),$$

то $f'(x)>0$ на интервалах $]-\infty;\ 1[$ и $]2;\ +\infty[$ и $f'(x)<0$ на интервале $]1;\ 2[$. Следовательно, функция (1) возрастает на интервалах $]-\infty;\ 1[$ и $]2;\ +\infty[$ и убывает на интервале $]1;\ 2[$.

Ответ: $]-\infty;\ 1[$, $]2;\ +\infty[$ — интервалы возрастания, $]1;\ 2[$ — интервал убывания функции (1). ▲

Промежутки, на которых функция возрастает или убывает, называется ее *промежутками монотонности*.

Пример 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}. \tag{2}$$

△ Функция (2) определена для всех положительных $x\neq1$, т. е. на интервалах $]0;\ 1[$ и $]1;\ +\infty[$. Так как

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2},$$

то $f'(x) > 0$, если $x > e$, и $f'(x) < 0$, если $x < e$. Следовательно, функция (2) на интервалах $]0; 1[$, $]1; e[$ убывает, а на интервале $]e; +\infty[$ возрастает. Из непрерывности функции (2) в точке $x = e$ следует, что промежуток $]1; e]$ является промежутком убывания, а $[e; +\infty[$ — промежутком возрастания функции (2).

Ответ: $]0; 1[$, $]1; e]$ — промежутки убывания, $[e, +\infty[$ — промежуток возрастания функции (2). ▲

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что эта функция определена в δ-окрестности $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0 и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности. Если же $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$, то точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* данной функции.

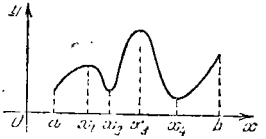


Рис. 77.

Для функции, график которой изображен на рис. 77, точки x_1, x_3 — точки максимума, а точки x_2, x_4 — точки минимума. Точки a и b не являются точками экстремума этой функции, так как у них нет окрестностей, целиком входящих в область определения функции.

Для функции $f(x) = |x|$, определенной на всей числовой прямой, $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ для любого $x \neq 0$, и поэтому точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = |x|$.

Для функции $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ точка $x = 1$ является точкой максимума, так как $f(x) < f(1) = 3$ для любого $x \neq 1$.

Функция $f(x) = \sin(1/x)$, $x > 0$, имеет бесконечное множество точек экстремума. Действительно, каждая точка x, удовлетворяющая условию $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, является ее точкой максимума, а каждая точка x, удовлетворяющая условию $\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, — ее точкой минимума. Экстремумы этой функции во всех точках максимума равны 1, а в точках минимума равны -1.

Для нахождения точек экстремума заданной функции важную роль играет теорема Ферма:

Если точка x_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Из теоремы Ферма следует, что точки экстремума заданной функции следует искать среди точек, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Точки экстремума функции являются ее критическими точками. Однако не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Например, точка $x=0$ для функции $f(x)=x^3$ является критической, так как $f'(0)=0$, но, очевидно, не является точкой экстремума.

Пример 3. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=xe^{-x}$.

△ Данная функция определена и имеет производную для всех $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x).$$

Из уравнения $f'(x)=0$ находим критические точки функции $f(x)$. У данной функции существует одна критическая точка $x=1$. Так как $f'(x)>0$ для $x<1$ и $f'(x)<0$ для $x>1$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $]-\infty;\ 1[$ и убывает на интервале $]1;\ +\infty[$. Следовательно, точка $x=1$ является точкой максимума функции $f(x)$.

Ответ: $f(x)$ возрастает на $]-\infty;\ 1[$, убывает на $]1;\ +\infty[$; $x=1$ — точка максимума. ▲

При исследовании точек экстремума функции удобно пользоваться следующими достаточными условиями для точек максимума и минимума.

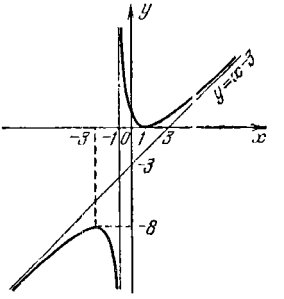


Рис. 78.

Точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$, если у точки x_0 существует такая окрестность, что в ней $f(x)$ непрерывна,

$$f'(x)>0 \quad для \quad x<x_0$$

и

$$f'(x)<0 \quad для \quad x>x_0.$$

Если же $f'(x)<0$ для $x<x_0$ и $f'(x)>0$ для $x>x_0$, то x_0 — точка минимума.

В разобранных выше примерах было показано, как применяется производная к нахождению интервалов возрастания и убывания и точек минимума и максимума у данной функции.

Если все эти исследования проведены, то, очевидно, можно более точно изобразить график этой функции.

Пример 4. Построить график функции

$$y=\frac{(x-1)^2}{x+1}. \tag{3}$$

△ Функция (3) определена для всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=-1$. Она не является ни четной, ни нечетной и не является периодической. Ее график пересекает оси координат в точках (0; 1) и (1; 0). Так как $y(x)\to-\infty$ при $x\to-1-0$ и $y(x)\to+\infty$ при $x\to-1+0$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой. Других вертикальных асимптот нет. Для нахождения наклонных

асимптот заметим, что

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

Следовательно, прямая $y = x - 3$ является асимптотой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Найдем производную

$$y' = \frac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Точки $x = -3$, $x = 1$ являются критическими для функции (3): в них производная обращается в нуль.

Легко видеть, что $y'(x) > 0$ для $x < -3$, $y'(x) < 0$ для $x \in]-3; 1[$ и для $x \in]-1; 1[$, $y'(x) > 0$ для $x > 1$. Следовательно, функция (3) на промежутке $]-\infty; -3]$ возрастает от $-\infty$ до -8, на промежутке $[-3; -1[$ убывает от -8 до $-\infty$, на промежутке $]-1; 1]$ убывает от $+\infty$ до 0, на промежутке $[1; +\infty[$ возрастает от 0 до $+\infty$. Отсюда следует, что функция (3) при $x = -3$ имеет максимум, а при $x = 1$ — минимум. Составляем таблицу:

x	$]-\infty; -3[$	-3	$]-3; -1[$	$]-1; 1[$	1	$]1; +\infty[$
y	$]-\infty; -8[$	-8	$]-8; -\infty[$	$]+\infty; 0[$	0	$]0; +\infty[$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

График функции (3) изображен на рис. 78. ▲

§ 8. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и пусть $x_1, \ldots, x_k$ — критические точки функции $f(x)$, т. е. точки, в которых функция не имеет производной, и точки, в которых производная равна нулю. Тогда на каждом из интервалов $]a; x_1[, \ldots,]x_k; b[$ производная $f'(x)$ сохраняет знак, и, следовательно, на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает. Поэтому наибольшее из чисел $f(a)$, $f(x_1), \ldots, f(x_k), f(b)$ является наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а наименьшее из этих чисел является наименьшим значением функции на $[a; b]$.

Заметим, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, находятся среди чисел $f(a)$, $f(x_1), \ldots, f(x_k)$, $f(b)$, где $x_1, \ldots, x_k$ — критические точки функции $f(x)$ на $]a; b[$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1: \qquad (1)$$

а) на отрезке $[0;\ 2]$; б) на промежутке $]-2;\ -1[$.

△ Функция (1) определена и имеет производную на всем множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. По правилам дифференцирования находим

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

Таким образом, функция (1) имеет две критические точки $x=1$ и $x=3$. Причем $f(x)$ на промежутке $]-\infty;\ 1]$ возрастает от $-\infty$ до $f(1)=5$, на $[1;\ 3]$ убывает от $f(1)=5$ до $f(3)=1$ и на $[3\ +\infty[$ возрастает от $f(3)=1$ до $+\infty$.

На интервале $]0;\ 2[$ функция (1) имеет одну критическую точку $x=1$. Следовательно,

$$\min_{x\in[0;\ 2]} f(x) = \min\{f(0);\ f(1);\ f(2)\} = \min\{1;\ 5;\ 3\} = 1,$$

$$\max_{x\in[0;\ 2]} f(x) = \max\{f(0);\ f(1);\ f(2)\} = 5.$$

На интервале $]-2;\ -1[$ функция (1) не имеет критических точек и возрастает. Следовательно, на множестве $[-2;\ -1[$ у функции (1) наименьшее значение равно $f(-2) = -49$. Однако среди значений функции $f(x)$, когда $x\in[-2;\ -1[$, нет наибольшего, так как точка $x=-1$ не принадлежит этому множеству.

Ответ: а) Наименьшее значение функции равно 1, наибольшее значение равно 5; б) наименьшее значение функции равно -49, наибольшего значения нет. ▲

Пример 2. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = 3x - \operatorname{tg} x, \qquad x\in[0;\ \pi/2[.$$

△ Данная функция непрерывна и имеет производную

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x\in\,]0;\ \pi/2[.$$

Она на интервале $]0;\ \pi/2[$ обращается в нуль в точке $x_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$, причем $f'(x)>0$ для $x<x_0$ и $f'(x)<0$ для $x>x_0$. Следовательно, точка $x_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$ является точкой максимума данной функции:

$$f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}.$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[0;\ \arccos(1/\sqrt{3})]$ возрастает, а на промежутке $[\arccos(1/\sqrt{3});\ \pi/2[$ убывает. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x) = 3x - \operatorname{tg} x$, $x\in[0;\ \pi/2[$, равно $3\arccos(1/\sqrt{3}) - \sqrt{2}$. ▲

Пример 3. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в данный конус.

△ Пусть задан конус с высотой H и радиусом основания R (рис. 79). Обозначим через h высоту цилиндра и через r радиус основания цилиндра, вписанного в данный конус. Обозначим $BM = x$. Тогда $h = PB = x \cdot \operatorname{tg} \widehat{KML} = x\,\frac{H}{R}$ и $r = R - x$. Объем

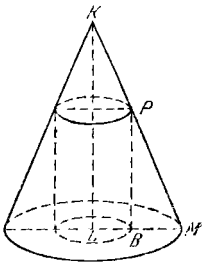


Рис. 79.

цилиндра V равен $\pi r^2 h$. В нашем случае

$$V(x) = \pi (R - x)^2 \frac{xH}{R}.$$

Определим, при каком значении x объем цилиндра будет принимать наибольшее значение. Найдем производную $V'(x)$:

$$V'(x) = \frac{\pi H}{R}(R - x)^2 + \frac{\pi H}{R} x \cdot 2 \cdot (R - x)(-1) =$$

$$= \frac{\pi H}{R}(R - x)(R - x - 2x) = \frac{\pi H}{R}(R - x)(R - 3x).$$

$V'(x) = 0$ при $x = R/3$. При $x < R/3$ производная $V'(x) > 0$ и $V'(x) < 0$ при $x > R/3$. Следовательно, в точке $x = R/3$ функция $V(x)$ имеет максимум. Так как x может меняться от нуля до R, причем $V(0) = V(R) = 0$, то число

$$V(R/3) = \frac{4}{27}\pi H R^2$$

является наибольшим значением объема вписанных цилиндров. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Определить, какие из нижеприведенных функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}, \quad f_2(x) = \sqrt{3x - 2},$$
$$f_3(x) = x^3 + 3\sin x, \quad f_4(x) = x^4 - 5\cos x,$$
$$f_5(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^x + 1}, \quad f_6(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

2. Исследовать на периодичность следующие функции и определить наименьший период, если он существует:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное;} \end{cases}$

б) $f(x) = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$.

3. Найти все асимптоты графиков следующих функций:

а) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 9}$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 8}$.

4. Построить графики следующих функций (не применяя производной);

а) $f_1(x) = x\left(|x - 1| + \frac{x}{3} - 1\right)$;

б) $f_2(x) = \lg(\sin x)$; в) $f_3(x) = 2^{\cos x}$.

5. Применяя производную, построить графики следующих функций:

а) $f(x)=\dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$;

б) $f(x)=x+e^{-x}$; в) $f(x)=\dfrac{6\sin x}{2+\cos x}$.

6. Найти интервалы монотонности и точки экстремумов функции

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x$ на отрезке $[1;\ 4]$.

8. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Определить, какие из приведенных ниже функций в области, где они определены, являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$f_1(x)=1+x^2-x^4, \qquad f_2(x)=x+x^3-3x^5,$$
$$f_3(x)=\sqrt{1+x}, \qquad f_4(x)=\sqrt{1-x^2},$$
$$f_5(x)=\sqrt{x^2-3x-4}, \qquad f_6(x)=\ln\frac{1-x}{1+x},$$
$$f_7(x)=3^x+3^{-x}, \qquad f_8(x)=x\sin 3x.$$

2. Представить следующие функции в виде суммы четных и нечетных функций в области, где они определены:

$$f_1(x)=\sin 5x+2^x\operatorname{tg}x, \qquad f_2(x)=x\ln|x|+\frac{x-1}{x+1},$$
$$f_3(x)=\frac{x^3+x^2+x}{x^4-1}, \qquad f_4(x)=\frac{3^x+x^2}{\sin x}.$$

3. Доказать, что производная четной функции нечетна, а производная нечетной функции четна.

4. Верны ли утверждения: а) если $f'(x)$ — четная функция, то $f(x)$ — нечетная функция, б) если $f'(x)$ — нечетная функция, то $f(x)$ — четная функция.

5. Существуют ли всюду определенные функции, являющиеся одновременно: а) четными и возрастающими на $\mathbb{R}$, б) нечетными и убывающими на $\mathbb{R}$, в) нечетными и положительными на $\mathbb{R}$?

6. Пусть задана функция $f(x)=e^x$, $x>0$. Доопределить функцию $f(x)$ в области $x\leqslant 0$ так, чтобы вновь полученная функция на множестве $]-\infty,+\infty[$ была: а) четной функцией, б) нечетной функцией.

7. Исследовать на периодичность следующие функции и определить наименьший период, если он существует:

$$f_1(x)=x^2+1, \qquad f_2(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\operatorname{tg}\frac{x}{3},$$
$$f_3(x)=\frac{\sin x}{[x/\pi]+1}, \qquad f_4(x)=3\cos 4x+5\sin 4x.$$

8. Может ли сумма двух непериодических всюду определенных функций быть периодической функцией?

9. Пусть задана дифференцируемая периодическая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $f'(x)$ — также периодическая функция на $\mathbb{R}$.

10. Найти все асимптоты графиков следующих функций:

1) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; 2) $f_2(x) = \dfrac{2^x}{3x-2}$;

3) $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-x}$; 4) $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

5) $f_5(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$; 6) $f_6(x) = \dfrac{\{x\}}{[x]}$, где $\{x\} = x - [x]$.

11. Построить графики следующих функций (не применяя производной):

1) $f_1(x) = e^{1/\sin x}$; 2) $f_2(x) = \cos(\ln x)$;

3) $f_3(x) = \arcsin(\sin x)$; 4) $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{[x/\pi]+0{,}5}$;

5. $f_5(x) = r(x)$, где $r(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа.

12. Применяя производную, построить графики следующих функций:

1) $f_1(x) = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$; 2) $f_2(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

3) $f_3(x) = (1+x)\,|x|^{2/3}$; 4) $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$;

5) $f_5(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; 6) $f_6(x) = \ln x/\sqrt{x}$.

13. Найти все значения a, при которых функция

$$f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1$$

возрастает на $\mathbb{R}$.

14. Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка максимума и точка минимума функции $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$. При каких a $x_1^2 = x_2$?

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$$

на отрезке $[-3; 6]$.

16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \log_{1/3}(x^2+x-2)$ на отрезке $[3; 6]$.

17. Найти экстремумы функции $f(x) = (x-3)e^{|x+1|}$ на интервале $]-2; 4[$, а также наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-2; 4]$.

18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

19. Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

20. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине l медианы, проведенной к его боковой стороне.

Глава VII

ВЕКТОРЫ

§ 1. Некоторые необходимые определения и обозначения

Любая лежащая на прямой точка A разбивает ее на два луча с началом в точке A. Луч с началом в точке A, на котором лежит точка B, обозначается $[AB)$ (рис. 80).

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если их пересечение есть луч, и называются *противоположно направленными*, если их пересечение лучом не является. Например, на рис. 81 лучи $[AB)$ и $[BC)$ сонаправлены, а лучи $[AB)$ и $[CB)$ — противоположно направлены.

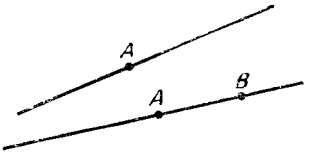


Рис. 80.

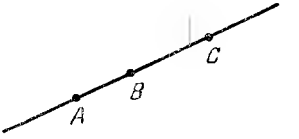


Рис. 81.

Если два луча лежат на параллельных несовпадающих прямых, то они лежат в некоторой плоскости. Прямая, проходящая через их начала, делит эту плоскость на две полуплоскости. Если эти

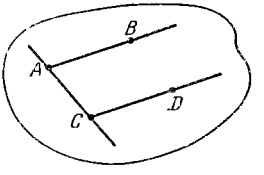


Рис. 82.

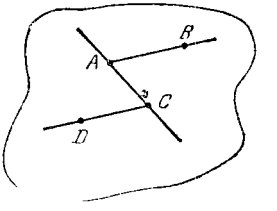


Рис. 83.

лучи лежат в одной полуплоскости, они называются *сонаправленными* (рис. 82), если в разных полуплоскостях — *противоположно направленными* (рис. 83). То, что лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены, обозначается так:

$$[AB) \uparrow\uparrow [CD).$$

Если лучи $[AB)$ и $[CD)$ противоположно направлены, то пишут

$$[AB) \uparrow\downarrow [CD).$$

Очевидно, что два луча, порознь сонаправленные третьему, сонаправлены друг другу.

Параллельным переносом пространства (плоскости), определяемым упорядоченной парой (A, B) несовпадающих точек, называется такое преобразование пространства (плоскости), при котором каждая точка M отображается на такую точку N, что луч $[MN)$ сонаправлен лучу $[AB)$ и расстояние $|MN|$ равно расстоянию $|AB|$. Другими словами, все точки пространства (плоскости) смещаются в направлении луча $[AB)$ на расстояние $|AB|$ (рис. 84).

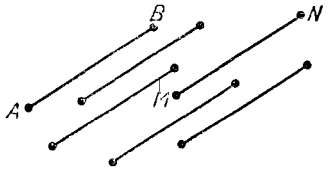


Рис. 84.

Тождественное преобразование, отображающее каждую точку на себя, называется параллельным переносом на нулевое расстояние.

Свойства параллельного переноса

1. *Параллельный перенос есть перемещение, т. е. отображение, сохраняющее расстояния.*

2. *Параллельный перенос отображает прямую на параллельную ей прямую, луч на сонаправленный ему луч.*

Параллельный перенос пространства отображает плоскость на параллельную ей плоскость.

3. *Композиция двух параллельных переносов (т. е. два параллельные переноса, выполненные последовательно) есть параллельный перенос.*

4. *Отображение, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.*

Угол между лучами. Пусть два луча l_1 и l_2 не сонаправлены и не противоположно направлены (рис. 85). Из произвольной точки O выходит единственный луч $[OA)$, сонаправленный

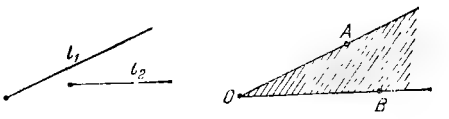


Рис. 85.

с лучом l_1, и единственный луч $[OB)$, сонаправленный с лучом l_2. Лучи $[OA)$ и $[OB)$ ограничивают выпуклый угол AOB, величина которого меньше 180°. Если же лучи l_1 и l_2 противоположно направлены, то лучи $[OA)$ и $[OB)$, им сонаправленные и имеющие

общее начало, ограничивают два выпуклых развернутых угла (рис. 86).

Углом между лучами l_1 *и* l_2 называется *величина* выпуклого угла между любыми двумя лучами, имеющими общее начало и сонаправленными с данными.

Так, углом между лучами l_1 и l_2 на рис. 85 является величина угла AOB, а угол между лучами l_1 и l_2 на рис. 86 равен 180°.

Рис. 86

Независимость угла между лучами от выбора точки сонаправленных с ними лучей следует из теоремы:

Если стороны двух выпуклых углов соответственно сонаправлены, то эти углы конгруэнтны.

Угол между сонаправленными лучами полагается равным 0°. Таким образом, угол между лучами может принимать значения от 0° до 180°.

§ 2. Векторы, их обозначение и изображение. Коллинеарные и компланарные векторы

Вектором называется параллельный перенос. Для обозначения векторов используются символы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ и т. п. Векторы рассматриваются на плоскости (параллельный перенос плоскости) и в пространстве (параллельный перенос пространства). И в том и в другом случае вектор определяется упорядоченной парой точек, т. е. заданием точки и ее образа.

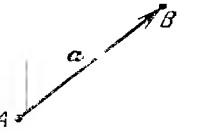


Рис. 87.

Вектор $\boldsymbol{a}$, определяемый упорядоченной парой (A, B) несовпадающих точек, изображается *направленным отрезком* (стрелкой) с *началом* в точке A и *концом* в точке B (рис. 87). Этот вектор $\boldsymbol{a}$ обозначается также $\overrightarrow{AB}$ и пишется $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. По определению вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ отображает каждую точку M на такую точку N, что луч $[MN)$ сонаправлен с лучом $[AB)$ и $|MN|=|AB|$. Направление луча $[AB)$ называется *направлением* вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. Расстояние $|AB|$ называется *длиной* или *модулем* вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\boldsymbol{a}|$).

Если $[MN)\uparrow\uparrow[AB)$ и $|MN|=|AB|$, то вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ обозначается также $\overrightarrow{MN}$ и изображается направленным отрезком с началом в точке M и концом в точке N. Очевидно, при изображении

вектора направленным отрезком за его начало может быть взята любая точка, т. е. вектор имеет бесчисленное множество изображений. Например, на рис. 88 вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ изображен направленными отрезками PQ, AB, MN, OO_1.

Построение направленного отрезка MN такого, что $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}$, называется *откладыванием* вектора $\boldsymbol{a}$ от точки M.

Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются обозначениями одного и того же вектора, то пишут $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и говорят, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *равны*. Подчеркнем, что равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает

$$|AB| = |CD| \text{ и } [AB) \uparrow\uparrow [CD).$$

Параллельный перенос на нулевое расстояние называется *нулевым вектором* и обозначается **0**. Нулевой вектор отображает каждую точку на себя, поэтому он обозначается также $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ и т. п. Длина нулевого вектора равна нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

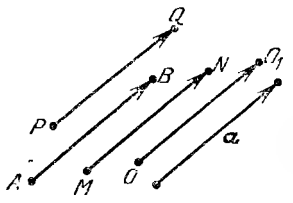


Рис. 88.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (обозначается $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), если сонаправлены лучи $[AB)$ и $[CD)$, и называются *противоположно направленными* (обозначается $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), если лучи $[AB)$ и $[CD)$ противоположно направлены.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они сонаправлены или противоположно направлены. Ясно, что коллинеарные векторы изображаются параллельными направленными отрезками.

На рис. 89 изображена трапеция $ABCD$, MN — ее средняя линия. Векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NM}$ коллинеарны: $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NM}$.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Будем говорить, что ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости, если прямая AB параллельна этой плоскости.

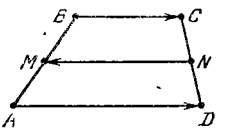


Рис. 89.

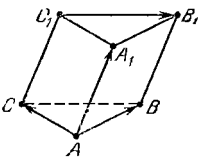


Рис. 90.

Ненулевые векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Любые два вектора всегда компланарны, а три вектора могут не быть компланар-

ными. На рис. 90 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1B_1}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ компланарными не являются.

§ 3. Сумма векторов. Противоположный вектор. Разность векторов

Композиция двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор (свойство 3 параллельного переноса, § 1), который называется *суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Сумма ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ находится по *правилу треугольника* (рис. 91): от произвольной точки O откладывается вектор $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, от конца направленного отрезка OA, т. е. от точки A, откладывается вектор $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, тогда $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Правило треугольника сложения векторов легко запоминается в буквенной записи:

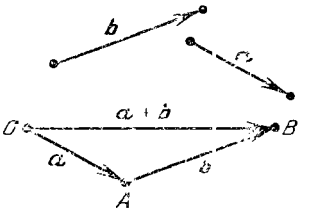


Рис. 91.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

(стрелочками внизу указана последовательность букв в записи вектора суммы).

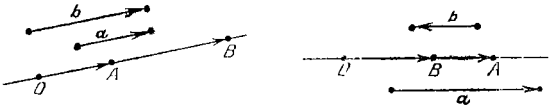


Рис. 92.

Заметим, что это правило применимо и в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (рис. 92).

Законы сложения векторов

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (переместительный закон).
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (сочетательный закон).
3. $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$.

Из переместительного закона следует *правило параллелограмма* сложения векторов: сумма двух неколлинеарных векторов есть вектор, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на направленных отрезках, изображающих данные векторы и имеющих общее начало (рис. 93).

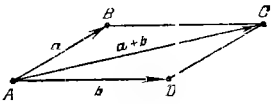


Рис. 93.

Сумма трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ определяется как сумма вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и вектора $\boldsymbol{c}$ (рис. 94). В силу сочетательного закона

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, поэтому сумма трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ записывается без скобок: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. Аналогично определяется сумма любого числа векторов, например $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$. На рис. 95 показано, как находится сумма векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ по *правилу многоугольника*.

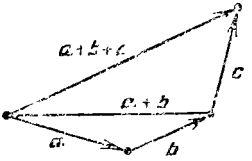


Рис. 94.

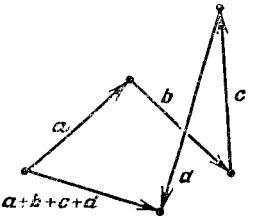


Рис. 95.

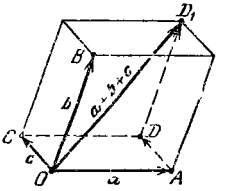


Рис. 96.

Если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, их сумма может быть найдена по *правилу параллелепипеда*: вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ изображается диагональю параллелепипеда, построенного на направленных отрезках, изображающих векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и имеющих общее начало (рис. 96). Действительно:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{OD_1}.$$

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ определяется упорядоченной парой точек (A, B): $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектор, определяемый упорядоченной парой точек (B, A), называется *противоположным* вектору $\boldsymbol{a}$ и обозначается $-\boldsymbol{a}$:

$$-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}.$$

Сумма вектора и ему противоположного вектора есть нулевой вектор (тождественное отображение):

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0 \text{ или } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0.$$

Очевидно, что длины вектора $\boldsymbol{a}$ и ему противоположного вектора $-\boldsymbol{a}$ равны, а направления этих векторов противоположны:

$$|\boldsymbol{a}|=|-\boldsymbol{a}|,\ \boldsymbol{a}\uparrow\downarrow(-\boldsymbol{a}).$$

Разностью $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется сумма вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора, противоположного вектору $\boldsymbol{b}$, т. е.

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Если $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ (рис. 97), то вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ изображается направленным отрезком BA:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

(стрелочки внизу указывают последовательность букв в записи вектора разности).

Заметим, что если на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенных от общего начала O, можно построить параллелограмм (рис. 98), то длина диагонали, имеющей то же начало O, равна длине вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а длина другой диагонали равна длине вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:

$$|OC|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|, \quad |BA|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

Если $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$. Действительно:

$$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}))+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+((-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}.$$

Это показывает, что слагаемые в векторных равенствах можно переносить из одной части равенства в другую, изменив стоящие перед этими слагаемыми знаки на противоположные.

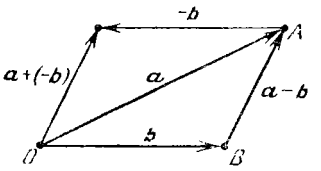


Рис. 97.

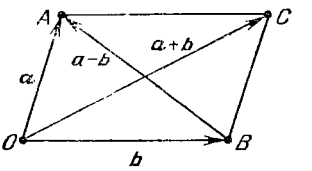


Рис 98

Пример 1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O (рис. 99). Найти сумму векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

△ Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам: $|OA|=|OC|$. Лучи $[OA)$ и $[OC)$ противоположно направлены, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ — противоположные, их сумма равна нулевому вектору: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$. Аналогично устанавливается, что $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$ — противоположные векторы. Итак, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\mathbf{0}$. ▲

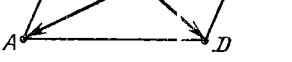


Рис. 99.

Пример 2. Доказать, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

△ Если один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ нулевой, то это неравенство, очевидно, выполняется. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые векторы, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ (рис. 91), тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. По свойству расстояний для любых трех точек O, A и B выполняется неравенство $|OB|\leqslant|OA|+|AB|$, поэтому $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

Заметим, что для различных точек O, A и B равенство $|OB|=|OA|+|AB|$ выполняется тогда и только тогда, когда точки O,

A и B лежат на одной прямой, причем точка A лежит между точками O и B. Следовательно, для ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ справедливо тогда и только тогда, когда они сонаправлены. ▲

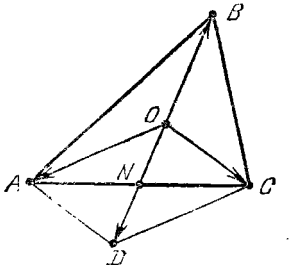


Рис. 100.

Пример 3. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O (рис. 100). Найти сумму векторов

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

△ Построим параллелограмм $AOCD$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, следовательно, $|OD|=2|ON|$, точка N — середина стороны AC, BN — медиана. Медианы треугольника, пересекаясь, делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, поэтому $|OB|=2|ON|$. Таким образом, $|OD|=|OB|$, а так как лучи $[OD)$ и $[OB)$ противоположно направлены, то $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$.

Итак,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}.\ ▲$$

§ 4. Умножение вектора на число. Признак коллинеарности

Произведением ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ на число $x\neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|x|\cdot|\boldsymbol{a}|$ и который сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}$ при $x>0$ и противоположно направлен при $x<0$. Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число x обозначается $x\cdot\boldsymbol{a}$.

Произведение нулевого вектора на любое число и произведение любого вектора на нуль по определению считается равным нулевому вектору:

$$x\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0},\quad 0\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

Законы умножения векторов на числа

1. $x(y\boldsymbol{a})=(xy)\,\boldsymbol{a}$ (*сочетательный закон*).
2. $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}=(x+y)\,\boldsymbol{a}$,
3. $x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, } (*распределительные законы*).
4. $0\cdot\boldsymbol{a}=x\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

Из определения произведения вектора на число получается следующий *признак коллинеарности*:

Вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда существует такое число x, что $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$.

Пример 1. Найти, на какое число x надо умножить ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы длина вектора $\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}$ была равна единице

и а) вектор $\boldsymbol{m}$ был сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}$; б) вектор $\boldsymbol{m}$ был противоположно направлен вектору $\boldsymbol{a}$?

△ а) $\boldsymbol{m} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$, когда $x > 0$; так как $|x| = x$ и $|\boldsymbol{m}| = x|\boldsymbol{a}|$ при $x > 0$, то из условия $|\boldsymbol{m}| = 1$ следует $x = 1/|\boldsymbol{a}|$.

б) $\boldsymbol{m} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$, когда $x < 0$; так как $|x| = -x$ при $x < 0$, то $|\boldsymbol{m}| = -x|\boldsymbol{a}|$. Из условия $|\boldsymbol{m}| = 1$ находим $x = -1/|\boldsymbol{a}|$. ▲

Заметим, что вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* или *ортом*.

Из признака коллинеарности следует, что для неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равенство $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ выполняется только тогда, когда $x = y = 0$. Действительно, предположим, например, что $x \neq 0$, тогда из $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ получим $\boldsymbol{a} = -\frac{y}{x}\boldsymbol{b}$, а это противоречит тому, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Следовательно, $x = 0$. Аналогично устанавливается, что $y = 0$.

Пример 2. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Найти, при каком x векторы $\boldsymbol{c} = (x-2)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = (2x+1)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ будут коллинеарны.

△ Вектор $\boldsymbol{c}$ ненулевой, так как коэффициент при $\boldsymbol{b}$ отличен от нуля, следовательно, существует такое число y, что $\boldsymbol{d} = y\boldsymbol{c}$, т. е.

$$(2x+1)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = y(x-2)\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}.$$

Как было сказано, слагаемые в векторном равенстве можно переносить из одной части в другую, изменяя знаки перед этими слагаемыми на противоположные, поэтому будем иметь

$$(yx - 2y - 2x - 1)\boldsymbol{a} + (y+1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, поэтому

$$yx - 2y - 2x - 1 = 0,$$
$$y + 1 = 0.$$

Решая эту систему, находим $y = -1$ и $x = 1/3$. При $x = 1/3$ векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ таковы: $\boldsymbol{c} = -\frac{5}{3}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d} = \frac{5}{3}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Как легко видеть, они противоположные: $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{c}$. ▲

§ 5. Условие компланарности векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ (рис. 101). Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, по определению параллелен плоскости OAB.

Если построить вектор $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, то точка C лежит в плоскости OAB, поэтому говорят, что любые три компланарные векторы можно перенести в одну плоскость.

Теорема. *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то любой компланарный с ними вектор $\boldsymbol{c}$ можно единственным образом представить в виде $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.*

Такое представление называется *разложением* вектора $\boldsymbol{c}$ на плоскости по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Пример 1. Дан параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 93). Разложить векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ по векторам $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.

△ Напомним, что $\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{AB}$ и $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$. Отсюда следует $2\vec{AD}=\vec{AC}+\vec{BD}$ и $2\vec{AB}=\vec{AC}-\vec{BD}$. Таким образом,

$$\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{BD}) \quad \text{и} \quad \vec{AB}=\frac{1}{2}(\vec{AC}-\vec{BD}). \ \blacktriangle$$

Пример 2. На стороне BC треугольника OBC расположена точка N так, что $|BN|:|BC|=n$ (рис. 102). Разложить вектор $\vec{ON}$ по векторам $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$.

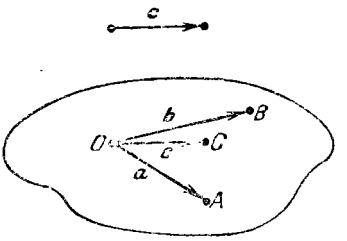


Рис. 101.

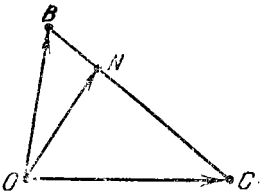


Рис. 102.

△ Векторы $\vec{BN}$ и $\vec{BC}$ коллинеарны и сонаправлены, следовательно, $\vec{BN}=x\vec{BC}$ и $x>0$. Поскольку $|BN|=n|BC|$, то $x=n$ и $\vec{BN}=n\vec{BC}$. Так как $\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}$ и $\vec{ON}=\vec{OB}+\vec{BN}$, то

$$\vec{ON}=\vec{OB}+n(\vec{OC}-\vec{OB})=n\vec{OC}+(1-n)\vec{OB}.$$

Заметим, что при $n=1/2$ точка N является серединой стороны BC, а ON — медианой треугольника. В этом случае

$$\vec{ON}=\frac{1}{2}(\vec{OC}+\vec{OB}). \ \blacktriangle$$

Нетрудно видеть, что справедливо обратное утверждение: если некоторый вектор $\boldsymbol{c}$ разложен по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Действительно, пусть $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. Если числа x и y отличны от нуля, то векторы $x\boldsymbol{a}$ и $y\boldsymbol{b}$ также неколлинеарны. Отложим эти векторы от некоторой точки O: $x\boldsymbol{a}=\vec{OA}$ и $y\boldsymbol{b}=\vec{OB}$. Тогда вектор $\boldsymbol{c}=\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Следовательно, точки O, A, B и C лежат в одной плоскости и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Если же одно из чисел, например x, равно нулю, то $\boldsymbol{c}=y\boldsymbol{b}$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{c}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}$ и потому компланарен с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, справедлив следующий *признак (критерий) компланарности* трех векторов:

если векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *неколлинеарны, то вектор* $\boldsymbol{c}$ *компланарен с векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда, когда имеет место разложение* $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.

Нулевой вектор по определению считается компланарным с любыми двумя векторами.

Теорема. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *некомпланарны, то любой вектор* $\boldsymbol{d}$ *можно единственным образом представить в виде* $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$.

Это представление называется *разложением* вектора $\boldsymbol{d}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

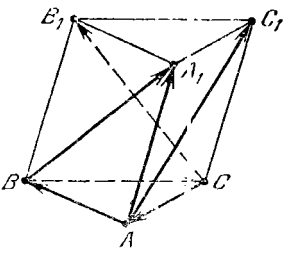


Рис. 103

Пример 3. Дана треугольная призма $ABC\,A_1B_1C_1$ (рис. 103). Разложить вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

△ По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}.$$

Складывая левые и правые части этих векторных равенств, получаем

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}.$$

Так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, то $3\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}$ и, следовательно,

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}). \ ▲$$

§ 6. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Углом между векторами $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CD}$ называется угол между лучами $[AB)$ и $[CD)$. Таким образом, если от одной точки отложить векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{ON}$ (рис. 104), то величина угла MON есть по определению угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Этот угол обозначается $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$.

Угол между векторами, как и угол между лучами, может принимать значения от 0° до 180°. Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°, а угол между противоположно направленными векторами равен 180°.

Если угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 90° (рис. 105), то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *перпендикулярными* или *ортогональными*. Перпендикулярность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые неколлинеарные векторы. Доказать, что вектор $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ образует равные углы с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

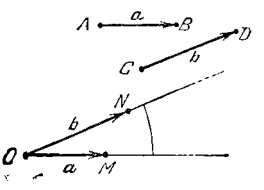


Рис. 104.

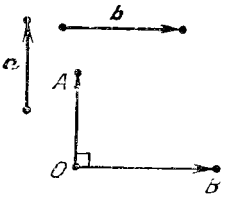


Рис. 105.

△ Векторы $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ и $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$ единичные: $|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{b}_1| = 1$. Отложим векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}_1$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}_1$, построим параллелограмм $OACB$ (рис. 106), тогда $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \boldsymbol{c}$. В параллелограмме $OACB$ длины сторон OA и OB равны, следовательно, $OACB$ — ромб и его диагональ OC является биссектрисой угла AOB. Отсюда заключаем, что вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ образует равные углы с векторами $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{OB}$ и с коллинеарными им векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и направлен по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. ▲

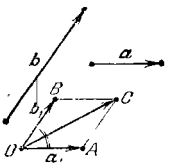


Рис. 106.

Скалярным произведением ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

Если один из векторов нулевой, то скалярное произведение по определению равно нулю: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Подчеркнем, что скалярное произведение есть число (когда рассматриваются векторы, числа часто называют скалярами).

Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату его длины: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

Скалярное произведение векторов положительно, если угол между ними острый, скалярное произведение отрицательно, если угол между векторами тупой.

Если угол между векторами равен 90°, то косинус этого угла равен нулю и скалярное произведение этих векторов также равно нулю. Верно и обратное утверждение: если скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Следовательно, *два ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение этих векторов равно нулю.*

Свойства скалярного произведения

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.
3. $(x\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.
4. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$.

Например, используя эти свойства, получим

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2.$$

Пример 2. Найти длину диагонали AC ромба $ABCD$ (рис. 107), у которого длины сторон равны 1 и угол BAD равен 30°.

△ По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Из свойств скалярного произведения следует

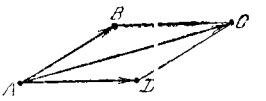


Рис. 107.

$$|\overrightarrow{AC}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2. \quad (1)$$

Так как $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$ и $(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}})=30°$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}/2$. Учитывая это, из (1) получаем $|\overrightarrow{AC}|^2=2+\sqrt{3}$, откуда находим $|AC|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. ▲

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые, то косинус угла между этими векторами находится по формуле

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \quad (2)$$

Пример 3. Длины ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что векторы $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

△ Так как векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=0$. Используя свойства скалярного произведения, получаем. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=5|\boldsymbol{a}|^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8|\boldsymbol{b}|^2$. Таким образом,

$$5|\boldsymbol{a}|^2+6\cdot|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})-8|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

откуда при $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ получаем

$$6|\boldsymbol{a}|^2\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})-3|\boldsymbol{a}|^2=0.$$

Поскольку $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, то, сокращая на $|\boldsymbol{a}|^2$, находим $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1/2$. Следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 60°. ▲

§ 7. Базис. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами

Три единичных взаимно перпендикулярных вектора, взятых в определенном порядке, называются *прямоугольным базисом* в пространстве (рис. 108). Векторы прямоугольного базиса принято обозначать $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (читается: $\boldsymbol{i}$ — «и», $\boldsymbol{j}$ — «жи», $\boldsymbol{k}$ — «ка»).

Каждый вектор можно единственным образом разложить по любым трем некомпланарным векторам (§ 4), поэтому каждый вектор $\boldsymbol{a}$ можно единственным образом представить в виде

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

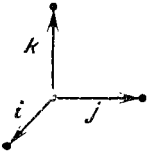


Рис 108

Числа x, y, z называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Если $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, то пишут $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$.

Например, $\boldsymbol{i} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{j} = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$, $\boldsymbol{0} = (0; 0; 0)$.

Пусть $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Из единственности разложения следует, что векторное равенство $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ равносильно системе трех скалярных равенств:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

Справедливы следующие правила действий над векторами, заданными своими координатами.

1. При сложении векторов $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2; z_2)$ их соответствующие координаты складываются:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

2. При умножении вектора $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$ на число все координаты вектора $\boldsymbol{a}$ умножаются на это число:

$$m\boldsymbol{a} = (mx; my; mz).$$

3. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

4. Длина вектора $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$ равна корню квадратному из сумм квадратов его координат:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пример 1. Найти координаты и длину вектора $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = (0; 3; 2)$ и $\boldsymbol{b} = (-2; 3; 2)$.

△ По правилам действий над векторами находим $2\boldsymbol{a} = (0; 6; 4)$, $3\boldsymbol{b} = (-6; 9; 6)$, и, наконец, $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (6; -3; -2)$. Теперь находим длину этого вектора: $|2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$. ▲

Пример 2. Найти, при каких m и n векторы $\boldsymbol{a}=(1\ m;-2)$ и $\boldsymbol{b}=(-2\ 3;\ n)$ коллинеарны.

△ Вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}\neq 0$ тогда и только тогда, когда существует число p такое, что $\boldsymbol{b}=p\boldsymbol{a}$. Для данных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ это векторное равенство равносильно системе $-2=p$, $3=mp$, $n=-2p$, из которой находим $p=-2$, $m=-3/2$, $n=4$.

Итак, $\boldsymbol{a}=(1;\ -3/2;\ -2)$; $\boldsymbol{b}=(-2;\ 3;\ 4)$. ▲

Пример 3. Найти, при каком значении m векторы $\boldsymbol{a}=(1;\ 3;\ -2)$ и $\boldsymbol{b}=(-1;\ m;\ 4)$ перпендикулярны.

△ Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда когда их скалярное произведение равно нулю. Так как $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-9+3m$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ при $m=3$. ▲

Пример 4. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{b}$, сонаправленного с вектором $\boldsymbol{a}=(2;\ -3;\ 6)$.

△ $\boldsymbol{b}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$ и $m>0$. Из условия $|\boldsymbol{b}|=1$, учитывая что $|\boldsymbol{b}|=|m|\,|\boldsymbol{a}|=m\,|\boldsymbol{a}|$ при $m>0$, находим $m=1/|\boldsymbol{a}|$. Вычисляем длину вектора $\boldsymbol{a}$: $|\boldsymbol{a}|=7$. Таким образом, $m=1/7$ и $\boldsymbol{b}=(2/7;\ -3/7;\ 6/7)$. ▲

Пример 5. Найти косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\boldsymbol{a}=(3;\ 6;\ -4)$.

△ Вычислим скалярные произведения вектора $\boldsymbol{a}$ с каждым из базисных векторов. Так как $\boldsymbol{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{j}=(0;\ 1;\ 0)$ и $\boldsymbol{k}=(0;\ 0;\ 1)$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=3$; $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=0$; $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=-4$. Длины базисных векторов равны 1, поэтому длина вектора $\boldsymbol{a}$: $|\boldsymbol{a}|=5$. Теперь по формуле (2) § 6 имеем

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i})}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{i}|}=\frac{3}{5},\quad \cos\widehat{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{j})}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{j}|}=0,$$

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{k})}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{k}|}=-\frac{4}{5}.$$ ▲

Рис. 109.

Векторы на плоскости. Два единичных перпендикулярных вектора, взятых в определенном порядке, называются *прямоугольным базисом* на плоскости (рис. 109). Базис на плоскости обозначается $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$.

Любой вектор $\boldsymbol{a}$ плоскости, на которой выбран базис $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$, единственным образом разлагается по базисным векторам: $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. Числа x и y называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$, пишется $\boldsymbol{a}=(x;\ y)$.

Пусть $\boldsymbol{a}=(x_1;\ y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2;\ y_2)$, тогда

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$.
2. $m\boldsymbol{a}=(mx_1;\ my_1)$.
3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.
4. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

Векторное равенство $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ равносильно системе двух скалярных равенств: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Пример 6. Определить угол между векторами $\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{7}{4}\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=(-1;\ 1)$ и $\boldsymbol{b}=(1;\ 3)$.

△ Находим координаты векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$

$$\boldsymbol{c}=(-4+1;\ 4+3)=(-3;\ 7),$$

$$\boldsymbol{d}=\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4};\ -\frac{1}{4}+\frac{21}{4}\right)=(2;\ 5).$$

Вычисляем длины векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ и их скалярное произведение: $c=\sqrt{58}$, $d=\sqrt{29}$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=29$. По формуле (2) § 6 находим

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})}=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{29}{\sqrt{58}\sqrt{29}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равен 45°. ▲

§ 8. Прямоугольная система координат. Уравнение плоскости

Если задана точка O и прямоугольный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, то говорят, что в пространстве задана *прямоугольная система координат* (рис. 110). Точка O называется *началом координат*. Начало координат и каждый из базисных векторов определяет *координатную ось*: вектор $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}$ определяет ось *абсцисс* (обозначается Ox), вектор $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}$ определяет ось *ординат* (Oy), вектор $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$ определяет ось *аппликат* (Oz). Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются *координатными плоскостями*.

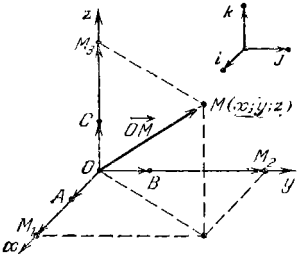


Рис. 110.

Для каждой точки M координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) называются *координатами точки* M в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Таким образом, если

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

то числа x, y, z есть координаты точки M; они называются: x — *абсциссой*, y — *ординатой*, z — *аппликатой* точки M. Координаты точки M пишутся в круглых скобках рядом с буквой: $M(x;\ y;\ z)$.

Если $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, то числа x, y и z являются координатами таких точек M_1, M_2 и M_3 соответственно на осях абсцисс, ординат и аппликат, что $\overrightarrow{OM}_1=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OM}_2=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OM}_3=z\boldsymbol{k}$ (см. рис. 110). Чтобы построить точку $M(x;\ y;\ z)$, надо построить векторы $\overrightarrow{OM}_1=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OM}_2=y\boldsymbol{j}$ и $\overrightarrow{OM}_3=z\boldsymbol{k}$ и вектор $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2+\overrightarrow{OM}_3$.

Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ и точки A и B заданы своими координатами: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, т. е. *чтобы найти координаты вектора,*

надо из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

Расстояние между точками A и B равно длине вектора $\vec{AB}$, поэтому

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 1. В треугольнике с вершинами в точках $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$ определить величину угла при вершине A.

△ Величина угла при вершине A равна углу между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ (рис. 111). Косинус угла φ между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ находится по формуле (2) § 6. Определяем координаты векторов $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$: $\vec{AC} = (-2; -4; 4)$, $\vec{AB} = (2; -1; 2)$. Теперь находим длины этих векторов и их скалярное произведение:

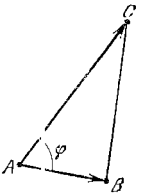


Рис. 111.

$$|\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6, \quad |AB| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3;$$
$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 8.$$

Тогда $\cos\varphi = 8/(6 \cdot 3) = 4/9$ и, следовательно, $\varphi = \arccos(4/9)$. ▲

Прямоугольная система координат на плоскости определяется аналогично — заданием точки O и прямоугольного базиса $(\vec{i}, \vec{j})$. Оси координат называются соответственно осями *абсцисс* и *ординат*. *Координатами точки* M называются координаты $(x; y)$ вектора $\vec{OM}$, пишется $M(x; y)$ (рис. 112).

Если точки заданы своими координатами: $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

и

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 2. Дана точка $A(-1, 1)$ и вектор $\boldsymbol{a} = (3; 2)$. Найти координаты такой точки B, что $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$.

△ Пусть $(x; y)$ — координаты точки B, тогда $\vec{AB} = (x + 1; y - 1)$, и если $\boldsymbol{a} = \vec{AB}$, то $x + 1 = 3$ и $y - 1 = 2$. Находим $x = 2$, $y = 3$. Тогда B имеет координаты $(2; 3)$. ▲

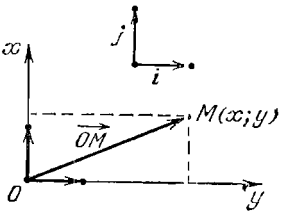


Рис. 112.

Пример 3. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(-4; 3)$ и $C(2; 2)$. Найти длину медианы AN.

△ Пусть O — начало координат, тогда $\vec{OB} = (-4; 3)$ и $\vec{OC} = (2; 2)$. Если N — середина стороны BC, то (см. пример 2 § 5) $\vec{ON} = (\vec{OB} + \vec{OC})/2$, откуда следует, что *координаты середины отрезка* BC *равны полусумме соответствующих координат точек* B *и* C. Находим

$ON = ((-4+2)/2;\ (3+2)/2)$, тогда $N(-1;\ 5/2)$ и $|AN| = \sqrt{(-1-1)^2 + \left(\frac{5}{2}-1\right)^2} = \frac{5}{2}$. ▲

Уравнение плоскости. В прямоугольной системе координат любое уравнение

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (1)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля, определяет плоскость. Верно и обратное; каждая плоскость может быть задана уравнением вида (1).

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0;\ 1;\ 5)$, $B(3;\ 0,\ 0)$ и $C(-1;\ 1;\ 6)$.

△ Пусть уравнение этой плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Координаты точек A, B и C удовлетворяют ему, следовательно,

$$\begin{aligned} b + 5c + d &= 0, \\ 3a + d &= 0, \\ -a + b + 6c + d &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим $d = -3a$. Подставляя это в первое и третье уравнения, получим систему

$$\begin{aligned} b + 5c &= 3a, \\ b + 6c &= 4a. \end{aligned}$$

Почленно вычитая из первого уравнения второе, получаем $c = a$, и тогда находим $b = -2a$. Уравнение плоскости имеет вид $ax - 2ay + az - 3a = 0$ или (так как a, b и c одновременно не равны нулю)

$$x - 2y + z - 3 = 0. \ ▲$$

Ненулевой вектор $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB}$ называется перпендикулярным плоскости, если прямая (AB) перпендикулярна этой плоскости.

Пусть вектор $\boldsymbol{n} = (a;\ b;\ c)$ перпендикулярен плоскости, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Тогда для любой точки $M_1(x;\ y;\ z)$ этой плоскости векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{MM_1}$ перпендикулярны, следовательно, $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{MM_1} = 0$. Записывая это скалярное произведение в координатах, получаем следующее уравнение плоскости:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \qquad (2)$$

которое, если положить $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, приводится к виду (1). Таким образом, уравнение $ax + by + cz + d = 0$ определяет плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n} = (a;\ b;\ c)$.

Пример 5. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (-2;\ 1;\ 3)$.

△ Подставляя в уравнение (2) координаты вектора $\boldsymbol{n}$ и координаты точки $M(0;\ 0;\ 0)$, получаем уравнение плоскости: $-2x + y + 3z = 0$. ▲

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \tag{3}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \tag{4}$$

Эти две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны перпендикулярные им векторы $\boldsymbol{n}_1=(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$, т. е. существует такое число $m\neq 0$, что $a_1=ma_2$; $b_1=mb_2$, $c_1=mc_2$. Плоскости, заданные уравнениями (3) и (4), перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны векторы $\boldsymbol{n}_1=(a_1,\ b_1;\ c_1)$ и $\boldsymbol{n}_2=(a_2;\ b_2;\ c_2)$, т. е. когда $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$.

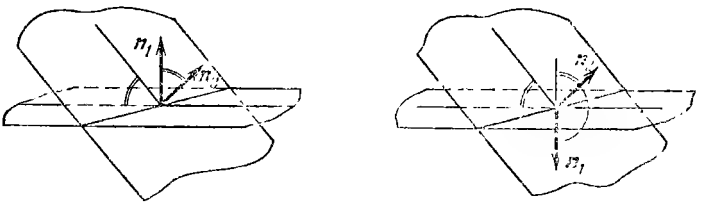


Рис. 113.

Пересекаясь, две плоскости образуют четыре двугранных угла, попарно равных по величине. *Углом α между плоскостями* называется величина меньшего из этих двугранных углов. Он равен углу φ между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, если $0\leqslant\varphi\leqslant 90°$ и равен $180°-\varphi$, если $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°$ (рис. 113). И в том и в другом случае $\cos\alpha=|\cos\varphi|$. Таким образом, косинус угла α между плоскостями, заданными уравнениями (3) и (4), находится по формуле

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}. \tag{5}$$

Пример 6. Найти угол между плоскостями

$$-3y+z+2=0 \quad \text{и} \quad 2y+z-5=0.$$

△ Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярные этим плоскостям, имеют координаты $\boldsymbol{n}_1=(0;\ -3;\ 1)$, $\boldsymbol{n}_2=(0;\ 2;\ 1)$. Найдем длины этих векторов и их скалярное произведение: $|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{5}$; $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-5$. Тогда по формуле (5) получаем $\cos\alpha=|-5|/(\sqrt{10}\sqrt{5})=1/\sqrt{2}$, откуда $\alpha=45°$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания BC к длине основания AD равно n. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Разложить вектор $\overline{AO}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

2. Даны три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{c}$, а вектор $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$.

3. Медианы граней OAB и OAC тетраэдра $OABC$ пересекаются в точках M и N соответственно. Доказать, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны и найти отношение $|\overrightarrow{MN}|:|\overrightarrow{BC}|$.

4. Точки M, N, P и Q лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $|AM|:|AB|=|BN|:|BC|=|CP|:|CD|=|DQ|:|DA|$. Доказать, что $MNPQ$ — параллелограмм.

5. Доказать, что любые два ненулевые вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существуют такие числа x и y, одновременно не равные нулю, что выполняется равенство $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

6. Два ненулевые вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ таковы, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

7. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=11$, $|\boldsymbol{b}|=23$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=30$, найти $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

8. Вектор $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ и вектор $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

9. Единичные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Вычислить $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

10. Найти такое число m, чтобы векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ стали компланарными.

11. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}=(1;\ 1;\ -1/2)$, образующего острый угол с базисным вектором $\boldsymbol{k}$, и такого, что $|\boldsymbol{b}|=3$.

12. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{p}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ и образующего тупой угол с базисным вектором $\boldsymbol{j}$.

13. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, компланарного с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, и такого, что $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

14. Найти координаты точки, принадлежащей оси ординат и одинаково удаленной от точек $A\,(2;\ -1;\ 1)$ и $B\,(0;\ 1;\ 3)$.

15. От одной точки отложены векторы $\boldsymbol{a}=(-4;\ 0;\ 3)$ и $\boldsymbol{b}=(14;\ 2;\ -5)$. Найти вектор $\boldsymbol{d}$, который будучи отложен от той же точки делит угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пополам и длина которого равна $\sqrt{6}$.

16. Даны $A\,(3;\ 2)$, $B\,(5;\ 1)$, $D\,(1;\ -2)$. Найти длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$.

17. Даны $B\,(2;\ -19;\ 16)$, $C\,(-4;\ 29;\ -20)$, $M\,(1;\ -1;\ 1)$. Найти расстояние от точки M до середины отрезка BC и расстояние от точки M до точки N, принадлежащей отрезку BC, и такой, что $|BN|:|BC|=1/3$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A\,(1;\ -3;\ 2)$ параллельно плоскости $4x-2y-z+7=0$.

19. Точка $A\,(-1;\ -1;\ 2)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

20. Найти расстояние от точки $A\,(-2;\ 3;\ -4)$ до плоскости $2x+2y-z+8=0$.

21. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $B\,(1;\ 1;\ 1)$, $C\,(3;\ 2;\ 1)$, и плоскостью, проходящей через точки $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $B\,(1;\ 1;\ 1)$, $D\,(3;\ 1;\ 2)$.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Разложить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

2. $OABC$ — тетраэдр, AM — медиана грани ABC. Разложить вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

3. $ABCD$ — параллелограмм, точка M — середина стороны CD. Разложить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{MC}$.

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 114). Разложить векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ по векторам $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$.

5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и AC. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CM}$.

6. В тетраэдре $OABC$ точки M и N — середины ребер $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Разложить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

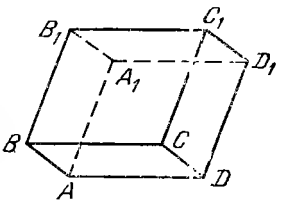


Рис. 114.

7. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагонали грани BB_1C_1C пересекаются в точке M. Разложить векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$.

8. Может ли длина вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ быть: а) меньше, б) равна, в) больше суммы длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$?

9. Доказать, что любые два ненулевые сонаправленные вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$.

10. Найти число x, если длина вектора $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$ равна $3|\boldsymbol{a}|$ и вектор $\boldsymbol{b}$: а) сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}$, б) противоположно направлен вектору $\boldsymbol{a}$.

11. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Найти числа x и y, если векторы $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ и $(y+1)\boldsymbol{a}+(2-x)\boldsymbol{b}$ равны.

12. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Найти числа x и y, если векторы $(2-x)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $y\boldsymbol{a}+(x-3)\boldsymbol{b}$ равны.

13. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Найти число x, если векторы $(x-1)\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ коллинеарны.

14. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Найти число x, если векторы $3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ и $(1-x)\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$ сонаправлены.

15. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол 120°. Найти x из условий, что $|\boldsymbol{b}| = 2|\boldsymbol{a}|$ и вектор $\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

16. Определить, при каких x и y вектор $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

17. Найти единичный вектор, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}=-6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

18. Определить длины векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=(3;\ -5;\ 8)$ и $\boldsymbol{b}=(-1;\ 1;\ -4)$.

19. Дано: $|\boldsymbol{a}|=13$, $|\boldsymbol{b}|=19$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=22$. Найти $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

20. Дано: $|\boldsymbol{a}|=6$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=11$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=7$. Найти $|\boldsymbol{b}|$.

21. Определить длины векторов $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

22. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=(1;\ 2)$ и $\boldsymbol{b}=(2;\ -1)$.

23. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=(4;\ 0,\ 3)$ и $\boldsymbol{b}=(2;\ -2;\ 1)$.

24. Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 120°, $|\boldsymbol{a}|=3$ и $|\boldsymbol{b}|=2$. Найти: а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$, в) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$, г) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

25. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$. Вычислить $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$, если $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=3$; $|\boldsymbol{c}|=4$.

26. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, коллинеариого вектору $\boldsymbol{a}=(2;\ -3)$ и удовлетворяющего условию $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-26$.

27. Вычислить скалярное произведение векторов $4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$ и угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 120°.

28. В плоскости найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{e}$, перпендикулярного вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A\,(1;\ -1)$ и $B\,(3;\ 0)$.

29. Найти $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

30. Найти $(6\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$, если угол между единичными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен 60°.

31. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$ и вектор $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

32. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}=(-1;\ 1;\ -2)$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$.

33. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}=(-1,\ 2)$, если $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

34. Найти, при каких m и n вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}=n\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

35. Найти, при каком m вектор $\boldsymbol{a}=(m;\ 7;\ -2)$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}=(-3;\ m;\ +2)$.

36. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=(-2;\ 1)$ если $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$.

37. Найти косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\boldsymbol{a}=(2;\ -1;\ -2)$.

38. Пусть $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные неколлинеарные векторы. Вычислить $(2\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2)(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$, если $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$.

39. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{a}=(1;\ -3;\ 1)$, если $A\,(-5;\ 7;\ -8)$ и $B\,(-7;\ 9;\ -9)$.

40. Найти координаты единичного вектора, противоположно направленного вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A\,(7;\ 4;\ -2)$ и $B\,(1;\ 2;\ 1)$.

41. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

42. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A\,(-5;\ 1)$; $B\,(-1;\ 4)$, $C\,(1;\ -4)$; $D\,(2;\ 3)$.

43. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{BA}$, если $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$.

44. Найти координаты точек M_1 и M_2, симметричных с точкой $M(1; -2; 5)$ относительно оси абсцисс и относительно плоскости Oxy соответственно.

45. Дано: $A(-1; -2; 4)$, $B(3; 2; -2)$, $C(3; -2; 1)$. Найти угол при вершине C треугольника ABC.

46. Найти длину медианы AM треугольника ABC, если $A(2; 3/2; -4)$, $B(3; -4; 2)$, $C(1; 3; -7)$.

47. Найти расстояние от точки $M(-2; 0; 1)$ до середины отрезка AB, если $A(2; -1; 0)$ и $B(-2; 3; 2)$.

48. Даны: $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Найти $|AB|$ и $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$.

49. Даны: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

50. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=3$; $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=45°$.

51. Найти угол между векторами $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, если $\boldsymbol{p}=8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{q}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

52. Вектор $\boldsymbol{a}$, у которого первая координата вдвое больше второй, образует с базисным вектором $\boldsymbol{k}$ угол 135°. Найти его координаты, если $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$.

53. Вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{b}=(12; -16; 15)$, образует с базисным вектором $\boldsymbol{k}$ острый угол. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=100$, найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

54. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, перпендикулярного базисному вектору $\boldsymbol{j}$ и вектору $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, если $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13}$.

55. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{a}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

56. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, если $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$.

57. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{b}=(6; 8; -7{,}5)$ и образующего тупой угол с базисным вектором $\boldsymbol{j}$, если $|\boldsymbol{a}|=50$.

58. Найти m и n, если вектор $\boldsymbol{a}=(3; m; -1)$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}=(2; 1; n)$ и $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

59. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, если $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

60. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{a}$, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{b}=(-1; 2; 2)$ и образующего равные углы с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

61. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 3; 1)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}=(-1; 2; -5)$.

62. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -3; 2)$ параллельно плоскости $2x+y+2z-1=0$.

63. Какие из следующих пар плоскостей являются: **а)** параллельными, **б)** перпендикулярными?

1) $2x+3y-z+6=0$, $x-y-z-7=0$;

2) $2x-3y+5z-1=0$, $2x-3y+5z+3=0$.

64. Найти, при каком m плоскость $2x+my-3z-1=0$ будет перпендикулярна плоскости $5x+y+3z+1=0$.

65. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости $x-2y+2z-6=0$.

66. Найти угол между плоскостью Oxy и плоскостью $\sqrt{2}x+y-3z+17=0$.

67. Найти угол между плоскостями $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

Глава VIII
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В этой главе вводятся и изучаются комплексные числа, являющиеся обобщением действительных чисел. Последний параграф посвящен алгебраическим уравнениям с комплексными коэффициентами.

Комплексные числа и функции комплексной переменной играют исключительно важную роль во многих разделах математики и физики.

§ 1. Определение комплексных чисел

Рассмотрим множество, элементами которого являются все упорядоченные пары действительных чисел. Пара чисел является упорядоченной, если указано, какое число из пары является первым и какое — вторым. Элемент рассматриваемого множества будем обозначать так: $(a;\ b)$, на первом месте будем записывать первое число, на втором — второе число пары. Элементы $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ считаются различными, если $a \neq b$. Элементами нашего множества будут, например, пары $(0;\ 0)$; $(1,\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(0;\ \sqrt{2})$, $(\pi;\ 1)$, $(-1;\ 10^6)$. Элементы $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2.$$

Введем теперь в множестве всех упорядоченных пар действительных чисел алгебраические операции: сложение двух пар и умножение двух пар. Сделаем это следующим образом.

Суммой элементов $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ назовем элемент

$$(a_1 + a_2;\ b_1 + b_2).$$

Произведением пар $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ назовем пару

$$(a_1a_2 - b_1b_2;\ a_1b_2 + b_1a_2).$$

Для обозначения операции сложения двух элементов нашего множества будем употреблять знак «+», при записи произведения сомножители будем писать рядом, опуская точку — знак умножения.

Таким образом, введенные нами операции определяются равенствами

$$(a_1;\ b_1)+(a_2;\ b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2), \tag{1}$$

$$(a_1;\ b_1)(a_2;\ b_2)=(a_1a_2-b_1b_2;\ a_1b_2+b_1a_2). \tag{2}$$

Например, сумма и произведение пар (3; —7) и (2; 9) вычисляются так:

$$(3;\ -7)+(2;\ 9)=(3+2;\ -7+9)=(5;\ 2),$$

$$(3;\ -7)(2;\ 9)=(3\cdot 2-(-7)9;\ 3\cdot 9+(-7)2)=(69;\ 13).$$

Теперь можно дать определение комплексного числа.

Комплексными числами называются упорядоченные пары действительных чисел, для которых формулами (1) и (2) определены операции сложения и умножения.

Комплексные числа часто обозначают одной буквой, причем обычно используют для этого буквы z или w, иногда с индексами, например z_1, z_2, w_0. Равенство $z=(a;\ b)$ как раз и означает, что комплексное число $(a;\ b)$ обозначено буквой z.

§ 2. Свойства операций сложения и умножения

Введенные в § 1 операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (переместительный закон для сложения).
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (сочетательный закон для сложения).
3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1.
4. $z_1z_2=z_2z_1$ (переместительный закон для умножения).
5. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (сочетательный закон для умножения).
6. Для любых комплексных чисел $z_1\neq(0;\ 0)$ и z_2 существует число z такое, что $z_1z=z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2/z_1. Деление на комплексное число $(0;\ 0)$, которое называется *нулем*, невозможно.
7. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ (распределительный закон).

Все перечисленные свойства операций сложения и умножения вытекают из формул (1) и (2) § 1, дающих определение этих операций. Докажем свойства 3 и 6, проверку остальных свойств предоставим читателю.

□ Доказательство свойства 3. Пусть $z_1=(a_1;\ b_1)$, $z_2=(a_2;\ b_2)$ и $z\,(x;\ y)$. Тогда равенство $z_1+z=z_2$ примет вид:

$$(a_1;\ b_1)+(x;\ y)=(a_2;\ b_2).$$

Сложив комплексные числа в левой части равенства, получим

$$(a_1+x;\ b_1+y)=(a_2;\ b_2).$$

Из определения равенства упорядоченных пар действительных чисел следует, что x и y удовлетворяют системе двух уравнений

$$a_1 + x = a_2, \quad b_1 + y = b_2.$$

Эта система имеет единственное решение $x = a_2 - a_1$, $y = b_2 - b_1$. Следовательно, разность $z_2 - z_1$ всегда существует, причем

$$z = z_2 - z_1 = (a_2;\ b_2) - (a_1;\ b_1) = (a_2 - a_1;\ b_2 - b_1). \qquad (1)$$

Эта формула дает правило вычитания комплексных чисел. ■

□ Доказательство свойства 6. Пусть $z_1 = (a_1;\ b_1)$, $z_2 = (a_2;\ b_2)$ и $z = (x;\ y)$. Тогда равенство $z_1 z = z_2$ примет вид

$$(a_1;\ b_1)(x;\ y) = (a_2;\ b_2).$$

Перемножив комплексные числа в левой части равенства, получим

$$(a_1 x - b_1 y;\ a_1 y + b_1 x) = (a_2;\ b_2).$$

Из определения равенства пар следует, что x и y удовлетворяют системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a_2, \\ b_1 x + a_1 y = b_2. \end{cases}$$

Умножив почленно первое уравнение на a_1, второе на b_1 и почленно сложив полученные уравнения, найдем

$$(a_1^2 + b_1^2)\, x = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Аналогично получим

$$(a_1^2 + b_1^2)\, y = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Итак, наша система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (a_1^2 + b_1^2)\, x = a_1 a_2 + b_1 b_2, \\ (a_1^2 + b_1^2)\, y = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{cases}$$

Поскольку $z_1 = (a_1;\ b_1) \neq (0;\ 0)$ и, следовательно, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, система имеет единственное решение

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Таким образом, частное двух комплексных чисел при условии, что делитель отличен от нуля, всегда существует, причем

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{(a_2;\ b_2)}{(a_1;\ b_1)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2};\ \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}\right). \qquad (2)$$

Формула (2) дает правило деления комплексных чисел. ■

Введенные операции сложения и умножения позволяют рассматривать комплексные числа как обобщение действительных чисел, а на действительные числа смотреть как на частный случай чисел комплексных. В самом деле, рассмотрим не все ком-

плексные числа, а только комплексные числа вида $(a;\ 0)$. Из формул сложения, умножения, вычитания и деления легко усматривается, что в результате сложения, умножения, вычитания и деления $(a \neq 0)$ таких чисел всегда получаются числа такого же вида. Кроме того, видно, что правила действий с комплексными числами вида $(a;\ 0)$ полностью совпадают с соответствующими правилами действий с действительными числами. В связи с этим комплексное число $(a;\ 0)$ отождествляют с *действительным* числом a и считают, что $(a;\ 0) = a$. Например, $(0;\ 0) = 0$, $(2;\ 0) = 2$, $(-7;\ 0) = -7$.

Множество действительных чисел становится при этом подмножеством множества комплексных чисел.

Комплексные числа вида $(0;\ b)$ называют *мнимыми*. Число $(0;\ 1)$ называют *мнимой единицей* и для его обозначения используют букву i, т. е. $(0;\ 1) = i$. Используя формулу умножения, легко проверить, что произвольное мнимое число $(0;\ b)$ представимо в виде произведения чисел $(b;\ 0)$ и $(0;\ 1)$, т. е. $(0;\ b) = (b;\ 0)(0;\ 1)$. Но так как $(b;\ 0) = b$ и $(0;\ 1) = i$, то мнимое число $(0;\ b)$ записывают в виде bi. Например, $(0;\ 2) = 2i$, $(0;\ -1) = -i$.

§ 3. Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Правила действий с комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Каждое комплексное число $z = (a;\ b)$ можно представить следующим образом:

$$z = (a;\ b) = (a;\ 0) + (0;\ b) = (a;\ 0) + (b;\ 0)(0;\ 1).$$

Учитывая, что $(a;\ 0) = a$, $(b;\ 0) = b$, $(0;\ 1) = i$, получаем

$$z = (a;\ b) = a + bi.$$

Запись комплексного числа $z = (a;\ b)$ в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$, действительное число b называется *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$.

Из сказанного в предыдущих параграфах вытекают следующие правила действий с комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ *равны* тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, т. е. когда равны и действительные и мнимые части комплексных чисел. Обратим внимание на то, что *одно* равенство $z_1 = z_2$ комплексных чисел равносильно *двум* равенствам $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ действительных чисел. Заметим еще, что понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел не определяются. Записи $i > 0$, $1 + i < 2$ и им подобные *лишены всякого смысла.*

Формула сложения в новых обозначениях записывается так:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i. \qquad (1)$$

Она дает *правило сложения* комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производится следующим образом:

$$(a_1+b_1i)\,(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\,i. \qquad (2)$$

Эта формула не что иное, как формула (2) § 1, записанная в новых обозначениях.

Положив в (2) $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$, получим важное соотношение

$$ii=-1,$$

или, применяя для произведения ii сокращенное обозначение $ii=i^2$,

$$i^2=-1. \qquad (3)$$

Отметим еще, что формула (2) не нуждается в запоминании, так как получается автоматически, если формально перемножить двучлены a_1+b_1i и a_2+b_2i по обычному правилу умножения двучленов и затем в соответствии с формулой (3) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=-3+2i$ и $z_2=13-i$.

$\triangle$ $z_1+z_2=(-3+2i)+(13-i)=10+i$,

$z_1z_2=(-3+2i)\,(13-i)=-39+3i+26i+2=-37+29i$. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=a-bi$.

$\triangle$ $z_1+z_2=(a+bi)+(a-bi)=2a$,

$z_1z_2=(a+bi)\,(a-bi)=a^2-abi+abi-(bi)^2=a^2+b^2$. $\blacktriangle$

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$, т. е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Число, сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Пример 2 показывает, что сумма $z+\bar{z}$ сопряженных чисел есть всегда число действительное, а произведение $z\bar{z}$ — число действительное и, более того, неотрицательное.

Прежде чем перейти к обратным операциям, отметим еще один частный случай формулы (2). Положив $a_1=\alpha$, $b_1=0$, $a_2=a$, $b_2=b$, получим правило умножения действительного числа на комплексное:

$$\alpha\,(a+bi)=\alpha a+\alpha bi.$$

Обратные операции, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, производятся согласно

следующим формулам:

$$(a_2+b_2i)-(a_1+b_1i)=a_2-a_1+(b_2-b_1)i, \tag{4}$$

$$\frac{a_2+b_2i}{a_1+b_1i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) — это формулы (1) и (2) из § 2, записанные в иных обозначениях. Положив в формуле (5) $a_2=a$, $b_2=b$, $a_1=\alpha$, $b_1=0$, получим правило деления комплексного числа $a+bi$ на действительное число α:

$$\frac{a+bi}{\alpha}=\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\alpha}i.$$

Пример 3. Даны комплексные числа $z_1=-3+2i$ и $z_2=13-i$. Найти разность z_2-z_1 и частное z_2/z_1.

△ По формуле (4) находим

$$z_2-z_1=(13-i)-(-3+2i)=16-3i.$$

Используя формулу (5), получаем частное

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(-3)13+2(-1)}{(-3)^2+2^2}+\frac{(-3)(-1)-13\cdot 2}{(-3)^2+2^2}=-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i. \ ▲$$

Формула (5) довольно громоздка и трудно запоминается. Поэтому лучше ею не пользоваться. Проще умножить числитель и знаменатель дроби z_2/z_1 на $\bar{z}_1$, т. е. на число, сопряженное знаменателю. Тогда нахождение частного z_2/z_1 сведется к умножению числа z_2 на число $\bar{z}_1$ и к делению полученного произведения на положительное число $z_1\bar{z}_1$ (см. пример 2).

Другими словами, для деления комплексных чисел рекомендуется пользоваться формулой

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}.$$

Для чисел, рассмотренных в примере 3, будем иметь

$$\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(13-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-39-26i+3i-2}{9+4}=-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i.$$

Пример 4. Записать комплексное число

$$z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$$

в алгебраической форме.

$$△\ z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}=\frac{3+i}{1-2i+i+2}=\frac{3+i}{3-i}=$$

$$=\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9+6i-1}{9+1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i. \ ▲$$

§ 4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

Хорошо известно, что между множеством всех упорядоченных пар действительных чисел и множеством всех точек плоскости может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно выбрать на плоскости систему координат и каждой упорядоченной паре чисел $(a;\ b)$ поставить в соответствие точку $M(a;\ b)$, т. е. точку с абсциссой $x=a$ и ординатой $y=b$ (рис. 115). Комплексные числа мы определили как упорядоченные пары действительных чисел, для которых определены операции сложения и умножения. Следовательно, каждому комплексному числу $(a;\ b)=a+bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a;\ b)$ и, наоборот, каждой точке $M(a;\ b)$ плоскости — комплексное число $(a;\ b)=a+bi$. Установленное таким образом соответствие является, очевидно, взаимно однозначным. Оно дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эту плоскость называют *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называют *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие числам $(a;\ 0)=a$), ось ординат — *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым числам $(0;\ b)=bi$).

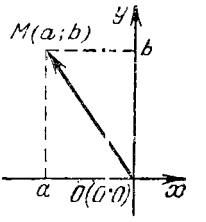


Рис. 115.

Часто удобно истолковывать комплексное число $(a;\ b)=a+bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 115). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0;\ 0)$ и с концом в точке $M(a;\ b)$ соответствует комплексное число $(a;\ b)=a+bi$ и наоборот. Точке $O(0;\ 0)$ соответствует нулевой вектор.

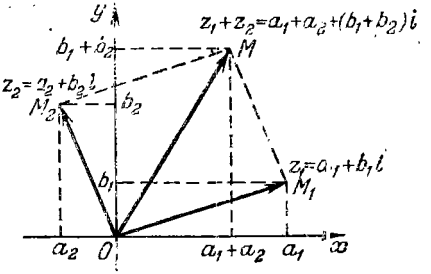


Рис. 116.

Соответствие, установленное между множеством комплексных чисел с одной стороны и множествами точек или векторов плоскости с другой стороны, позволяет комплексные числа называть точками или векторами и говорить, например, о векторе $a+bi$ или точке $a+bi$.

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование операциям над комплексными числами. Остановимся пока только на сложении комплексных чисел.

При сложении чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ складываются их действительные и мнимые части (рис. 116). При сложении соответствующих им векторов $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ складываются их коор-

динаты. Поэтому при установленном соответствии между комплексными числами и векторами сумме z_1+z_2 чисел z_1 и z_2 будет соответствовать вектор $\overrightarrow{OM}$, равный сумме векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$. Таким образом, сумма комплексных чисел геометрически может быть истолкована как вектор, равный сумме векторов, соответствующих слагаемым комплексным числам.

Определение. *Модулем* комплексного числа $(a;\ b)=a+ib$ называется длина соответствующего этому числу вектора.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. По теореме Пифагора (рис. 115) для модуля комплексного числа $z=a+ib$ легко получается следующая важная формула:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{1}$$

выражающая модуль комплексного числа через его действительную и мнимую части.

Сопряженные комплексные числа имеют равные модули. Действительно,

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad |\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Заметим, что для действительного числа $z=a+i0$ модуль совпадает с абсолютной величиной числа:

$$|z|=|a+i0|=\sqrt{a^2}=|a|.$$

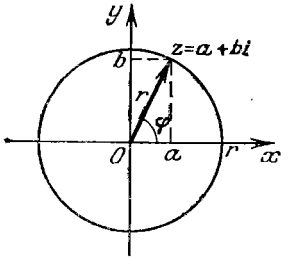


Рис. 117.

Пример 1. Найти модули комплексных чисел:

$$z_1=2-i, \quad z_2=2\sqrt{6}+5i, \quad z_3=i.$$

△ По формуле (1) находим

$$|z_1|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},$$

$$|z_2|=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7.$$

Для вычисления модуля z_3 нет необходимости использовать формулу (1). Длина вектора $z_3=i$ очевидно равна единице, поэтому $|z_3|=1$. ▲

Комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль $|z|=r$, соответствуют, очевидно, точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в начале координат (рис. 117).

Если $|z|\neq 0$, то существует бесконечно много комплексных чисел с данным модулем. Модуль, равный нулю, имеет только одно комплексное число, а именно $z=0$.

Геометрически очевидно, что комплексное число $z\neq 0$ будет задано, если помимо модуля числа z указать еще и направление вектора z, задав, например, величину угла φ (рис. 117).

Определение. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

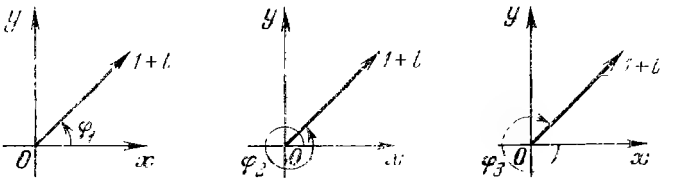


Рис. 118.

Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $z = 1 + i$ являются следующие углы: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$ (рис. 118) и, вообще, каждый из углов $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где k — произвольное целое число.

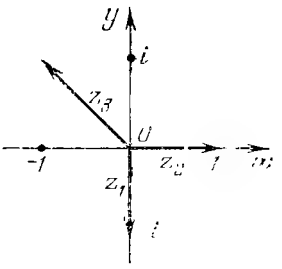


Рис. 119

Любые два аргумента комплексного числа отличаются на число, кратное 2π. Например, разность $\varphi_2 - \varphi_3$ аргументов $\varphi_2 = 9\pi/4$ и $\varphi_3 = -7\pi/4$ числа $z = 1 + i$ равна 4π. Для обозначения множества всех аргументов числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$ или $\arg(a + bi)$. Если речь идет о каком-либо одном из аргументов, то его обычно обозначают буквой φ.

Пример 2. Найти аргументы комплексных чисел: $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1 + i$.

△ Построив векторы z_1, z_2, z_3 (рис. 119), находим один из аргументов для каждого числа: $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 3\pi/4$. Следовательно,

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \arg z_2 = 2\pi k, \quad \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

где k — произвольное целое число. ▲

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = a + bi$ выражаются через его модуль $|z| = r$ и аргумент φ следующим

образом:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Эта связь легко устанавливается при рассмотрении рис. 117.

Таким образом, аргументы φ комплексного числа могут быть найдены из системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Пример 3. Найти аргументы комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}\,i$.

△ В данном случае $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. Система (3) имеет вид

$$\cos\varphi = -1/2, \qquad \sin\varphi = -\sqrt{3}/2.$$

Решив эту систему, найдем $\varphi_k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲

Аргументы комплексного числа можно найти и иначе. Из формул (3) видно, что каждый из аргументов удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = b/a.$$

Это уравнение не равносильно системе (3), оно имеет больше решений, но отбор нужных решений (аргументов комплексного числа) не представляет труда, так как из алгебраической формы записи комплексного числа всегда видно, в каком квадранте комплексной плоскости оно расположено.

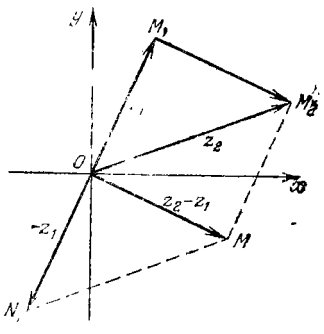


Рис. 120.

Пример 4. Найти аргументы комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$.

△ Каждый из аргументов φ числа $z = -\sqrt{3} + i$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3}.$$

Из уравнения следует, что $\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как число $z = -\sqrt{3} + i$ расположено во втором квадранте комплексной плоскости, то его аргументами будут числа φ_k при нечетных значениях k. Следовательно,

$$\arg(-\sqrt{3} + i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ ▲}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о геометрическом смысле модуля разности двух комплексных чисел. Построим

вектор $z_2 - z_1$ как сумму векторов z_2 и $(-z_1)$ (рис. 120). По определению модуля число $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $z_2 - z_1$, т. е. длина вектора $\overrightarrow{OM}$. Из конгруэнтности треугольников OMN_1 и M_1M_2O следует, что $|\overrightarrow{OM}| = |M_1M_2|$. Итак, длина вектора $z_2 - z_1$ равна расстоянию между точками z_1 и z_2. Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.*

Это важное геометрическое истолкование (или, как еще говорят, геометрическая интерпретация) модуля разности двух комплексных чисел позволяет при решении некоторых задач с успехом использовать простые геометрические факты.

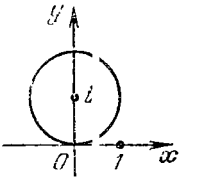


Рис. 121.

Пример 5. Какие множества точек комплексной плоскости задаются условиями:

а) $|z - i| = 1$, б) $|2 + z| < |2 - z|$,

в) $2 \leqslant |z - 1 + 2i| < 3$?

△ а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное единице. Такие точки лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке i (рис. 121).

б) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу можно переформулировать так: каково множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = -2$, чем к точке $z = 2$? Ясно, что

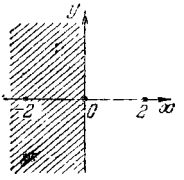


Рис. 122.

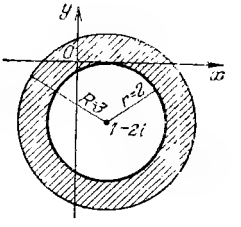


Рис. 123.

таким свойством обладают все точки плоскости, лежащие левее мнимой оси и только они. На рис. 122 искомое множество точек заштриховано.

в) Комплексные числа z, удовлетворяющие неравенствам

$$2 \leqslant |z - (1 - 2i)| < 3,$$

удалены от точки $1 - 2i$ на расстояние большее или равное двум, но меньшее трех. Такие точки расположены внутри и на внут-

ренней границе кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке $1-2i$ и с радиусами $r=2$ и $R=3$. На рис. 123 искомое множество показано штриховкой. ▲

§ 5. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Вернемся к формулам (2) предыдущего параграфа:

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi.$$

Эти формулы связывают действительную и мнимую части комплексного числа $z=a+bi$ с его модулем r и аргументом φ.

Каждое комплексное число $z=a+bi$, отличное от нуля, может быть, следовательно, записано в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

Запись комплексного числа в виде

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где r — модуль числа, а φ — один (любой) из его аргументов, называется *тригонометрической формой* записи.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи числа к тригонометрической, достаточно найти модуль комплексного числа и один из его аргументов.

Пример 1. Записать числа $z_1=-1-i$, $z_2=-2$, $z_3=i$ в тригонометрической форме.

△ Так как $|z_1|=\sqrt{2}$, а $\varphi_1=-3\pi/4$, то

$$z_1=\sqrt{2}(\cos(-3\pi/4)+i\sin(-3\pi/4)).$$

Модуль z_2 равен 2, а одним из аргументов z_2 является угол $\varphi_2=\pi$, поэтому

$$z_2=2(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Учитывая, что $|z_3|=1$, а $\varphi_3=\pi/2$ — один из аргументов z_3, получаем тригонометрическую форму записи для z_3:

$$z_3=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2). \ ▲$$

Пример 2. Записать числа

$$z_1=2\cos(7\pi/4)-2i\sin(\pi/4), \quad z_2=-\cos(\pi/17)+i\sin(\pi/17)$$

в тригонометрической форме.

△ Для записи чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме нет необходимости предварительно находить их модули и аргументы (хотя сделать это совсем не трудно). Воспользуемся тем, что

$$\cos(7\pi/4)=\cos(-\pi/4), \quad \text{а} \quad -\sin(\pi/4)=\sin(-\pi/4),$$

и сразу получим тригонометрическую форму для первого числа

$$z_1 = 2(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)).$$

Аналогично, учитывая, что

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17},$$

$$\sin\frac{\pi}{17} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \sin\frac{16\pi}{17},$$

получаем

$$z_2 = \cos(16\pi/17) + i\sin(16\pi/17). \blacktriangle$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной при умножении и делении чисел. Прежде чем перейти к рассмотрению этих операций, отметим, что два комплексных числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

равны тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т. е. когда модули чисел равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число.

Пусть теперь

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) -$$

два числа, записанных в тригонометрической форме.

Представим в тригонометрической форме их произведение:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2),$$

или

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2}$$

Следовательно,

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2, \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.*

Пример 3. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

$\triangle$ Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 z_2| = \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$. Аргументом произведения $z_1 z_2$ данных чисел будет сумма

$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25}{8}\pi$. Следовательно,

$$z_1 z_2 = 4\,(\cos(25\pi/8) + i\sin(25\pi/8)),$$

или

$$z_1 z_2 = 4\,(\cos(9\pi/8) + i\sin(9\pi/8)). \blacktriangle$$

Перейдем к делению чисел. Запишем частное двух комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

в тригонометрической форме. Умножая числитель и знаменатель частного z_1/z_2 на $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{3}$$

Следовательно,

$$|z_1/z_2| = r_1/r_2, \quad \arg(z_1/z_2) = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.*

Пример 4. Записать число $z = \frac{i-1}{\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)}$ в тригонометрической форме.

△ Введем обозначения $z_1 = i - 1$, $z_2 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$. Число z_2 записано в тригонометрической форме. Очевидно, что $|z_2| = 1$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Найдем модуль и аргумент числа z_1: $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = 3\pi/4$. По формуле (3) получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

т. е.

$$z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/12) + i\sin(5\pi/12)). \blacktriangle$$

§ 6. Возведение в степень и извлечение корня

Формула для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, легко получить следующий результат: модуль произведения n комплексных чисел равен произведению модулей всех сомножителей, сумма аргументов всех сомножителей является аргументом их произведения.

Отсюда, как частный случай, получается формула

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (1)$$

дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 1. Записать число $z = (i - \sqrt{3})^{13}$ в алгебраической форме.

△ Сначала запишем данное число в тригонометрической форме, а затем перейдем от тригонометрической формы к алгебраической. Найдем модуль и один из аргументов числа $i - \sqrt{3}$:

$$r = |i - \sqrt{3}| = 2, \quad \varphi = 5\pi/6.$$

Представим число $i - \sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$i - \sqrt{3} = 2(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)).$$

Теперь, применяя формулу (1), получаем

$$(i - \sqrt{3})^{13} = (2(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)))^{13} =$$
$$= 2^{13}(\cos(65\pi/6) + i\sin(65\pi/6)) = 2^{13}(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)).$$

Такова тригонометрическая форма данного числа. Запишем это число в алгебраической форме:

$$(i - \sqrt{3})^{13} = 2^{13}(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) =$$
$$= 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i. \ ▲$$

Перейдем к извлечению корня данной степени из комплексного числа. Число z называется *корнем степени* n из числа w (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n = w$.

Например, числа $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $w = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$. Из определения вытекает, что каждое решение уравнения $z^n = w$ является корнем степени n из числа w. Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени n из числа w, достаточно решить уравнение $z^n = w$.

Если $w = 0$, то при любом n уравнение $z^n = w$ имеет одно и только одно решение $z = 0$. Если $w \neq 0$, то и $z \neq 0$, и следовательно, и z и w можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Уравнение $z^n = w$ примет вид

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число. Следовательно,

$$r^n = \rho \quad \text{и} \quad n\varphi = \alpha + 2\pi k$$

или

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, все решения уравнения $z^n = w$ могут быть записаны следующим образом:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что все числа z_k, получаемые при $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, различны. Если брать значения $k \geqslant n$, то других комплексных чисел, отличных от $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, не получится.

Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\,(\cos(\alpha/n) + i \sin(\alpha/n)) = z_0.$$

Таким образом, если $w \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа w; все они получаются из формулы

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)\right), \qquad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Из формулы (2) видно, что все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль, но разные аргументы, отличающиеся друг от друга на $\frac{2\pi}{n} k$, где k — некоторое целое число.

Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z = 0$.

Сделаем еще одно замечание относительно обозначения $\sqrt[n]{w}$. Обычно под $\sqrt[n]{w}$ понимается множество всех корней степени n из w. Например, под $\sqrt{-1}$ понимается множество, состоящее из двух чисел i и $-i$. Иногда под $\sqrt[n]{w}$ понимают какой-либо один корень степени n из числа w. В таких случаях следует обязательно указывать о каком значении корня идет речь.

Пример 2. Найти все значения $\sqrt[6]{-64}$.

△ Запишем число $w = -64$ в тригонометрической форме:

$$-64 = 64(\cos\pi + i \sin\pi).$$

Применяя формулу (2), получаем

$$z_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}k\right)\right), \qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

Следовательно,

$$z_0 = 2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)) = \sqrt{3}+i,$$
$$z_1 = 2(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)) = 2i,$$
$$z_2 = 2(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6)) = -\sqrt{3}+i,$$
$$z_3 = 2(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6)) = -\sqrt{3}-i,$$
$$z_4 = 2(\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)) = -2i,$$
$$z_5 = 2(\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6) = \sqrt{3}-i.$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах

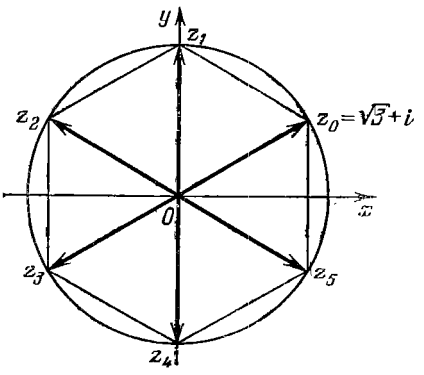


Рис. 124.

правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z=0$ (рис. 124). ▲

§ 7. Алгебраические уравнения

Рассмотрим алгебраическое уравнение степени n с комплексными коэффициентами, т. е. уравнение вида

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Число z_0 называется *решением* или *корнем* уравнения, если при подстановке z_0 вместо z в уравнение получается верное числовое равенство. Следовательно, если z_0 — корень уравнения (1), то

$$a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Например, следующие уравнения:

$$z+1-i=0,$$
$$z^2-1=0,$$
$$z^5+z^3+iz^2+i=0,$$
$$iz^7+32(1-i)z=0$$

— являются алгебраическими уравнениями соответственно первой, второй, пятой и седьмой степеней. Корнем первого уравнения является число $z_0=-1+i$, второе уравнение имеет два корня $z_0=1$ и $z_1=-1$. Число $z_0=i$ — корень третьего уравнения, так как $i^5+i^3+i\cdot i^2+i=0$. Очевидно, что $z_0=0$ — корень четвертого уравнения. Помимо корня $z_0=0$ четвертое уравнение, как это следует из предыдущего параграфа, имеет еще шесть корней.

Решить уравнение в множестве комплексных чисел — значит найти *все* корни уравнения.

Общий вид алгебраического уравнения первой степени:

$$a_1z+a_0=0, \quad a_1\neq 0.$$

Очевидно, что такое уравнение имеет одно и только одно решение $z_0=-a_0/a_1$. Уравнение второй степени (квадратное уравнение) в общем виде записывается так:

$$a_2z^2+a_1z+a_0=0, \quad a_2\neq 0.$$

Для решения этого уравнения преобразуем тождественно его левую часть

$$a_2\left(z^2+\frac{a_1}{a_2}z+\frac{a_0}{a_2}\right)=0,$$
$$a_2\left(\left(z+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2+\frac{a_0}{a_2}-\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right)=0,$$
$$a_2\left(\left(z+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_2^2}\right)=0$$

и найдем корни

$$\left(z+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2=\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_2^2}, \quad z=-\frac{a_1}{2a_2}+\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2},$$
$$z=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_2}. \tag{2}$$

В последней формуле введено обозначение $D=a_1^2-4a_0a_2$ (дискриминант квадратного уравнения обозначен буквой D), под $\sqrt{D}$ понимаются все значения корня.

Формула (2) для корней квадратного уравнения имеет такой же вид, как и в случае, когда коэффициенты уравнения действительные числа и решения отыскиваются в множестве действительных чисел. Но поскольку в множестве комплексных чисел операция извлечения квадратного корня имеет смысл для любого комплекс-

ного числа, ограничение $D>0$ становится излишним. Более того, оно вообще теряет смысл, так как дискриминант может оказаться числом не действительным, а для таких чисел понятия «больше», «меньше» не определены.

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$a_2z^2+a_1z+a_0=0$$

(a_2, a_1, a_0 — комплексные числа, $a_2\neq 0$) всегда разрешимо

Если $D=a_1^2-4a_0a_2=0$, уравнение имеет один корень, если $D\neq 0$, уравнение имеет два корня. Во всех случаях корни квадратного уравнения можно найти по формуле (2).

Пример 1. Решить уравнение $z^2+3z+3=0$.

△ По формуле (2) находим

$$z=\frac{-3+\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}.$$

Учитывая, что $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, получаем

$$z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Решить уравнение

$$z^2-8z-3iz+13+13i=0.$$

△ По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{8+3i+\sqrt{(8+3i)^2-4(13+13i)}}{2}=\frac{8+3i+\sqrt{3-4i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{3-4i}$ можно было бы использовать формулу 2 § 6, но гораздо проще применить другой прием. Положим

$$\sqrt{3-4i}=x+yi,$$

тогда $3-4i=x^2+2xyi-y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=3,\\ xy=-2, \end{cases}$$

причем x и y — действительные числа. Система имеет два действительных решения $x=2$, $y=-1$ и $x=-2$, $y=1$. Поэтому

$$\sqrt{3-4i}=\begin{cases} 2-i,\\ -2+i \end{cases}$$

и

$$z_1=\frac{8+3i+2-i}{2}=5+i,\qquad z_2=\frac{8+3i-2+i}{2}=3+2i.\ \blacktriangle$$

Перейдем к рассмотрению алгебраических уравнений более высокой степени. Решение уравнения (1) при $n>2$ является, как правило, задачей неизмеримо более сложной. В 1799 г. великим математиком Карлом Гауссом была доказана теорема:

Каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.

Эту теорему принято называть *основной теоремой алгебры*. Она носит имя Гаусса. Доказательство ее достаточно сложно и в курсах элементарной математики не приводится (см. доказательство в книге Л. С. Понтрягина «Метод координат» из серии «Знакомство с высшей математикой»).

Опираясь на теорему Гаусса, можно доказать, что левая часть уравнения (1) всегда допускает представление в виде произведения:

$$a_n (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} \dots (z-z_k)^{\alpha_k},$$

где $z_1, z_2, \dots, z_k$ — некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — натуральные числа, причем

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n.$$

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, \dots, z_k$ и только они являются корнями уравнения (1). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 — корнем кратности α_2 и т. д. Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему:

Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.

И теорема Гаусса, и только что сформулированная теорема являются типичными теоремами существования. Они дают исчерпывающее решение вопроса о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но, к сожалению, ничего не говорят о том, как найти эти корни. Если корень уравнения первой степени $a_1z+a_0=0$ определяется формулой $z=-a_0/a_1$, если корни уравнения второй степени $a_2z^2+a_1z+a_0=0$ всегда могут быть легко найдены по формуле (2), то уже для уравнений третьей и четвертой степени аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае вообще не существует [1]). Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, конечно, в частных случаях в зависимости от специфики уравнения, отыскать все его корни. Например, формула (2) § 6 позволяет найти все корни уравнения $a_nz^n+a_0=0$, т. е. двучленного уравнения степени n.

Для решения уравнений с целыми коэффициентами часто оказывается полезной следующая теорема:

---

[1]) Отметим, что в высшей математике разработаны разнообразные методы, позволяющие находить *приближенные* значения корней алгебраических уравнений с нужной точностью.

Целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

□ Доказательство этой теоремы провести легко. Пусть $z=k$ — целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами. Тогда

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0$$

и, следовательно,

$$a_0 = -k\,(a_n k^{n-1} + \ldots + a_1).$$

Число $a_n k^{n-1} + \ldots + a_1$ при сделанных предположениях, очевидно, целое, значит, k — делитель числа a_0. ■

Пример 3. Решить уравнение

$$z^3 - 6z - 9 = 0.$$

△ Рассматривая делители свободного члена, убеждаемся в том, что только $z=3$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z-3$:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 6z - 9 & z-3 \\ \underline{z^3 - 3z^2} & \overline{z^2+3z+3} \\ 3z^2 - 6z & \\ \underline{3z^2 - 9z} & \\ 3z - 9 & \\ \underline{3z - 9} & \\ 0 & \end{array}$$

и, решая квадратное уравнение

$$z^2 + 3z + 3 = 0,$$

получаем остальные корни. Итак,

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ ▲}$$

Пример 4. Найти целые корни уравнения

$$2z^3 - 5z^2 - 2z - 2 = 0.$$

△ Целыми корнями уравнения могут быть только ± 1, ± 2. Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Предложенное уравнение целых корней не имеет. ▲

Пример 5. Решить уравнение

$$z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0.$$

△ Подвергая испытанию делители свободного члена, найдем, что $z=\pm 2$ суть корни уравнения. Разделив левую часть уравне-

ния на z^2-4, придем к уравнению

$$z^3-2z^2-9z+18=0,$$

корнем которого является $z=2$. Разделив на $z-2$, получим z^2-9. Таким образом, левая часть уравнения разлагается на множители:

$$(z+3)(z+2)(z-2)^2(z-3).$$

Итак, уравнение имеет три однократных (простых) корня $z=-3$, $z=-2$, $z=3$ и один двукратный корень $z=2$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Представить комплексное число

$$z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$$

в алгебраической форме.

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел:

а) $z=\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$. б) $z=\sin(6\pi/5)+i(1+\cos(6\pi/5))$.

3. Представить z в алгебраической и в тригонометрической формах:

а) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$. б) $z=1+\cos(10\pi/9)+i\sin(10\pi/9)$.

4. Представить число $z=(\operatorname{tg}1-i)^4$ в тригонометрической форме.

5. Решить уравнение $z^2+|z|^2=0$.

6. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $|z+1|=|z-i|$. б) $|z|^2+3z+3\bar{z}=0$.

в) $\sin|z|>0$?

7. На комплексной плоскости даны точки $z_1=6+8i$, $z_2=4-3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, принадлежащим биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

8. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3},$$

найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

9. Решить уравнение $z^4+8+8\sqrt{3}i=0$.

10. Записать

$$z=\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$$

в алгебраической форме при условии, что действительная часть комплексных чисел $\sqrt{5+12i}$, $\sqrt{5-12i}$ отрицательна.

11. Доказать, что остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z-z_0$ равен $P_n(z_0)$ (*теорема Безу*).

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Найти z_1+z_2, z_1z_2, z_1-z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если:

а) $z_1=2+5i$, $z_2=1-7i$.

б) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

2. Записать z в алгебраической форме:

а) $z=\dfrac{-41+63i}{50}-\dfrac{6i+1}{1-7i}$. б) $z=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$.

в) $z=\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{i+2}$. г) $z=(2+i)^6$.

3. Найти комплексное число z, удовлетворяющее уравнению

$$(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i,$$

и записать его в алгебраической и в тригонометрической формах.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i, \end{cases}$$

5. При каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1=9y^2-4-10xi^5 \quad \text{и} \quad z_2=8y^2+20i^{14}$$

являются сопряженными?

6. Доказать равенства:

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_n,$$

$$\overline{z_1z_2\ldots z_n}=\bar{z}_1\bar{z}_2\ldots\bar{z}_n.$$

7. Решить уравнения:

а) $z^2+\bar{z}=0$, б) $z^2+|z|=0$.

в) $|z|-iz=1-2i$. г) $z^2=\bar{z}^3$.

д) $z^2+z|z|+|z^2|=0$.

8. Решить систему уравнений

$$|z+1-i|=|3-z+2i|=|z+i|.$$

9. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z+1-i|=\sqrt{2}, \\ |z|=3 \end{cases}$$

решений не имеет.

10. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан.

11. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $z+1-i|=|z-1+i|$. б) $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$.

в) $|z+1+2i|\leqslant 0$. г) $\arg z=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

д) $|z+1|\geqslant|z+i|$. е) $|z+2-i|=\sqrt{3}$. ж) $\lg|z+i|\leqslant 1$.

з) $\dfrac{\pi}{4}(8n+1)<\arg(z+i)<\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

и) $|z-2|^2+|z+2|^2=26$.

12. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1-i|\leqslant 1$, б) $|z-5i|\leqslant 3$,

найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

13. Записать z в тригонометрической форме:

а) $z=-\sqrt{3}+i$. б) $z=-1$.

в) $z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$. г) $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$.

д) $z=\frac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}}$.

14. Представить z в алгебраической форме:

а) $z=\frac{(i-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}$.

б) $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}$. в) $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$.

г) $z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+\sqrt{3}i)^7}{i^5}$.

15. Найти все значения $\sqrt[n]{w}$, если:

а) $w=+1$, $n=3$. б) $w=-1$, $n=4$.

в) $w=-4+\sqrt{48}\,i$, $n=3$. г) $w=1+i$, $n=8$.

16. Пусть $A_k\,(k=1, 2, \ldots, n)$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=1$. Найти:

а) $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\ldots+|A_1A_n|^2$.

б) $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot\ldots\cdot|A_1A_n|$.

17. Решить уравнения:

а) $z^2-2iz-5=0$. б) $z^2-20z+92+6i=0$.

в) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$. г) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

д) $z^4-4z^3+7z^2-16z+12=0$.

е) $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$.

18. Доказать, что если уравнение

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0$$

с действительными коэффициентами имеет корень z_0, то число $\bar{z}_0$ также является корнем этого уравнения.

19. Убедиться в том, что число $1+i$ является корнем уравнения

$$3z^4-5z^3+3z^2+4z-2=0,$$

и найти остальные корни.

20. Найти общие корни уравнений:

$$z^3+2z^2+2z+1=0,$$
$$z^{1982}+z^{100}+1=0.$$

21. При делении многочлена $P_n(z)$ на $z-i$ в остатке получается i, а при делении на $z+i$ в остатке получается $1+i$. Найти остаток от деления $P_n(z)$ на z^2+1.

22. Может ли точка $z=0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику, вершины которого находятся в точках

$$z_k=1+z+z^2+\ldots+z^{k-1},\quad |z|<1?$$

Глава IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ, НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения. Вначале напомним формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \text{ при } |a| \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n \text{ при } |a| \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, т. е. $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения для любого $a \in [-1; 1]$, т. е. при $|a| \leqslant 1$. Если же $|a| > 1$, то эти уравнения решений не имеют.

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ имеют решения для любого $a \in \mathbb{R}$.

Для записи решений простейших тригонометрических уравнений можно использовать и обозначения из теории множеств, например множество решений уравнения $\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$, можно записать в виде

$$\{(-1)^n \arcsin a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

В (1) — (4) решения уравнений выражены через значения обратных тригонометрических функций. Напомним некоторые свойства этих функций.

Каждая из функций $\arcsin a$ и $\arccos a$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и

$$-\pi/2 \leqslant \arcsin a \leqslant \pi/2, \quad a \in [-1; 1],$$
$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \quad a \in [-1; 1].$$

Функция $\arcsin a$ является нечетной, т. е.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Функция $\arccos a$ не является ни четной, ни нечетной. Каждая из функций $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ определена на всей числовой

прямой и

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} a < \pi/2, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Функция $\operatorname{arctg} a$ является нечетной, т. е.

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

Функция $\operatorname{arcctg} a$ не является ни четной, ни нечетной.

Для решения тригонометрического уравнения, не являющегося простейшим, его сводят теми или иными преобразованиями к одному или нескольким простейшим.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 x = 1$.

△ Преобразуем уравнение, воспользовавшись равенством $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, верным для всех x, тогда получим

$$1 - \cos 2x = 1, \quad \cos 2x = 0.$$

Значит, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = 3. \tag{6}$$

△ Если x — решение данного уравнения, то

$$\text{либо} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \tag{7}$$
$$\text{либо} \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}. \tag{8}$$

Очевидно, верно и обратное, если x — решение одного из уравнений (7), (8), то x — решение уравнения (6). Таким образом, множество решений уравнения (6) есть объединение множеств решений уравнений (7) и (8). В этом случае говорят, что уравнение (6) равносильно совокупности уравнений (7) и (8).

Уравнения (7) и (8) имеют соответственно решения

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Объединение этих двух множеств и есть множество всех решений уравнения (6). Эти решения можно для краткости записать в виде

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ ▲}$$

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех определяется в частности знанием тригонометрических формул и навыками решения задач.

Многие тригонометрические формулы являются верными равенствами для *всех* значений, входящих в них переменных. Таковы, например, формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha), \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha),$$

формулы для суммы и разности синусов и косинусов, для произведения синусов и косинусов, формулы для синуса и косинуса суммы и разности.

Некоторые тригонометрические формулы являются верными равенствами *не для всех* значений переменных. Например, равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

верно только для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что и правая и левая части этой формулы как функции α имеют одну и ту же область определения, а именно, они определены для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Другим примером служат формулы

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{9}$$

которые также являются верными равенствами для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но здесь в отличие от предыдущей формулы левые и правые части имеют *разные* области определения. Левые части в (9) определены для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, а правые — только для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Этот факт, как будет видно из примеров, следует учитывать при использовании формул (9) и аналогичных им, например формулы для тангенса двойного аргумента, формул для тангенса суммы и разности и т. д.

Рассмотрим примеры решения различных уравнений.

Уравнения

$$\sin ax + \sin bx = 0, \quad \sin ax - \sin bx = 0,$$
$$\cos ax + \cos bx = 0, \quad \cos ax - \cos bx = 0$$

легко решить, используя формулы для суммы и разности синусов и косинусов.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 6x + \sin 4x = 0$.

△ Применив формулу для суммы синусов, получим

$$2\sin 5x\cos x = 0. \tag{10}$$

Если x — решение этого уравнения, то верно по крайней мере одно из равенств

$$\sin 5x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0. \tag{11}$$

Обратно, если x решение одного из уравнений (11), то, очевидно, x является и решением уравнения (10). Таким образом, уравнение (10) равносильно совокупности уравнений (11). Уравнения (11) имеют соответственно решения

$$x = \frac{\pi n}{5}, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Все эти значения x и только они являются решениями исходного уравнения. ▲

Уравнения

$$\sin ax + \cos bx = 0, \qquad \sin ax - \cos bx = 0$$

можно свести к уравнениям, указанным выше, с помощью формул приведения.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x = \cos 2x$.

△ Преобразуем уравнение, используя формулу приведения и формулу для разности синусов:

$$\sin x - \cos 2x = 0, \qquad \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0,$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Получившееся уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin \frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Решаем первое уравнение: $\frac{1}{2}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Для второго уравнения имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi l, \qquad x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что все решения второго уравнения содержатся в множестве решений первого. Действительно, при $k = -1 - 3l$, $l \in \mathbb{Z}$, имеем $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(-1-3l)}{3} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi l$, т. е. получаем все решения второго уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right\} \Big| k \in \mathbb{Z}\Big\}$. ▲

Замечание о форме записи решений. Целочисленные параметры в различных множествах решений одного уравнения можно обозначать как разными буквами, так и одной буквой. Скажем, в примере 3 была использована одна буква n.

В тех же случаях, когда элементы множеств сравниваются между собой, следует использовать различные буквы для обозначения целочисленных параметров. Так было сделано в примере 4.

Уравнения вида

$$a\sin\omega x + b\cos\omega x = c,\quad a^2+b^2\neq 0. \tag{12}$$

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x+\cos 2x=-1$.

△ Это уравнение является частным случаем рассматриваемых уравнений при $a=b=1$, $c=-1$, $\omega=2$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что $1/\sqrt{2}=\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)$, запишем это уравнение в виде

$$\sin 2x\cos(\pi/4)+\cos 2x\sin(\pi/4)=-1/\sqrt{2}.$$

Воспользовавшись формулой для синуса суммы аргументов, придем к уравнению

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $x=((-1)^{n+1}-1)\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. Эти значения x и составляют множество всех решений исходного уравнения. ▲

В общем случае, для того чтобы преобразовать уравнение (12) к простейшему введением вспомогательного угла, разделим обе его части на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть φ — одно из решений системы

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Используя эти равенства, запишем уравнение в виде

$$\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=c/\sqrt{a^2+b^2}.$$

Применив формулу для синуса суммы аргументов, получим уравнение

$$\sin(\omega x+\varphi)=c/\sqrt{a^2+b^2},$$

которое, как видно из проделанных выкладок, равносильно исходному уравнению. Полученное уравнение, а значит, и исходное имеют решения тогда и только тогда, когда $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Для преобразования уравнений вида (12) можно использовать также формулы синуса разности, косинуса суммы и разности аргументов.

Пример 6. Решить уравнение $12\cos x - 5\sin x = -13$.

△ Разделим обе части уравнения на $\sqrt{12^2+5^2}=13$, получим

$$\frac{12}{13}\cos x - \frac{5}{13}\sin x = -1.$$

Одним из решений системы

$$\cos\varphi = 12/13, \quad \sin\varphi = 5/13$$

является $\varphi = \arccos(12/13)$. Учитывая это, запишем уравнение в виде

$$\cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi = -1$$

и, применив формулу для косинуса суммы аргументов, получим $\cos(x+\varphi) = -1$, откуда $x+\varphi = \pi + 2\pi n$, $x = -\varphi + \pi(2n+1)$, т. е.

$$x = -\arccos(12/13) + \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта формула и дает все решения исходного уравнения. ▲

Введение нового неизвестного. В ряде случаев уравнение удается преобразовать к виду, содержащему лишь одну тригонометрическую функцию.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = 1.$$

△ Воспользуемся формулами $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x).$$

Вторая формула легко получается, если в равенстве $\sin 3x = \sin(x+2x)$ правую часть преобразовать по формуле синуса суммы, а затем по формулам двойного аргумента.

После подстановки исходное уравнение примет вид

$$\sin x(3 - 4\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x = 1.$$

Отсюда $4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x = 0$. Обозначив $t = \sin x$, получим $4t^3 + 2t^2 - 3t = 0$. Это уравнение имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = (\sqrt{13}-1)/4$, $t_3 = -(\sqrt{13}+1)/4$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 0, \quad \sin x = (\sqrt{13}-1)/4, \quad \sin x = -\frac{\sqrt{13}+1}{4}.$$

Находим последовательно решения полученных уравнений:

$$x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

третье уравнение решений не имеет, поскольку $-(\sqrt{13}+1)/4 < -1$. Найденные значения x и только они являются решениями исходного уравнения. ▲

Если уравнение содержит лишь одно из выражений

$$\sin x+\cos x \quad \text{или} \quad \sin x-\cos x$$

и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x\cos x$), то, вводя новое неизвестное

$$t=\sin x+\cos x \quad \text{или} \quad t=\sin x-\cos x$$

и учитывая, что

$$\left.\begin{aligned}\sin 2x&=(\sin x+\cos x)^2-1,\\ \sin 2x&=1-(\sin x-\cos x)^2,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

придем к уравнению относительно t.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=1-\sin 2x.$$

△ Обозначим $t=\sin x+\cos x$ и воспользуемся первой из формул (13), получим

$$t=1-(t^2-1),$$

откуда $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x+\cos x=1, \qquad \sin x+\cos x=-2.$$

Решаем каждое из уравнений, например, введением вспомогательного угла. Для первого уравнения находим $x=((-1)^n-1)\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; второе уравнение решений не имеет, поскольку $|-2|>\sqrt{2}$.

Ответ: $x=((-1)^n-1)\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ▲

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{2}\sin x\cos x.$$

△ Преобразуем выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$, выделив полный квадрат:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x,$$

откуда

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Пользуясь полученной формулой, запишем уравнение в виде

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{7}{4}\sin 2x.$$

Обозначив $\sin 2x = t$, получим $2t^2 + 7t - 4 = 0$, откуда $t_1 = 1/2$, $t_2 = -4$. Уравнение $\sin 2x = 1/2$ имеет решения $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; уравнение $\sin x = -4$ решений не имеет. ▲

Сумму $\sin^6 x + \cos^6 x$ можно выразить через $\sin 2x$, раскладывая ее на множители как сумму кубов.

В предыдущих примерах для преобразования уравнений использовались формулы, правая и левая часть которых определены для всех значений x, и сами формулы являются верными равенствами для всех x.

Рассмотрим примеры решений уравнений, в которых используются формулы, правая и левая части которых определены не для всех значений x.

Пример 10. Решить уравнение

$$6 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x. \tag{14}$$

△ Преобразуем уравнение по формулам

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Заметим, что обе части второй формулы определены, хотя и не для всех, но для одних и тех же значений x, а именно, они определены для всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для таких же значений x определена и левая часть данного уравнения. После подстановки получим уравнение

$$6 \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} - (1 + \cos 2x) = \cos 2x. \tag{15}$$

Очевидно, что любое решение уравнения (14) является решением уравнения (15), и обратно, каждое решение уравнения (15) является решением уравнения (14), т. е. уравнения (14) и (15) равносильны. Решаем уравнение (15). Обозначая $\cos 2x$ через t и преобразуя (15), получим уравнение $(2t^2 + 9t - 5)/(1 + t) = 0$, откуда $t_1 = 0{,}5$, $t_2 = -5$. Следовательно, уравнение (14) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x = 0{,}5, \quad \cos 2x = -5.$$

Первое из этих уравнений имеет решения $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; второе — решений не имеет. ▲

Рассмотрим теперь случай, когда для преобразования уравнения используются формулы, правая и левая части которых имеют разные области определения.

Пример 11. Решить уравнение

$$5 \sin 2x - 5 \cos 2x = \operatorname{tg} x + 5. \tag{16}$$

△ Выразим $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ по формулам (9):

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Подставляя в уравнение вместо $\sin 2x$ и $\cos 2x$ правые части этих формул, получим

$$5\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-5\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg}x+5. \qquad (17)$$

Выясним, равносильны ли уравнения (16) и (17). Функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$ определены для всех x, а подставленные вместо них правые части формул (9) определены лишь для $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Значит, в результате подстановки исключены из рассмотрения значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Но ясно, что ни одно из этих значений x не является решением исходного уравнения (16), поскольку его правая часть для $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, не определена. Отсюда следует, что каждое решение уравнения (16) является решением уравнения (17). Очевидно, верно и обратное. Таким образом, уравнения (16) и (17) равносильны.

Решаем уравнение (17). Обозначив $\operatorname{tg}x=t$, получим

$$\frac{10t}{1+t^2}-5\frac{1-t^2}{1+t^2}=t+5.$$

После простых преобразований придем к уравнению $t^3-9t+10=0$, равносильному предыдущему. Один из делителей свободного члена, а именно, $t_1=2$, является решением этого уравнения. Разложив теперь левую часть на множители (например, с помощью деления многочлена $t^3-9t+10$ на разность $(t-2)$), получим $(t-2)(t^2+2t-5)=0$. Решив квадратное уравнение $t^2+2t-5=0$, найдем еще два решения $t_2=\sqrt{6}-1$, $t_3=-\sqrt{6}-1$. Таким образом, исходное уравнение (16) равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg}x=2,\qquad \operatorname{tg}x=\sqrt{6}-1,\qquad \operatorname{tg}x=-\sqrt{6}-1,$$

которые имеют соответственно решения

$$x=\operatorname{arctg}2+\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z},$$
$$x=\operatorname{arctg}(\sqrt{6}-1)+\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z},$$
$$x=-\operatorname{arctg}(\sqrt{6}+1)+\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Эти значения x и составляют множество всех решений уравнения (16). ▲

В формулах (9), как уже отмечалось, левые части определены для всех значений x, а правые — лишь для $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому подстановка в уравнение *правых* частей этих формул вместо левых может привести к потере решений вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. При использовании такого преобразования следует либо установить равносильность полученного уравнения исходному (так

было сделано в примере 11), либо подстановкой значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в исходное уравнение проверить, нет ли среди них решений. Следующий пример подтверждает необходимость такой проверки.

Пример 12. Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = -1. \tag{18}$$

△ Преобразуем уравнение с помощью формул (9) (способ, предложенный в примере 5, на наш взгляд предпочтительнее):

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -1. \tag{19}$$

Уравнение (19) не равносильно исходному уравнению (18). Действительно, значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не являются, очевидно, решениями уравнения (19). В то же время подстановкой легко убедиться в том, что все эти значения x являются решениями уравнения (18).

Рассмотрим теперь значения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что любое решение уравнения (18), удовлетворяющее условию $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, является решением уравнения (19), и наоборот, любое решение уравнения (19) является решением уравнения (18). Решаем уравнение (19). Преобразуя его, получаем

$$\frac{2(\operatorname{tg} x + 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} x = -1,$$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Эти значения x вместе со значениями $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и составляют множество всех решений уравнения (18).

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (если в ответе к примеру 5 взять соответственно $n = 2k + 1$ и $n = 2k$, то получим данный ответ).

Подстановка в уравнение *левой* части формул (9) вместо правой может привести к появлению посторонних для исходного уравнения значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При таких преобразованиях следует проверить, все ли решения полученного уравнения являются решениями исходного.

Указанные особенности преобразований уравнения с помощью формул (9) и связанная с ними необходимость проверки имеют место и в других случаях, когда используются формулы, правая и левая части которых имеют разные области определения.

Отметим еще, что уравнение, к которому приводят преобразования по формулам (9), нередко получается сложным. Поэтому

прежде чем применять эти формулы, полезно поискать иные пути решения.

Однородные уравнения.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$$

△ Рассмотрим такие x, что $\cos x = 0$. Из уравнения следует, что тогда и $\sin x = 0$, а это невозможно. Следовательно, среди этих значений x решений нет. Рассмотрим значения x, для которых $\cos x \neq 0$. Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

равносильное исходному. Решив его как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, найдем

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = 2.$$

Отсюда получаем ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ▲

Рассмотренное уравнение является примером уравнения вида

$$a_0 u^2 + a_1 uv + a_2 v^2 = 0, \tag{20}$$

которое называют *однородным относительно u и v степени 2*. В предыдущем примере $u = \sin x$, $v = \cos x$. Как было показано, уравнение вида (20) делением обеих его частей на v^2 сводится к квадратному уравнению

$$a_0 t^2 + a_1 t + a_2 = 0$$

относительно $t = u/v$. Такое же преобразование можно применить для решения однородных уравнений более высокой степени.

Некоторые уравнения, не являющиеся однородными, можно свести к однородным, используя равенство

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

верное для всех x.

Пример 14. Решить уравнение $2\sin^3 x = \cos x$.

△ Поскольку $\cos x = \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x)$ для всех x, то данное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin^3 x = \cos x \sin^2 x + \cos^3 x,$$

однородному относительно $\sin x$ и $\cos x$ степени 3. В случае $\cos x = 0$ решений, очевидно, нет. Деля обе части уравнения на $\cos^3 x$ и обозначая $\operatorname{tg} x = t$, приходим к уравнению

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0.$$

Одним из его корней является $t_1 = 1$. Разложив левую часть на

множители, получим $(t-1)(2t^2+t+1)=0$. Поскольку $2t^2+t+1>0$ для любого t, корень $t_1=1$ является единственным. Отсюда $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

Разложение на множители. Преобразование уравнения с целью выделения общего множителя часто представляет собой наиболее короткий путь решения. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 15. Решить уравнение $2\sin^3 x+\cos^2 2x=\sin x$.

△ Сгруппируем члены уравнения и преобразуем его следующим образом:

$$(2\sin^3 x-\sin x)+\cos^2 2x=0,$$
$$\sin x(2\sin^2 x-1)+\cos^2 2x=0.$$

Воспользовавшись формулой $1-2\sin^2 x=\cos 2x$, получим

$$-\sin x\cos 2x+\cos^2 2x=0,$$
$$\cos 2x(\cos 2x-\sin x)=0.$$

Последнее уравнение равносильно исходному. В то же время оно, очевидно, равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x=0, \quad \cos 2x-\sin x=0.$$

Эти уравнения имеют соответственно решения

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

(второе уравнение решено в примере 4), которые являются решениями и исходного уравнения. ▲

Пример 16. Решить уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^3 x+\cos^3 x.$$

△ Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x).$$

Правую часть разложим в произведение как сумму кубов:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x).$$

Теперь уравнение можно записать в виде

$$(\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\sin x\cos x\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x+\cos x=0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}-1+\sin x\cos x=0.$$

Первое из этих уравнений равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -1$, а второе — уравнению $\sin 2x = 2 - \sqrt{2}$. Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Это и есть все решения исходного уравнения. ▲

В некоторых случаях при решении уравнения методом разложения на множители могут появиться посторонние значения неизвестного. Они устраняются подстановкой найденных значений в исходное, или равносильное ему, уравнение.

Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 17. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x \sin x.$$

△ Сгруппируем члены уравнения и преобразуем его следующим образом:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \sin x) - (1 + \sin x) = 0,$$
$$(1 + \sin x) \operatorname{tg} x - (1 + \sin x) = 0,$$
$$(1 + \sin x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0. \qquad (21)$$

Получившееся уравнение равносильно исходному. Если x — решение этого уравнения, то x является и решением одного из уравнений

$$1 + \sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x - 1 = 0. \qquad (22)$$

Обратное в данном случае (и в отличие от того, что было в примерах 15, 16) неверно. Первое уравнение в (22) имеет решения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для всех этих значений x функция $\operatorname{tg} x$ не определена, поэтому эти значения не являются решениями исходного уравнения. Второе уравнение в (22) имеет решения $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Подстановка в (21) показывает, что эти значения являются решениями этого уравнения, а значит, и исходного.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. ▲

Использование оценок. Некоторые тригонометрические уравнения удается решить, используя неравенства

$$-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1,$$

верные для всех α.

Пример 18. Решить уравнение $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$.

△ Поскольку $\sin 3x \geqslant -1$ и $\cos 2x \geqslant -1$, то $\sin 3x + \cos 2x \geqslant -2$, причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства

$$\sin 3x = -1, \quad \cos 2x = -1. \qquad (23)$$

Это означает, что исходное уравнение равносильно системе (23). Уравнения этой системы имеют соответственно решения

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}; \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Изобразим эти решения соответствующими точками единичной окружности (на рис. 125 решениям первого уравнения соответствуют утолщенные точки, решениям второго уравнения — точки, помеченные крестиком; для нахождения этих точек, достаточно в первом случае взять $k = 0, 1, 2$, а во втором — $l = 0, 1$). Число x будет решением системы (23) тогда и только тогда, когда оно является решением обоих уравнений в (23). Из рис. 125 видно, что такими числами являются лишь числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. ▲

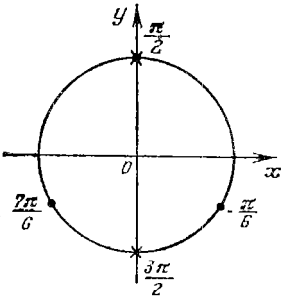


Рис. 125.

Пример 19. Решить уравнение

$$\cos\frac{\sqrt{2}+1}{2}x \cdot \cos\frac{\sqrt{2}-1}{2}x = 1.$$

△ Воспользовавшись формулой для произведения косинусов, преобразуем уравнение к виду

$$\cos\left(\sqrt{2}x\right) + \cos x = 2.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\cos\sqrt{2}x = 1, \qquad \cos x = 1. \qquad (24)$$

Уравнения системы имеют соответственно решения $x = \sqrt{2}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Решениями системы (24) являются те и только те значения x, для которых при некоторых целых m и n выполняются равенства $x = \sqrt{2}\pi n = 2\pi m$. Найдем все целые m и n, для которых $\sqrt{2}\pi n = 2\pi m$. Сократив здесь на $\sqrt{2}\pi$, получим, что $n = \sqrt{2}m$. Это равенство возможно только при $m = 0$, $n = 0$. Действительно, если $m \neq 0$ и $n = \sqrt{2}m$, то $\sqrt{2} = n/m$. Но это равенство неверно, так как $\sqrt{2}$ — не рациональное число, а n/m — рациональное. Следовательно, $m = 0$, но тогда и $n = 0$. Таким образом, система (24), а значит, и исходное уравнение имеют единственное решение $x = 0$. ▲

В заключение этого параграфа рассмотрим пример уравнения, которое не является тригонометрическим, но при исследовании которого используются свойства тригонометрических функций.

Пример 20. Доказать, что при $a > (3\sqrt{3} - \pi)/6$ уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2}|x| + a$$

решений не имеет.

△ Пусть $a > (3\sqrt{3} - \pi)/6$. Отметим, что $(3\sqrt{3} - \pi)/6 > 0$. Пусть $|x| \geqslant 2$, тогда $\frac{1}{2}|x| + a > 1$, в то время как $\sin x \leqslant 1$. Значит, данное уравнение не имеет решений на множестве $|x| \geqslant 2$.

На отрезке $[-2; 0]$ имеем $\sin x \leqslant 0$, а $\frac{1}{2}|x| + a \geqslant a > 0$, поэтому здесь также решений нет.

На интервале $]0; 2[$ уравнение имеет вид

$$\sin x - \frac{1}{2}x = a.$$

Найдем на этом интервале наибольшее значение функции $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$. Определяем критические точки: $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ (остальные решения этого уравнения не принадлежат $]0; 2[$). Если $0 < x < \pi/3$, то $f'(x) > 0$, поэтому функция $f(x)$ на интервале $]0; \pi/3[$ монотонно возрастает и, значит, $f(x) < f(\pi/3)$. А если $\pi/3 < x < 2$, то $f'(x) < 0$, поэтому функция $f(x)$ на интервале $\left]\frac{\pi}{3}; 2\right[$ монотонно убывает и $f(x) < f(\pi/3)$. Таким образом, значение

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

является наибольшим на $]0; 2[$, т. е. для всех $x \in]0; 2[$

$$\sin x - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} < a.$$

Значит, и на интервале $]0; 2[$ данное уравнение решений не имеет. ▲

§ 2. Системы тригонометрических уравнений

В этом параграфе рассмотрим на примерах некоторые приемы, используемые при решении тригонометрических систем. Ограничимся при этом лишь системами с двумя переменными (часто говорят также, неизвестными) x и y. Решения системы записываются как обычно в виде упорядоченных пар $(x; y)$.

Системы, содержащие уравнение вида

$$x + y = \alpha \quad \text{или} \quad x - y = \alpha,$$

подстановкой можно свести к одному уравнению.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \sin(x - y) = 2 \sin x \sin y, \\ x + y = \pi/2. \end{cases}$$

△ Сделаем подстановку $y=\frac{\pi}{2}-x$ в первое уравнение и преобразуем его:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=2\sin x\cos x,$$

$$-\cos 2x=\sin 2x, \qquad \operatorname{tg}2x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. Теперь находим $y=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}\right)\middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

В некоторых случаях прежде чем выполнять подстановку в уравнение системы, бывает полезно его преобразовать.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=1/2,\\ x-y=4\pi/3.\end{cases}$$

△ Преобразуем первое уравнение данной системы:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(1-\cos 2y)=\frac{1}{2},$$

$$\cos 2x+\cos 2y=1, \qquad 2\cos(x+y)\cos(x-y)=1.$$

Ясно, что система

$$\begin{cases}\cos(x+y)\cos(x-y)=1/2,\\ x-y=4\pi/3\end{cases}$$

имеет те же решения, что и исходная, т. е. эти системы равносильны. После подстановки $x-y=4\pi/3$ в первое уравнение полученной системы будем иметь $\cos(x+y)\cos(4\pi/3)=1/2$, откуда $\cos(x+y)=-1$ и, следовательно, $x+y=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Теперь при каждом $n\in\mathbb{Z}$ из линейной системы

$$\begin{cases}x+y=\pi(2n+1),\\ x-y=4\pi/3,\end{cases}$$

находим $x=\frac{7\pi}{6}+\pi n$, $y=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Множество всех таких пар значений x и y и есть множество всех решений исходной системы. ▲

В предыдущих примерах получаемые соотношения между неизвестными x и y и множество решений системы записывались с помощью только одного целочисленного параметра. Обычно же при решении систем с двумя переменными появляются два целочисленных параметра.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases} \tag{1}$$

△ Из первого уравнения системы (1) следует, что

$$x+y=\pi m, \qquad m\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

а из второго

$$x-y=\pi n, \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Теперь при произвольно взятых значениях m и n из линейной системы

$$\begin{cases} x+y=\pi m, \\ x-y=\pi n \end{cases} \tag{4}$$

находим

$$x=\frac{\pi}{2}(m+n), \qquad y=\frac{\pi}{2}(m-n),$$

где $m\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{Z}$. Эти пары чисел и только они и составляют множество всех решений системы (1). ▲

Было бы ошибкой вместо систем вида (4) (где m и n – любые целые числа) рассмотреть только системы

$$\begin{cases} x+y=\pi m, \\ x-y=\pi m, \quad m\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5}$$

(к такой ошибке обычно приводит употребление одной буквы для обозначения параметров в соотношениях вида (2), (3)). Действительно, системы вида (4) охватывают все возможные пары параметров m и n, в то время как в системах вида (5) рассматриваются лишь пары с равными значениями ($m=n$). Это приводит к потере решений. Из (5) следует, что

$$x=\pi m, \qquad y=0,$$

где $m\in\mathbb{Z}$, тогда как, например, все пары

$$x=0, \qquad y=\pi n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

также являются решениями системы (1).

Рассмотрим примеры решений более сложных систем.

Введение новых переменных можно использовать, например, в тех случаях, когда система содержит только две тригонометрические функции или приводится к такому виду.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \sin\ x+\cos\ y=1, \\ \cos 2x-\cos 2y=1. \end{cases}$$

△ Преобразуем второе уравнение:

$$1-2\sin^2 x+1-2\cos^2 y=1, \quad \sin^2 x+\cos^2 y=1/2.$$

Ясно, что система

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2 \end{cases}$$

равносильна исходной. Обозначив для простоты $u = \sin x$, $v = \cos y$, получим

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = 1/2. \end{cases}$$

Легко установить, что эта алгебраическая система имеет единственное решение $u = 1/2$, $v = 1/2$. Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x = 1/2, \\ \cos y = 1/2. \end{cases}$$

Эти уравнения имеют соответственно решения:

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Множество всевозможных пар, составленных из этих значений x и y, и есть множество всех решений исходной системы. Для краткости такие пары записывают в виде

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad m, n \in \mathbb{Z},$$

подразумевая, что знак в формуле для y выбирается произвольно. ▲

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y = 1/2. \end{cases} \tag{6}$$

△ Первое уравнение, используя формулу для суммы синусов, приведем к виду

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Левую часть второго уравнения преобразуем следующим образом:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 \frac{x+y}{2} + 2\cos^2 \frac{x-y}{2} - 1\right) =$$

$$= \cos^2 \frac{x-y}{2} - \sin^2 \frac{x+y}{2}.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos^2\dfrac{x-y}{2}-\sin^2\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

равносильную исходной. Обозначив $u=\sin((x+y)/2)$, $v=\cos((x-y)/2)$, придем к системе

$$\begin{cases} uv=1/\sqrt{2}, \\ v^2-u^2=1/2, \end{cases}$$

которая имеет два решения: $u_1=1/\sqrt{2}$, $v_1=1$; $u_2=-1/\sqrt{2}$, $v_2=-1$. Таким образом, каждое решение исходной системы является решением одной из систем:

$$\text{1)}\ \begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\dfrac{x-y}{2}=1, \end{cases} \qquad \text{2)}\ \begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\dfrac{x-y}{2}=-1. \end{cases} \tag{7}$$

Проведя выкладки в обратном порядке, убеждаемся в том, что верно и обратное: каждое решение любой из систем 1) и 2) является решением исходной системы. В таких случаях говорят, что система (6) равносильна совокупности систем (7).

Из системы 1) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=(-1)^m\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \\ \dfrac{x-y}{2}=2\pi n, \end{cases}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Отсюда находим

$$x=(-1)^m\frac{\pi}{4}+\pi(m+2n), \qquad y=(-1)^m\frac{\pi}{4}+\pi(m-2n), \tag{8}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$.

Решаем систему 2):

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \\ \dfrac{x-y}{2}=\pi(2n+1), \end{cases}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Отсюда

$$x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{4}+\pi(m+2n+1),\ y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{4}+\pi(m-2n-1), \tag{9}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: Множество всех решений системы задается формулами (8), (9). ▲

Рассмотрим пример еще одной замены.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sin y-\cos y, \\ 2\sin 2x=\dfrac{3}{2}+\sin 2y. \end{cases}$$

△ Обозначим

$$u=\sin x+\cos x, \quad v=\sin y-\cos y$$

и воспользуемся тем, что $\sin 2x=u^2-1$, $\sin 2y=1-v^2$. Это позволяет свести данную систему к алгебраической:

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+v, \\ 2u^2+v^2=9/2. \end{cases}$$

Получившаяся система имеет два решения:

$$u_1=-4/3\sqrt{2}, \quad v_1=-7/3\sqrt{2}; \quad u_2=\sqrt{2}; \quad v_2=1/\sqrt{2}.$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} \sin x+\cos x=-4/3\sqrt{2}, \\ \sin y-\cos y=-7/3\sqrt{2}; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \sin x+\cos x=\sqrt{2}, \\ \sin y-\cos y=1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Первая из этих систем решений не имеет, поскольку $|\sin y-\cos y|\leqslant\sqrt{2}$, а $|-7/3\sqrt{2}|>\sqrt{2}$. Решения уравнений системы 2) найдем введением вспомогательного угла:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1, \qquad x=\frac{\pi}{4}+2\pi m;$$

$$\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}, \qquad y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n,$$

где m, $n\in\mathbb{Z}$. Эти пары значений x и y и составляют множество всех решений исходной системы. ▲

В ряде случаев для решения системы ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одно из неизвестных (переменных), разложить полученное уравнение на множители и т. д. Рассмотрим несколько примеров использования таких преобразований.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} \cos x\cos y=3/4, \\ \sin x\sin y=-1/4. \end{cases}$$

△ Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получаем соответственно

$$\cos x\cos y+\sin x\sin y=1/2, \qquad \cos(x-y)=1/2;$$

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y=1, \qquad \cos(x+y)=1.$$

Система

$$\begin{cases}\cos(x-y)=1/2,\\ \cos(x+y)=1\end{cases}$$

равносильна исходной. Решаем каждое уравнение этой системы:

$$x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z};\qquad x+y=2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Взяв в первой из этих формул верхний знак, найдем, что

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi(m+n),\qquad y=-\frac{\pi}{6}+\pi(n-m), \tag{10}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Для нижнего знака получим

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi(m+n),\qquad y=\frac{\pi}{6}+\pi(n-m), \tag{11}$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Формулы (10) и (11) и задают множество всех решений исходной системы. Для краткости используют и такую запись:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(m+n),\qquad y=\mp\frac{\pi}{6}+\pi(n-m),$$

где $m,\ n\in\mathbb{Z}$, оговаривая, что в этих формулах следует одновременно брать либо верхние, либо нижние знаки. ▲

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\cos^3 y,\\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2}\sin^3 y.\end{cases}$$

△ По формуле приведения имеем $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)=$ $=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. Значит, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\cos^3 y,\\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\sin^3 y.\end{cases} \tag{12}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$1=8\cos^3 y\sin^3 y,$$

откуда $\sin^3 2y=1$, $\sin 2y=1$, $2y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Эти значения подставляем в систему (12) и, учитывая, что

$$\cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha,\qquad \sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\sin\alpha,$$

получаем

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=(-1)^n, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=(-1)^n. \end{cases} \tag{13}$$

Если $n=2k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $y=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, а система (13) равносильна одному уравнению $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$, откуда $x=\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

Если $n=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, то $y=\frac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$, а система (13) равносильна уравнению $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\left(\pi l;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right),\ \left(-\frac{\pi}{2}+\pi l;\ \frac{\pi}{4}+\pi(2k+1)\right)\ \middle|\ l,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1, \\ \cos x-\cos y=\sqrt{3}. \end{cases} \tag{14}$$

△ Преобразуем сначала уравнения системы по формулам суммы синусов и разности косинусов. Получим систему

$$\begin{cases} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}, \\ \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

равносильную исходной. Обозначим $(x+y)/2=u$, $(x-y)/2=v$, тогда эта система будет иметь вид

$$\begin{cases} \sin u\cos v=1/2 \\ \sin u\sin v=-\sqrt{3}/2. \end{cases} \tag{15}$$

Ясно, что если $(u;\ v)$ — решение системы (15), то $\sin u\cos v=1/2\neq 0$. Поэтому для любого решения этой системы, разделив почленно второе равенство в (15) на первое, получим, что

$$\operatorname{tg} v=-\sqrt{3}.$$

Отсюда находим $v=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. После подстановки этих значений в (15) получим систему

$$\begin{cases} \sin u=(-1)^n, \\ \sin u=(-1)^n, \end{cases}$$

откуда $u=(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Теперь из системы

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi m,\\ \frac{x-y}{2}=-\frac{\pi}{3}+\pi n\end{cases}$$

находим

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi(2m+n),\quad y=(-1)^n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi(2m-n),\ (16)$$

где m, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: Множество всех решений системы дается формулами (16). ▲

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x=1+\cos y;\\ \sqrt{2}\sin x=\sin y.\end{cases}$$

△ Возводя почленно уравнения системы в квадрат и складывая, получаем уравнение

$$2=1+2\cos y+\cos^2 y+\sin^2 y.$$

Отсюда $\cos y=0$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Подстановка этих значений y в исходную систему дает

$$\begin{cases}\cos x=1/\sqrt{2},\\ \sin x=(-1)^n/\sqrt{2}.\end{cases}$$

Если $n=2k$, $k\in\mathbb{Z}$, то

$$\begin{cases}\cos x=1/\sqrt{2},\\ \sin x=1/\sqrt{2},\end{cases}$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. При этом $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Если же $n=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, то

$$\begin{cases}\cos x=1/\sqrt{2},\\ \sin x=-1/\sqrt{2},\end{cases}$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. При этом $y=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi l;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi l;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\middle|\ l,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

Если бы в данном примере использовать для нахождения значений x, например, только первое уравнение системы, то легко видеть, что получились бы посторонние значения переменных.

§ 3. Тригонометрические неравенства

При решении неравенств с тригонометрическими функциями существенно используются периодичность этих функций и их монотонность на соответствующих промежутках.

Простейшие тригонометрические неравенства. Функция $\sin x$ имеет наименьший положительный период 2π. Поэтому неравенства вида

$$\sin x > a, \quad \sin x \geqslant a, \tag{1}$$

$$\sin x < a, \quad \sin x \leqslant a \tag{2}$$

достаточно решить сначала на каком-либо отрезке длины 2π. Множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

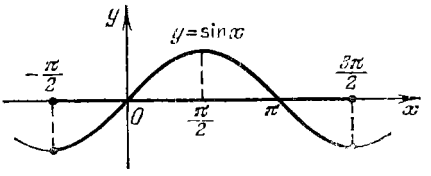


Рис. 126.

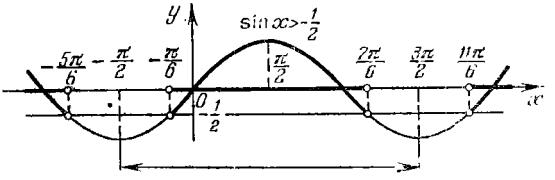


Рис. 127.

Неравенство (1) удобно решить сначала на отрезке $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$ (здесь график функции $\sin x$ образует «холмик», рис. 126).

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > -1/2$.

△ Решим это неравенство на отрезке $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$. Рассмотрим его левую половину — отрезок $[-\pi/2;\ \pi/2]$ (рис. 127). Здесь уравнение $\sin x = -1/2$ имеет одно решение $x = -\pi/6$, а функция $\sin x$ *монотонно возрастает*. Значит, если $-\pi/2 \leqslant x \leqslant -\pi/6$, то $\sin x \leqslant \sin(-\pi/6) = -1/2$, т. е. эти значения x решениями неравенства не являются. Если же $-\pi/6 < x \leqslant \pi/2$, то $\sin x > \sin(-\pi/6) = -1/2$. Все эти значения x являются решениями неравенства.

На оставшемся отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ функция $\sin x$ *монотонно убывает* и уравнение $\sin x = -1/2$ имеет одно решение $x = 7\pi/6$. Следовательно, если $\pi/2 \leqslant x < 7\pi/6$, то $\sin x > \sin(7\pi/6) = -1/2$, т. е. все эти значения x являются решениями неравенства. Для

$x \in [7\pi/6;\ 3\pi/2]$ имеем $\sin x \leqslant \sin(7\pi/6) = -1/2$, эти значения x решениями не являются.

Таким образом, множество всех решений данного неравенства на отрезке $[-\pi/6;\ 3\pi/2]$ есть интервал $]-\pi/6;\ 7\pi/6[$.

В силу периодичности функции $\sin x$ с периодом 2π значения x из любого интервала вида

$$\left]-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\quad \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right[,\qquad n \in \mathbb{Z},$$

также являются решениями неравенства. Никакие другие значения x решениями этого неравенства не являются. Ответ запишем в виде

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

подразумевая, что решениями исходного неравенства являются те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет этим двум неравенствам. ▲

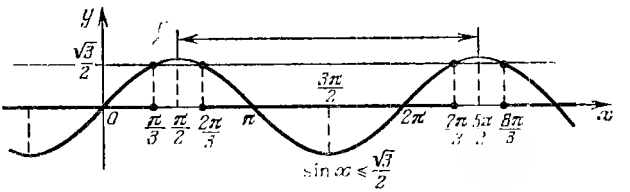


Рис. 128.

Неравенства (2) удобно решить сначала на отрезке $[\pi/2;\ 5\pi/2]$ (здесь график $\sin x$ образует «впадину», рис. 128). На рис. 128 дана графическая иллюстрация к решению неравенства

$$\sin x \leqslant \sqrt{3}/2$$

(подробные рассуждения предлагается провести читателю). Его решениями являются те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3}+2\pi n.$$

Для неравенств

$$\cos x < a, \qquad \cos x \leqslant a \tag{3}$$

удобно сначала найти решения на отрезке $[0;\ 2\pi]$ («впадина», рис. 129).

Пример 2. Решить неравенство $\cos x \leqslant -1/2$.

△ На отрезке $[0;\ \pi]$ функция $\cos x$ *монотонно убывает* (рис. 129), а уравнение $\cos x = -1/2$ имеет одно решение $x = 2\pi/3$. Рассуждая так же, как и в примере 1, получаем, что зна-

чения x из отрезка $[2\pi/3;\ \pi]$ и только они являются решениями данного неравенства на отрезке $[0;\ \pi]$. На отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ функция $\cos x$ *монотонно возрастает* и уравнение $\cos x = -1/2$ имеет решение $x = 4\pi/3$. Отсюда следует, что все значения x на отрезке $[\pi;\ 4\pi/3]$ и только они являются здесь решениями данного неравенства.

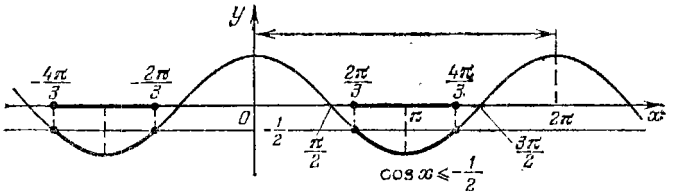


Рис. 129.

Таким образом, множество решений неравенства $\cos x \leqslant -1/2$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ есть отрезок $[2\pi/3;\ 4\pi/3]$. Функция $\cos x$ периодична с периодом 2π, поэтому все значения x, каждое из которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$$

и только они являются решениями исходного неравенства. ▲

Неравенства

$$\cos x > a, \qquad \cos x \geqslant a \tag{4}$$

удобно решить сначала на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ («холмик», рис. 130).

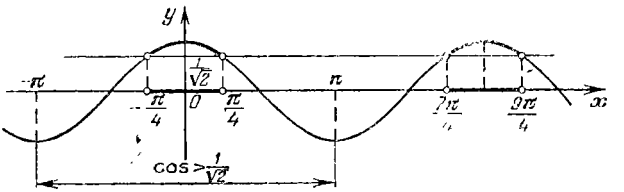


Рис. 130.

Рис. 130 является графической иллюстрацией к решению неравенства

$$\cos x > 1/\sqrt{2}$$

(подробных рассуждений не приводим). Все решения этого неравенства задаются неравенствами вида

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Неравенства

$$\operatorname{tg} x > a, \quad \operatorname{tg} x \geqslant a, \quad \operatorname{tg} x < a, \quad \operatorname{tg} x \leqslant a \tag{5}$$

удобно решить сначала на интервале $]-\pi/2;\ \pi/2[$, а неравенства

$$\operatorname{ctg} x > a, \quad \operatorname{ctg} x \geqslant a, \quad \operatorname{ctg} x < a, \quad \operatorname{ctg} x \leqslant a \tag{6}$$

— на интервале $]0;\ \pi[$. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π, поэтому, прибавляя к найденным на соответствующих интервалах решениям числа вида πn, $n \in \mathbb{Z}$, получим все решения неравенств (5) и (6).

Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 2$.

△ На интервале $]-\pi/2;\ \pi/2[$ функция $\operatorname{tg} x$ *монотонно возрастает* (рис. 131) и уравнение $\operatorname{tg} x = 2$ имеет одно решение $x = \operatorname{arctg} 2$. Если $-\pi/2 < x < \operatorname{arctg} 2$, то $\operatorname{tg} x < 2$, значит, эти значения x являются решениями данного неравенства. Если $\operatorname{arctg} 2 \leqslant x < \pi/2$, то $\operatorname{tg} x \geqslant 2$. Эти значения x решениями не являются. Следовательно, множество решений неравенства $\operatorname{tg} x < 2$ на интервале $]-\pi/2;\ \pi/2[$ есть интервал $]-\pi/2;\ \operatorname{arctg} 2[$.

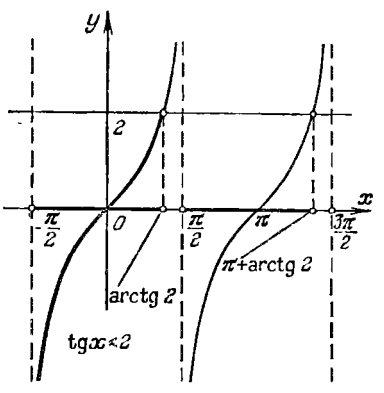


Рис. 131.

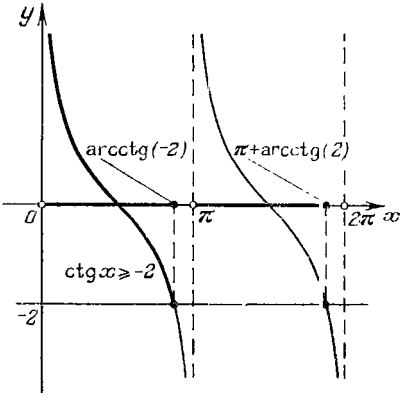


Рис. 132.

Решениями данного неравенства на всей числовой прямой являются все те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 2 + \pi n. \ \blacktriangle$$

Рис. 132 является графической иллюстрацией к решению неравенства

$$\operatorname{ctg} x \leqslant -2.$$

Его решениями являются те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg}(-2) + \pi n.$$

Примеры решения более сложных неравенств. Для сведения тригонометрических неравенств к простейшим тригонометрическим неравенствам можно использовать в подходящих случаях те же преобразования (введение нового неизвестного, разложение на множители и т. д.), которые в § 1 применялись для решения уравнений.

Пример 4. Решить неравенство $\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

△ Обозначим $t=\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}$, тогда неравенство будет иметь вид

$$\sin t<1/\sqrt{2}.$$

На отрезке $\pi/2\leqslant t\leqslant 5\pi/2$ множеством решений этого неравенства является интервал $3\pi/4<t<9\pi/4$. Множество всех решений запишем в виде

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\quad \text{где}\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

Подставив в (7) $t=\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}$, получим

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,$$

откуда $\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi n<x<\frac{13}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Все те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет этим неравенствам, и являются решениями исходного неравенства. ▲

Пример 5. Решить неравенство $\cos 2x-\sin 2x\geqslant 0$.

△ Преобразуем это неравенство с помощью введения вспомогательного угла, в результате получим неравенство

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0,$$

имеющее те же решения, что и исходное. Из свойств косинуса следует, что решениями этого неравенства являются те и только те значения x, каждое из которых при некотором $n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

т. е. $-\frac{3\pi}{8}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+\pi n$. ▲

Пример 6. Решить неравенство $\sin x+\cos 2x>1$.

△ Воспользовавшись формулой $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ и обозначив $t=\sin x$, запишем данное неравенство в виде

$$t(1-2t)>0.$$

Отсюда $0 < t < 1/2$. Таким образом, решениями исходного неравенства являются те и только те значения x, для которых

$$0 < \sin x < 1/2. \tag{8}$$

На отрезке $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$ левое неравенство имеет решения (рис. 133) $0 < x < \pi$. Среди этих значений x решениями правого неравенства системы (8) являются

$$0 < x < \pi/6, \quad 5\pi/6 < x < \pi.$$

Это и есть множество всех решений системы (8), а значит, и исходного неравенства на отрезке $[-\pi/2;\ 3\pi/2]$.

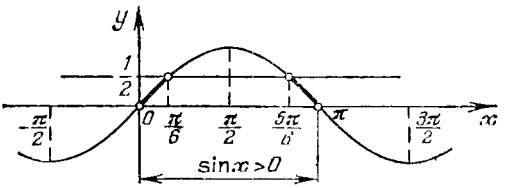


Рис. 133.

Теперь, используя периодичность функции $\sin x$, легко найти на числовой прямой все решения.

Ответ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

Решить уравнения (1—9):

1. $\cos 5x \cos x = \cos 6x$.
2. $2\sin^2 2x + \sin^2 4x = 5/4$.
3. $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$.
4. $4\cos x \cos 2x = \cos 3x$.
5. $(1 + \cos x)\operatorname{ctg} x = \sin 2x$.
6. $2(\sqrt{2} - 1)\sin x + 1 - \operatorname{tg} x = 1/\cos x$.
7. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 2\operatorname{ctg} 4x$.
8. $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$.
9. $|\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 - 2\sin x - \cos 2x$.
10. Доказать, что $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$, $|a| \leqslant 1$.
11. Найти все значения a $(a \neq 0)$, для которых уравнение

$$\int_0^x (t^2 - 8t + 13)\,dt = x \sin \frac{a}{x}$$

имеет решение. Найти это решение.

Решить системы уравнений (12—14):

12. $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos 2y - \sqrt{2} = 0, \\ \cos 2x + 2\cos x \cos y + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2y, \\ \operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x. \end{cases}$

Решить неравенства (15—17):

15. $\sin x \geqslant \cos 2x$. 16. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$.

17. $\sin x < |\cos x|$.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

Решить уравнения (1—17):

1. $\cos 6x + 2\cos^2 x = 1$. 2. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

3. $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 3x = 1$. 4. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 5x$.

5. $\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x$.

6. $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$.

7. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} 4x + 1}{\operatorname{ctg} 4x - 1}$. 8. $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$. 9. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}$.

10. $\sin^2 2x - \cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$. 11. $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$.

12. $\cos 4x + 2\cos^2 2x + 4\sin 2x = 0$.

13. $6|\sin x|\cos x - 1 = \cos 4x$. 14. $1 - \cos 3x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 3x$.

15. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos 2x$.

16. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$.

17. $11\operatorname{ctg} x - 5\operatorname{tg} x = \frac{16}{\sin x}$.

18. Найти пересечение множества $\{x \mid \cos 2x + 3\cos x + 2 = 0\}$ и множеств $\{x \mid |\sqrt{2}x - 5| < 1\}$.

Решить уравнения (19—22):

19. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$. 20. $2\cos^6 x - 2\sin^6 x = \sin 4x$.

21. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} x = 1$. 22. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 - \sqrt{3}$.

23. Найти все значения p, для которых уравнение

$$\sin x + p\cos x = 2p$$

имеет решения.

Решить уравнения (24—25):

24. $2\sin x + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 + \cos x = 0$. 25. $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = -1$.

26. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 1/2$.

Решить уравнения (27—28):

27. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$. **28.** $3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$.

29. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

для всех $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решить уравнения (30—53):

30. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-x)=0$. **31.** $\sin 2x=\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

32. $\sin 4x+2\cos^2 x=1$. **33.** $\sin^2 2x-4\cos^4 x=\sin 4x$.

34. $\cos 2x=\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos x-\sin x)$.

35. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$. **36.** $\frac{\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

37. $\frac{\cos^2 2x}{\cos x+\cos(\pi/4)}=\cos x-\cos(\pi/4)$.

38. $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=a(1-\sin 2x)$.

39. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\cos\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$.

40. $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$.

41. $\cos 5x-\cos 3x=3\sin 4x$.

42. $\sin 3x-\sin x+\cos 2x=1$.

43. $\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0$.

44. $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cdot\cos 2x=0$.

45. $\sin x\cdot\operatorname{ctg} 3x=\cos 5x$. **46.** $1+\sec x=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$.

47. $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 6x$.

48. $\frac{\cos x-1}{\sin 2x}=2\sin x$. **49.** $\cos 4x-3\cos x=4\sin^2\frac{x}{2}$.

50. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 3x=2$.

51. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$.

52. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(1/x)=1$. **53.** $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}$.

54. Найти все решения уравнения $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=3/2$, удовлетворяющие неравенству $\cos x>1/\sqrt{2}$.

Решить уравнения (55—65):

55. $\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=2\sin x-\frac{1}{\sin x}$.

56. $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\sin 2x-1$. 57. $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=4\sin x$.

58. $\sin^2 2x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{9}{2}\cos 2x$.

59. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

60. $2\sin x=\sin 3x$. 61. $\cos 3x+6\cos^2 x=\cos x$.

62. $2\cos x-\cos\frac{3}{2}x=1$.

63. $\sin 3x+\sin 5x=2(\cos^2 2x-\sin^2 3x)$.

64. $5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0$.

65. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

66. Проверить, какие из чисел множества A являются решениями уравнения:

а) $A=\left\{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi n}{2}\;\middle|\;n\in\mathbb{Z}\right\}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x}=6$;

б) $A=\{\pi n-\operatorname{arctg} 3\mid n\in\mathbb{Z}\}$, $12\operatorname{tg} 2x+\frac{\sqrt{10}}{\cos x}+1=0$.

Решить уравнения (67—76):

67. $1+\operatorname{tg} 2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

68. $\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} 2x=\cos x+\sin 2x$.

69. $\frac{1-\operatorname{ctg} 3x}{1-\operatorname{tg} 3x}=4\cos^2\frac{3}{2}x-2$. 70. $2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$.

71. $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 3x}$. 72. $\frac{\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 3x}$.

73. $\operatorname{tg} 2x-\frac{1}{\sin 3x}=\frac{1}{\sin 4x}-\operatorname{ctg} 3x$.

74. $\frac{\cos x+\cos 2x-\cos 3x-\cos 4x}{\sin 4x+\sin 3x-\sin 2x-\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

75. $2\cos x-\sin 3x=\frac{\cos x\cdot\cos 3x}{|\sin x|}$.

76. $\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|$.

77. При каких a уравнение

$$a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x+9$$

имеет решение?

Решить уравнения (78—86):

78. $\sin^6 x+\cos^6 x=a\sin 4x$.

79. $a\cos 3x+\sin 2x\cdot\sin x-\cos x=0$.

80. $\sin^3 2x+a\sin^2 2x+\sin^2 x=\sin^2 3x$.

81. $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$. 82. $\sqrt{1+\sin x}=\cos x$.

83. $\sqrt{\cos 2x-5\sin x}+2\cos x=0$.

84. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\cos 2x}=1$.

85. $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$.

86. $2\cos x = \sqrt{2+\sin 3x}$.

87. При каких a уравнение

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = a$$

имеет решения?

88*. При каких a уравнение

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x} = a$$

а) имеет решения?

б) имеет единственное решение на отрезке $[-\pi/3;\ \pi/3]$?

Решить уравнения (89—97):

89. $\operatorname{tg} 7x = 2\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}^2 5x \cdot \operatorname{tg} 7x$.

90. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+3x\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{9}+x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}-2x\right)$.

91. $\sin x + 2\cos x = \cos 2x - \sin 2x$.

92. $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

93. $\sin x - \sin\frac{3}{2}x = \frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin x$.

94. $\cos^{12} x + \sin^6 x\,(1+\cos^2 x)^3 = 1$.

95. $\cos^2 x - \sin^2(x\sqrt{3}) = 1$. **96.** $\cos^6 2\pi x - 2\sin^4 \pi x = 3$.

97. $2\sin^2 x \cdot \cos^2 4x = \sin^2 x + \cos^2 4x$.

Решить системы уравнений (98—99):

98. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg} y = 0, \\ 4x + 2y = 5\pi. \end{cases}$ **99.** $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = 3\sin x \sin y, \\ x + 2y = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$

100. При каких a система

$$\begin{cases} 8\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x-y) + 1 = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Решить системы уравнений (101—124):

101. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

102. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 5. \end{cases}$ **103.** $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$

104. $\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

105. $\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = 1/2, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2y = 1, \\ \sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2y = 0. \end{cases}$

107. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin(x+y), \\ \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2} = \frac{3}{4}. \end{cases}$

108. $\begin{cases} \operatorname{tg} 2(x+y) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin(2x+y)\cos y + \cos 2y + 1 = 0. \end{cases}$

109. $\begin{cases} 2\sin x\cdot\cos y=2\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y, \\ 2\sin y\cdot\cos x=\operatorname{ctg}x+2\operatorname{ctg}y. \end{cases}$

110. $\begin{cases} \sin 5x=\sin(x+y)-\sin(x-y), \\ \sin 4x=\sin y-\sin 6x. \end{cases}$

111. $\begin{cases} 4\sin x-2\sin y=3, \\ 2\cos x-\cos y=0. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \sin 2x\sin y+\sin x\cos y=1/\sqrt{2}, \\ \cos 2x\sin y+\cos x\cos y=1/\sqrt{2}. \end{cases}$

113. $\begin{cases} \operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x\cos 2y+\cos y=0, \\ \operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x\sin 2y-\sin y=0. \end{cases}$

114. $\begin{cases} 2\sin x\sin y=\cos 2x+\cos 2y, \\ 2\cos x\sin y=\cos 2x-\cos 2y. \end{cases}$

115. $\begin{cases} \cos^2 x=2\sin^2 y+\cos^2(2y-x), \\ 2\sin^2 x=\cos 2y. \end{cases}$

116. $\begin{cases} \sin(4x-2y)+\sqrt{2}\sin(3x-y)=0, \\ \sqrt{2}\sin(2x-y)+\sin(3x-2y)=0. \end{cases}$

117. $\begin{cases} \sqrt{1+\sin x\cdot\sin y}=\cos x, \\ 2\sin x\cdot\operatorname{ctg}y+1=0. \end{cases}$

118. $\begin{cases} \sin(x+y)-\cos(x+y)=\cos(x-y), \\ \sin y-\cos y=\cos(2x+y). \end{cases}$

119. $\begin{cases} 2\sin^2 y+\sin 2y=\cos(x+y), \\ \cos^2 x+2\sin 2y+\sin^2 y=\cos(x-y). \end{cases}$

120. $\begin{cases} 3\operatorname{tg}(y/2)+6\sin x=2\sin(y-x), \\ \operatorname{tg}(y/2)-2\sin x=6\sin(y+x). \end{cases}$

121. $\begin{cases} \sin x+\cos x=2\sin y, \\ \sin 2x=\sqrt{3}\sin 2y-3\cos 2y. \end{cases}$

122. $\begin{cases} \cos x=\cos y\cos z, \\ \cos y=\cos x\cos z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin x\sin z, \\ \cos z=\cos x\cos y+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin x\sin y. \end{cases}$

123. $\begin{cases} \sin x+\sin z=\sqrt{2}\cos y, \\ \cos x+\cos z=\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2y+\cos 2z=\sin 2x. \end{cases}$

124*. $\begin{cases} \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin z}{\cos x\cos y}+3, \\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\dfrac{\sin x}{\cos y\cos z}-5, \\ \operatorname{tg}z\cdot\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin y}{\cos z\cos x}-3. \end{cases}$

Решить неравенства (125—138):

125. $2\cos^2 x>3/2$. **126.** $\sin x\geqslant\cos x$.

127. $\sin x+2\cos x<2$. **128.** $\cos 2x+3\sin x>$

129. $\sin x + \sin 3x \geqslant 0$. **130.** $\operatorname{tg} x \geqslant 2 \operatorname{ctg} x$.

131. $\operatorname{tg} \pi x + \operatorname{tg} 2\pi x \leqslant 0$.

132. $\sin 2x + \sin x - \sqrt{2} \cos x < 1/\sqrt{2}$.

133. $\sin x + \sin 3x < \sin 5x + \sin 7x$.

134. $|\sin x| > |\cos x|$.

135. $1 + \cos 2x \geqslant \cos x\,(1 + |1 - 2\cos x|)$.

136. $\sqrt{3 + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} \leqslant \dfrac{1 + 3\operatorname{tg} x}{2}$.

137. $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \cos 2x} \geqslant \sin x - \cos x$.

138. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} < \sqrt{2}$.

139. Доказать тождества:

а) $(\sin(\gamma+\beta) - \sin\alpha)(\sin(\gamma-\beta) + \sin\alpha) =$
$= (\sin(\gamma+\alpha) - \sin\beta)(\sin(\gamma-\alpha) + \sin\beta)$;

б) $\cos\alpha + \sin\alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$.

140. Упростить выражение

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

141. Доказать:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

б) $\dfrac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha - 810^\circ)} = \operatorname{ctg}\alpha$.

142. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4\operatorname{tg}\beta,$$

если $5\sin\alpha = 3\sin(\alpha + 2\beta) \neq 0$.

143. Доказать:

а) $\operatorname{ctg} 7{,}5^\circ + \operatorname{tg} 67{,}5^\circ - \operatorname{ctg} 67{,}5^\circ - \operatorname{tg} 7{,}5^\circ = 2(3 + \sqrt{3})$.

б) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{7}}$.

144. Вычислить:

а) $\cos 3\alpha \cos^3\alpha + \sin 3\alpha \sin^3\alpha$, если $\cos 2\alpha = a$.

б) $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 1/4$.

145. Выразить через a и b $\dfrac{\sin^8\varphi}{a^3} + \dfrac{\cos^8\varphi}{b^3}$, если $\dfrac{\sin^4\varphi}{a} + \dfrac{\cos^4\varphi}{b} = \dfrac{1}{a+b}$;

146. Найти:

а) $\sin(\arccos(-3/5))$. б) $\cos(2\arcsin(3/4))$.

в) $\operatorname{tg}(\arcsin(2/3))$. г) $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.

д) $\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3)$.

147. Доказать:

а) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, $x \in [-1; 1]$.

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, $x \in \mathbb{R}$.

в) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1/x)$, $x > 0$,
$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1/x) - \pi$, $x < 0$.

г) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$\arcsin x = -\arccos \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

д) $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}$ $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

148. Доказать, что функция

$$y = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

принимает одно и то же значение для всех $x \geqslant 1$. Найти это значение.

149. Найти все значения a, при которых уравнения

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x - |a-4|(1+\cos 2x)$$

и

$$2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

равносильны.

Решить уравнения (150—154):

150. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

151. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x)$.

152. $2|x-6|\cos x = x-6$. **153.** $\cos \pi x = \left|x+\frac{1}{4}\right| - \left|x-\frac{1}{4}\right|$.

154. $-2\sqrt{3}\pi \sin x = |x+\pi| + |x-2\pi|$.

155*. Доказать, что для любого α и любого натурального $n > 1$

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

156. Найти сумму $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{16} + \ldots + \operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{16}$.

157. Найти общие решения уравнений

$$\sin 5\pi x + \cos 5\pi x + 2\sin\frac{5\pi}{4x} = 0$$

и

$$\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{2x} + 3\cos\frac{5\pi}{2x} + \sin 10\pi x = 0.$$

158. При каких значениях a уравнение

$$\int_0^{\pi} \sin^2\frac{u}{2}\,du = a^2x^2 - \frac{3x-1}{2} + \frac{1}{a^2}$$

имеет решение? Найти это решение.

159. Найти наименьшее значение функции

$$y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$$

при $x > 0$.

160. Найти все значения α, при которых квадратичная функция $x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$ является квадратом линейной функции.

161. Найти все значения α, при которых квадратный трехчлен $x^2\sin 2\alpha - (\sin^2 2\alpha - 4\cos^6\alpha)\,x + \frac{1}{\cos\alpha}$ имеет два одинаковых по абсолютной величине корня разных знаков.

162. Найти все принадлежащие отрезку $[2;\ 3]$ решения уравнения

$$\int_0^{\alpha} \cos(x+\alpha^2)\,dx = \sin\alpha.$$

Решить уравнения (163—165):

163. $\arccos x = 2\arcsin x$.

164. $\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arcctg}^2 x = 5\pi^2/8$.

165. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} 2x - 6\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{4} + x$.

166. При каких a уравнение

$$(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = a$$

имеет единственное решение?

167. Найти все пары чисел $(x;\ y)$ такие, что

а) $\sin(x-y) + \sin y - \sin x = 4\sin(y/2)$.

б) $\cos^4 x + \cos^4 y - \frac{1}{\cos^2 x\cos^2 y} = 1$.

в*) $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = 3/2$.

г*) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y \geqslant 3/2, \\ \cos x \cdot \cos y = 1/4. \end{cases}$

168. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{-x} + 2^x\cos 2y + \cos y = 0, \\ 2^{-x} - 2^x\sin 2y - \sin y = 0. \end{cases}$$

169. Доказать неравенство

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

170*. При каких α неравенство

$$\operatorname{tg}^2(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) - 4a\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) + 2 + 2a \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений? Найти эти решения.

Глава X

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

Вначале напомним некоторые свойства показательной и логарифмической функций, часто используемые при решении уравнений, систем уравнений и неравенств, содержащих эти функции.

Показательная функция a^x рассматривается при любом положительном основании $a\,(a>0)$. Ее областью определения является множество всех действительных чисел $(x\in\mathbb{R})$, множество ее значений — это множество всех положительных действительных чисел $(a^x>0)$. При любом положительном a и любых действительных x и y верны следующие утверждения:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$. 2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. 4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

5. $a^0 = 1$. 6. $a^1 = a$. 7. $1^x = 1$.

8. *Если* $a>1$, *то функция* a^x *возрастает, если* $0<a<1$, *то функция* a^x *убывает.*

Логарифмическая функция $\log_a x$ рассматривается при любом положительном и не равном единице основании $a\,(a>0,\ a\neq 1)$. Ее область определения — множество всех положительных действительных чисел $(x>0)$, множеством ее значений является множество всех действительных чисел $(-\infty<\log_a x<+\infty)$. При любом положительном a, не равном единице, и любых *положительных* x и y верны следующие равенства:

1′. $a^{\log_a x} = x$ (*основное логарифмическое тождество*).

2′. $\log_a a^x = x$.

3′. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (*формула для логарифма произведения*).

4′. $\log_a (1/x) = -\log_a x$.

5′. $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ (*формула для логарифма частного*).

6′. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ *для любого* α (*формула для логарифма степени*).

7′. $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x$ *для любого* $\alpha\neq 0$.

8′. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *для любого* $b>0,\ b\neq 1$ (*формула перехода к новому основанию*).

9′. $\log_a a = 1$. 10′. $\log_a 1 = 0$.

11′. *Если* $a>1$, *то функция* $\log_a x$ *возрастает, если же* $0<a<1$, *то функция* $\log_a x$ *убывает.*

Функции a^x и $\log_a x$ являются взаимно обратными, это выражено равенствами 1′ и 2′.

Замечание. Отметим важную особенность формул 1′, 3′, 5′, 6′. Их правые и левые части, взятые по отдельности, определены на *разных* множествах значений переменных (x или x и y соответственно). В формуле 1′ левая часть определена лишь при $x>0$, а правая — для всех $x\in\mathbb{R}$. В формулах 3′ и 5′ левые части определены для всех пар значений x и y одного знака (т. е. при $xy>0$), а правые — лишь для $x>0$, $y>0$. В формуле 6′ при $\alpha=2n$, где n — целое, $n\neq 0$, левая часть определена для всех $x\neq 0$, правая же — только для $x>0$.

Отмеченную разницу множеств определения следует учитывать, применяя эти формулы для преобразования уравнений и неравенств. Она может привести как к потере решений, так и к появлению посторонних значений неизвестных. В соответствующих примерах на это будет обращено внимание. Отметим, что с подобным обстоятельством мы уже сталкивались ранее (см., например, гл. IX).

Из свойств показательной функции следует, что при любом $a>0$, $a\neq 1$, уравнение

$$a^x=b$$

имеет и притом единственное решение для любого $b>0$. Это решение в общем случае записывается в виде $x=\log_a b$. Если $a=1$, то уравнение $1^x=b$ имеет решение только для $b=1$. Его решением является любое действительное число.

Из свойств логарифмической функции следует, что при любом $a>0$, $a\neq 1$, уравнение

$$\log_a x=b$$

имеет и притом единственное решение для любого $b\in\mathbb{R}$. Его решение в общем случае записывается в виде $x=a^b$.

При решении показательных и логарифмических уравнений часто используются два преобразования: логарифмирование и потенцирование.

Логарифмирование по основанию $c>0$, $c\neq 1$, представляет собой переход от равенства

$$a=b \tag{1}$$

к равенству

$$\log_c a=\log_c b \tag{2}$$

(здесь a и b могут обозначать как числа, так и выражения, содержащие переменные). Если (1) — верное равенство и обе его части *положительны* ($a>0$, $b>0$), то и (2) — верное равенство.

Потенцированием по основанию $c>0$, $c\neq 1$, назовем переход от равенства (2) к равенству (1). Если (2) — верное равенство, то и (1) — верное равенство.

§ 1. Показательные уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$4\cdot 9^{x-1}=3\sqrt{2^{2x+1}}.$$

△ Обе части уравнения положительны. Логарифмируя по основанию 2, получаем уравнение

$$2+(x-1)\log_2 9=\log_2 3+\frac{1}{2}(2x+1),$$

которое, очевидно, имеет те же решения, что и исходное уравнение, т. е. равносильно ему. Преобразуя это уравнение и учитывая, что $\log_2 3=\frac{1}{2}\log_2 9$, получаем

$$x(\log_2 9-1)=\frac{3}{2}(\log_2 9-1),$$

откуда $x=3/2$ (так как $\log_2 9-1\neq 0$).

Ответ: 1,5. ▲

Так же как и в этом примере, уравнение вида

$$a^{f(x)}=b^{g(x)},$$

логарифмируя по некоторому основанию $c>0$, $c\neq 1$, можно преобразовать к равносильному уравнению

$$f(x)\log_c a=g(x)\log_c b.$$

Некоторые показательные уравнения введением нового переменного удается свести к алгебраическому уравнению, например квадратному, и т. д.

Пример 2. Решить уравнение

$$5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26.$$

△ Поскольку $0{,}2=5^{-1}$, то $0{,}2^{x-2}=5^{2-x}$, и поэтому уравнение можно записать в виде $5^{x-1}+5^{3-x}=26$. Обозначим $5^{x-1}=t$, тогда

$$t+\frac{25}{t}=26,$$

откуда $t^2-26t+25=0$. Получившееся квадратное уравнение имеет решения $t_1=25$ и $t_2=1$. Отсюда $5^{x-1}=25$, $x=3$; $5^{x-1}=1$, $x=1$. Найденные значения x и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: {3; 1}. ▲

Пример 3. Решить уравнение

$$25^x-12\cdot 2^x-6{,}25\cdot 0{,}16^x=0.$$

△ Запишем уравнение в виде

$$5^{2x} - 12 \cdot 2^x - 6{,}25 \cdot 0{,}4^{2x} = 0.$$

Замечая, что $2 = 5 \cdot 0{,}4$, а следовательно, $2^x = 5^x \cdot 0{,}4^x$, приходим к уравнению

$$5^{2x} - 12 \cdot 5^x \cdot 0{,}4^x - 6{,}25 \cdot 0{,}4^{2x} = 0,$$

которое является однородным степени 2 относительно 5^x и $0{,}4^x$. Разделив его на $0{,}4^x$ и обозначив $t = (5/0{,}4)^x = 12{,}5^x$, получим квадратное уравнение $t^2 - 12t - 6{,}25 = 0$. Его корни суть $t_1 = -0{,}5$ и $t_2 = 12{,}5$. Уравнение $12{,}5^x = -0{,}5$ решений не имеет, уравнение $12{,}5^x = 12{,}5$ имеет решение $x = 1$, которое является решением и исходного уравнения. ▲

Некоторые показательные уравнения удается решить, используя свойства возрастания и убывания показательной функции.

Пример 4. Решить уравнение $4^x + 9^x = 25^x$.

△ Легко угадать и проверить, что $x = 0{,}5$ — решение данного уравнения.

Вопрос в том, единственно ли это решение? Пока не доказано, что других решений нет, или пока не найдены все другие решения (если они есть), задачу нельзя считать решенной.

Ответ на поставленный вопрос вытекает из решения следующей задачи.

Пример 5. Пусть $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ и пусть уравнение

$$a^x + b^x = 1$$

имеет решение x_0. Доказать, что это решение единственно.

△ Показательная функция с положительным основанием, меньшим единицы, убывает, поэтому, если $x < x_0$, то $a^x > a^{x_0}$ и $b^x > b^{x_0}$. Отсюда следует, что $a^x + b^x > a^{x_0} + b^{x_0} = 1$. Значит, при $x < x_0$ данное уравнение решений не имеет. Если $x > x_0$, то $a^x < a^{x_0}$ и $b^x < b^{x_0}$, откуда $a^x + b^x < a^{x_0} + b^{x_0} = 1$. Таким образом, и при $x > x_0$ данное уравнение решений не имеет. Тем самым доказано, что x_0 — единственное решение. ▲

Вернемся к примеру 4. Разделив обе части данного уравнения на 25^x, запишем его в виде

$$(4/25)^x + (9/25)^x = 1.$$

Это уравнение имеет решение $x_0 = 0{,}5$. Согласно доказанному в примере 5 других решений быть не может. Теперь задача примера 4 решена полностью.

Ответ: 0,5. ▲

§ 2. Логарифмические уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2 x(x-1) = 1. \qquad (1)$$

△ Потенцируя по основанию 2, получаем

$$x(x-1)=2. \tag{2}$$

Это уравнение имеет решения $x_1=2$, $x_2=-1$. Подставляя их в уравнение (1), убеждаемся в том, что они являются решениями и этого уравнения.

Ответ: $\{2; -1\}$. ▲

Как видно из решения, уравнения (1) и (2) оказались равносильными. И в общем случае уравнение вида

$$\log_a f(x)=g(x) \tag{3}$$

равносильно уравнению

$$f(x)=a^{g(x)}. \tag{4}$$

Действительно, если x — решение (3), то, потенцируя верное равенство (3), получаем, что и (4) — верное равенство. С другой стороны, если x — решение (4), то, логарифмируя верное равенство (4) (обе его части положительны), получаем, что и (3) — верное равенство.

Пример 2. Решить уравнение $\log_3(3^x-8)=2-x$.

△ Потенцируя по основанию 3, получаем уравнение

$$3^x-8=3^{2-x},$$

откуда $3^{2x}-8\cdot 3^x-9=0$. Это квадратное относительно 3^x уравнение имеет корни 9 и -1. Уравнение $3^x=-1$ решений не имеет, уравнение $3^x=9$ имеет решение $x=2$, которое является и решением исходного уравнения.

Ответ: 2. ▲

Пример 3. Решить уравнение

$$\lg(x^2-6x+7)=\lg(x-3).$$

△ Потенцируя по основанию 10, приходим к уравнению

$$x^2-6x+7=x-3,$$

откуда $x^2-7x+10=0$, $x_1=5$, $x_2=2$. Подстановка $x_1=5$ в исходное уравнение приводит к верному равенству $\lg 2=\lg 2$, значит, $x_1=5$ — решение исходного уравнения. При подстановке $x_2=2$ в уравнение появляется выражение $\lg(-1)$, которое не определено. Значит, $x_2=2$ не является решением исходного уравнения.

Ответ: 5. ▲

Рассмотренное уравнение является примером уравнения вида

$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \tag{5}$$

Такое уравнение, вообще говоря, не равносильно уравнению

$$f(x)=g(x). \tag{6}$$

Решениями уравнения (5), очевидно, будут все те и только те решения уравнения (6), для которых $f(x)>0$ (или, что то же,

$g(x)>0$). В примере 3 из двух решений уравнения $x^2-6x+7=x-3$ только одно, а именно, $x_1=5$, удовлетворяет условию $x-3>0$. Только это значение x и является решением исходного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2 x+\log_2(x-1)=1.$$

△ Преобразуем сумму логарифмов в логарифм произведения

$$\log_2 x(x-1)=1.$$

Это уравнение (см. пример 1) имеет решения $x_1=2$, $x_2=-1$. Подставляя $x_1=2$ в исходное уравнение, получаем верное равенство $1=1$, значит, $x_1=2$ — решение исходного уравнения. При подстановке $x_2=-1$ уже в первом слагаемом левой части получаем выражение $\log_2(-1)$, которое не определено. Значит, $x_2=-1$ не является решением исходного уравнения.

Ответ: 2. ▲

Как видно из этого примера, преобразование суммы логарифмов в логарифм произведения может привести к уравнению, неравносильному исходному. А именно, не всякое решение полученного уравнения может быть и решением исходного. Это связано с тем, что, как уже отмечалось ранее (замечание к формулам 1′, 3′, 5′, 6′), логарифм произведения может быть определен и тогда, когда логарифмы сомножителей не определены. Если при решении уравнения использовалось указанное преобразование, то все найденные значения неизвестного следует проверить, подставляя их в исходное уравнение. Либо же следует установить, для каких из этих значений будут положительны выражения, стоящие под знаком логарифмов в исходном уравнении.

Сказанное в полной мере относится и к случаю преобразования разности логарифмов в логарифм частного.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x+1=0.$$

△ Преобразуем данное уравнение:

$$\log_3\frac{(2-x)3}{(2+x)x}=0,\quad \frac{(2-x)3}{(2+x)x}=1.$$

Отсюда $x^2+5x-6=0$, $x_1=1$, $x_2=-6$. Для $x_1=1$ все выражения, стоящие под знаком логарифмов в исходном уравнении, положительны, значит, $x_1=1$ — решение этого уравнения. Для $x_2=-6$ не определен уже $\log_3(-6)$, поэтому $x_2=-6$ не является решением исходного уравнения.

Ответ: 1. ▲

Пример 6. Решить уравнение

$$2\lg(2x)=\lg(x^2+75). \qquad (7)$$

△ Учитывая, что $2\lg(2x)=\lg(4x^2)$, преобразуем данное уравнение к виду

$$\lg(4x^2)=\lg(x^2+75). \tag{8}$$

Это уравнение, как легко установить, имеет решения $x_1=5$, $x_2=-5$. Обратим внимание на то, что в уравнении (8) выражение $\lg(4x^2)$ определено для всех $x\neq 0$, в то время как в исходном уравнении (7) соответствующее выражение $2\lg(2x)$ определено лишь при $x>0$. Проверка показывает, что из двух решений уравнения (8) лишь $x_1=5$ является решением уравнения (7).

Ответ: 5. ▲

Как видно, из этого примера, замена в уравнении выражения $2n\log_a f(x)$ на $\log_a(f(x))^{2n}$ (n — целое, $n\neq 0$) также может приводить к появлению посторонних значений неизвестного. Как и ранее, это связано с тем, что второе выражение имеет более «широкую» область определения, чем первое.

Замена одного из выражений, входящих в уравнение, на другое, имеющее более «узкую» область определения, естественно может привести к потере решений. Примерами таких преобразований могут служить преобразование логарифма произведения в сумму логарифмов, вынесение показателя степени из-под знака логарифма и т. д. В таких случаях следует рассмотреть тем или иным способом все значения переменной, среди которых могут быть решения уравнения. Скажем, преобразуя $\log_a(f(x))^{2n}$, где n — целое, $n\neq 0$, нужно рассмотреть два случая:

если $f(x)>0$, то $\log_a(f(x))^{2n}=2n\log_a f(x)$,
если $f(x)<0$, то $\log_a(f(x))^{2n}=2n\log_a(-f(x))$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\lg(2x)=\tfrac{1}{4}\lg(x-15)^4. \tag{9}$$

△ Пусть $x-15>0$, тогда $\lg(x-15)^4=4\lg(x-15)$ и, значит,

$$\lg(2x)=\lg(x-15). \tag{10}$$

Отсюда $2x=x-15$, $x=-15$. Это число не является, очевидно, решением ни уравнения (10), ни уравнения (9).

Пусть $x-15<0$, тогда $\lg(x-15)^4=4\lg(15-x)$ и исходное уравнение сводится к уравнению

$$\lg 2x=\lg(15-x). \tag{11}$$

Его решением является $x=5$. Это же значение x является и решением исходного уравнения (9). ▲

Заметим, что если бы вместо двух случаев и соответствующих уравнений (10), (11) рассмотреть лишь тот случай, когда $\lg(x-15)^4=4\lg(x-15)$ (уравнение (10)), то решения уравнения (9) были бы не найдены.

Некоторые логарифмические уравнения в результате преобразований и введения нового переменного удается свести к алгебраическим уравнениям.

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}.$$

△ Обозначим $\log_2 x = t$, перейдем к основанию 2 и воспользуемся формулой для логарифма произведения. Будем иметь

$$\log_4 2x = \frac{1}{2}\log_2 2x = \frac{1}{2}(1+t),$$

$$\log_8 4x = \frac{1}{3}\log_2 4x = \frac{1}{3}(2+t),$$

$$\log_{16} 8x = \frac{1}{4}\log_2 8x = \frac{1}{4}(3+t).$$

В результате исходное уравнение запишется в виде

$$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)}.$$

Решив это уравнение, найдем, что $t_1 = 1$, $t_2 = -4$. Соответственно получаем $\log_2 x = 1$, $x = 2$; $\log_2 x = -4$, $x_2 = 1/16$.

Ответ: $\{2;\ 1/16\}$. ▲

§ 3. Разные примеры уравнений

Пример 1. Решить уравнение $\log_3 x = 1 + \log_x 9$.

△ Переходя к основанию 3, имеем $\log_x 9 = \frac{2}{\log_3 x}$. Обозначив $t = \log_3 x$, запишем исходное уравнение в виде

$$t = 1 + \frac{2}{t}.$$

Это уравнение имеет решения $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Соответственно находим $\log_3 x = 2$, $x = 9$ и $\log_3 x = -1$, $x = 1/3$.

Ответ: $\{9;\ 1/3\}$. ▲

Для преобразования выражения $a^{\log_c b}$ бывает полезна формула

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$. Вывод ее весьма прост: из верного равенства $\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b$ следует, что верно и равенство $\log_c (a^{\log_c b}) = \log_c (b^{\log_c a})$, а отсюда, потенцируя, приходим к (1).

Пример 2. Решить уравнение $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$.

△ Согласно (1) имеем $x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$. Учитывая это, запишем уравнение в виде $5^{2\lg x} - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $5^{\lg x}$. Его корни суть 5 и -1. Из того что $5^{\lg x} = 5$, следует, что $\lg x = 1$, $x = 10$. Уравнение $5^{\lg x} = -1$ решений не имеет. Значит, исходное уравнение имеет одно решение $x = 10$. ▲

Рассмотрим примеры уравнений, содержащих выражения $(f(x))^{\varphi(x)}$. Здесь мы будем рассматривать лишь такие значения x, при которых *основание* $f(x)$ *положительно*.

Пример 3. Решить уравнение $x^{\lg 2x} = 5$.

△ Здесь следует, очевидно, рассматривать лишь значения $x > 0$. Логарифмируя по основанию 10, получаем уравнение

$$\lg(2x) \cdot \lg x = \lg 5,$$

равносильное, как легко видеть, исходному. Полученное уравнение преобразуется к квадратному уравнению

$$\lg^2 x + \lg 2 \cdot \lg x - \lg 5 = 0$$

относительно $\lg x$. Отсюда находим

$$\lg x = \frac{1}{2}(-\lg 2 \pm \sqrt{\lg^2 2 + 4 \lg 5}).$$

Учитывая, что $\lg 5 = 1 - \lg 2$, получаем, что $\lg^2 2 + 4 \lg 5 = (\lg 2 - 2)^2$, следовательно, $\lg x = \frac{1}{2}(-\lg 2 \pm (\lg 2 - 2))$. Соответственно имеем $\lg x = -1$, $x = 0{,}1$; $\lg x = 1 - \lg 2 = \lg 5$, $x = 5$.

Ответ: $\{0{,}1;\ 5\}$. ▲

Пример 4. Решить уравнение

$$|x - 3|^{(x^2 - 8x + 15)/(x-2)} = 1.$$

△ Равенство $a^b = 1$, где $a > 0$, верно тогда и только тогда, когда либо $a = 1$ (в этом случае b — любое число), либо $b = 0$ (в этом случае a — любое положительное число). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1) $|x - 3| = 1$. Отсюда $x - 3 = \pm 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Для первого значения $x_1 = 4$ показатель левой части исходного уравнения определен, и, следовательно, $x_1 = 4$ — решение исходного уравнения. Для второго значения $x_2 = 2$ показатель не определен, это значение не является решением исходного уравнения.

2) $(x^2 - 8x + 15)/(x - 2) = 0$. Отсюда $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. Из этих двух значений решением исходного уравнения будет лишь $x_1 = 5$, а значение $x_2 = 3$ — постороннее, так как для него основание степени в левой части исходного уравнения равно нулю. Таким образом, исходное уравнение имеет два решения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$. ▲

И в общем случае уравнение вида

$$(f(x))^{\varphi(x)} = 1$$

сводится к совокупности двух уравнений:

1) $f(x) = 1$,

2) $\varphi(x) = 0$.

Решениями исходного уравнения будут все те и только те решения этих двух уравнений, для которых выражения $\varphi(x)$ и $f(x)$ определены и $f(x) > 0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} = 1.$$

△ Потенцируя по основанию $2x-1$, приходим к уравнению

$$\frac{x^4+2}{2x+1} = 2x-1,$$

которое, как легко видеть, имеет следующие решения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$. Все решения исходного уравнения содержатся среди этих значений x. Подстановка в исходное уравнение показывает, что его решением будет лишь $x = \sqrt{3}$. Для $x = -1$ и $x = -\sqrt{3}$ основание логарифма $2x-1$ отрицательно, а для $x = 1$ оно равно 1. Все эти три значения не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\sqrt{3}$. ▲

Рассмотренное уравнение является примером уравнения вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = a.$$

Множество всех решений этого уравнения состоит из всех тех и только тех решений уравнения

$$f(x) = (\varphi(x))^a,$$

которые удовлетворяют условиям $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$.

Пример 6. Решить уравнение $\log_{3x} x = \log_{9x} x$.

△ Решения этого уравнения, очевидно, следует искать лишь среди значений x, удовлетворяющих условиям $x > 0$, $3x \neq 1$, $9x \neq 1$. Полагая еще, что $x \neq 1$, перейдем к основанию x:

$$\frac{1}{\log_x 3x} = \frac{1}{\log_x 9x}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что $\log_x 9x = \log_x 3x$, $\log_x 3 = 0$, $3 = x^0$, $3 = 1$. Полученное неверное равенство показывает, что уравнение (2) решений не имеет. Неверным было бы заключить отсюда, что и исходное уравнение не имеет решений. Осталось не исследованным еще значение $x = 1$. Оно-то и является, очевидно, решением исходного уравнения. ▲

Этот пример показывает, что при переходе к новому основанию, которое является выражением, содержащим неизвестное, может произойти потеря тех решений исходного уравнения, для которых это выражение равно единице.

§ 4. Системы показательных и логарифмических уравнений

Рассмотрим сначала примеры систем, которые удается легко решить методом подстановки.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$$

△ Из второго уравнения системы следует, что $\log_4 (x/y) = 1$, откуда $x = 4y$. Заменив в первом уравнении системы x на $4y$, получим уравнение

$$\log_y (4y) - \log_2 y^2 = 1$$

с одной переменной. В первом выражении левой части этого уравнения перейдем к основанию 2, второе выражение преобразуем по формуле логарифма степени, учитывая, что $y > 0$, $y \neq 1$. После простых преобразований получим уравнение $\log_2^2 y = 1$. Отсюда $\log_2 y = 1$, $y = 2$, и тогда $x = 8$; $\log_2 y = -1$, $y = 1/2$, а $x = 2$. Подставив найденные пары значений $x = 8$, $y = 2$ и $x = 2$, $y = 1/2$ в исходную систему, легко проверить, что обе они являются решениями этой системы. ▲

Пример 2. Решить систему [1])

$$\begin{cases} x^{x-y} = y^{x+y}, \\ \sqrt{x} \cdot y = 1. \end{cases}$$

△ Выразив из второго уравнения $y = x^{-0,5}$ и заменив в первом уравнении y на $x^{-0,5}$, придем к уравнению

$$x^{x - x^{-0,5}} = x^{-0,5x - 0,5x^{-0,5}}. \qquad (1)$$

Учитывая, что $x > 0$, разделим обе части этого уравнения на выражение, стоящее в правой части (оно также положительно). В результате получим уравнение

$$x^{1,5x - 0,5x^{-0,5}} = 1.$$

Отсюда: 1) $x = 1$, тогда и $y = 1$, эта пара значений x и y является, очевидно, решением исходной системы; 2) $1,5x - 0,5x^{-0,5} = 0$, откуда $x^{1,5} = 1/3$, $x = 1/\sqrt[3]{9}$, тогда $y = \sqrt[3]{3}$. Убедиться в том, что пара $x = 1/\sqrt[3]{9}$, $y = \sqrt[3]{3}$ является решением исходной системы, можно непосредственной проверкой. Можно поступить и иначе. Эта пара является, очевидно, решением системы, образованной уравнением (1) и уравнением $y = x^{-0,5}$. А эта система равносильна исходной, что сразу видно после замены в уравнении (1) $x^{-0,5}$ на y.

Ответ: $\{(1; 1), (1/\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{3})\}$. ▲

---

[1]) Если основание и показатель степени зависят от переменных, то здесь, как и ранее, рассматриваются лишь те значения переменных, при которых основание *положительно*.

Некоторые системы показательных и логарифмических уравнений удается свести к алгебраическим системам уравнений

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 x = \log_4 y + \log_4 (4 - x), \\ \log_3 (x + y) = \log_3 x - \log_3 y. \end{cases}$$

△ В первом уравнении приходим к основанию 2, а затем преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} \log_2 x^2 = \log_2 (y(4 - x)), \\ \log_3 (x + y) = \log_3 (x/y). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x^2 = y(4 - x), \\ x + y = x/y. \end{cases} \tag{2}$$

Каждое решение исходной системы является решением и системы (2). Значения x и y, дающие решения исходной системы, удовлетворяют, очевидно, неравенствам

$$0 < x < 4, \quad 0 < y. \tag{3}$$

Легко проверить, выполняя обратные преобразования, что каждое решение системы (2), удовлетворяющее неравенствам (3), является и решением исходной системы.

Запишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} x(x + y) = 4y, \\ x + y = x/y. \end{cases}$$

Подставляя x/y вместо $x + y$ в первое уравнение этой системы, найдем, что $x^2 = 4y^2$. Если $x = 2y$, то из второго уравнения следует, что $y = 2/3$, а значит, $x = 4/3$. Если же $x = -2y$, то неравенства (3), очевидно, не выполнены и в этом случае решений исходной системы нет. Найденная пара значений $x = 4/3$, $y = 2/3$ удовлетворяет неравенствам (3) и является единственным решением исходной системы. ▲

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \log_8 (xy) = 3 \log_8 x \cdot \log_8 y, \\ 4 \log_8 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$$

△ Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, преобразуем левые части уравнений по формулам для логарифма произведения и частного и после введения новых переменных $u = \log_8 x$, $v = \log_8 y$ получаем систему

$$\begin{cases} u + v = 3uv, \\ 4(u - v) = u/v. \end{cases} \tag{4}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим $u^2 = 4v^2$, откуда $u = 2v$ или $u = -2v$. Подставляя $u = 2v$ в систему (4), найдем, что $v = 1/2$, а значит, $u = 1$. Отсюда $\log_8 x = 1$, $x = 8$; $\log_8 y = 1/2$, $y = 2\sqrt{2}$. В случае $u = -2v$ аналогично получим, что $x = 1/2$, $y = \sqrt{2}$. Таким образом, исходная система имеет два решения: $x = 8$, $y = 2\sqrt{2}$ и $x = 1/2$, $y = \sqrt{2}$. ▲

§ 5. Показательные и логарифмические неравенства

Некоторые показательные и логарифмические неравенства удается решить непосредственно, используя свойства возрастания и убывания показательной и логарифмической функций (свойства 8 и 11′, указанные во вводной части).

Пример 1. Решить неравенство $0{,}5^{1/x} \geqslant 0{,}0625$.

△ Заметив, что $0{,}0625 = 0{,}5^4$, запишем неравенство в виде

$$0{,}5^{1/x} \geqslant 0{,}5^4. \tag{1}$$

Поскольку показательная функция с основанием, меньшим единицы, убывает, это неравенство верно тогда и только тогда, когда верно неравенство

$$1/x \leqslant 4. \tag{2}$$

Другими словами, неравенство (2) равносильно неравенству (1). Неравенству (2) удовлетворяют следующие значения x: $x < 0$, $x \geqslant 1/4$. ▲

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_9 \frac{2x}{x+1} > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

△ Здесь следует рассматривать лишь такие значения x, при которых

$$\frac{2x}{x+1} > 0. \tag{4}$$

Логарифмическая функция с основанием, бо́льшим единицы, возрастает, поэтому неравенство (3) верно тогда и только тогда, когда наряду с неравенством (4) верно и неравенство

$$\frac{2x}{x+1} > 3. \tag{5}$$

Очевидно, любое решение неравенства (5) удовлетворяет условию (4), поэтому неравенство (5) равносильно неравенству (3). Неравенство (5) имеет следующие решения: $-3 < x < -1$. ▲

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{0,2}(x^2 - 4) \geqslant -1. \tag{6}$$

△ Следует рассматривать лишь значения x, для которых

$$x^2 - 4 > 0. \tag{7}$$

Логарифмическая функция с основанием, меньшим единицы, убывает, поэтому решениями неравенства (6) являются те и только те значения x, которые наряду с (7) удовлетворяют неравенству

$$x^2 - 4 \leqslant 0{,}2^{-1} = 5.$$

Иначе говоря, неравенство (6) равносильно *системе неравенств*

$$0 < x^2 - 4 \leqslant 5.$$

Эта система имеет, очевидно, следующие решения: $2 < |x| \leqslant 3$. ▲

Точно так же, как рассмотренные в примерах 1—3 неравенства, решаются и неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad \log_a f(x) > b \quad \text{и т. д.}$$

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2 \log_{0.5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leqslant 2.$$

△ Это неравенство равносильно системе неравенств

$$0 < \log_{0.5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leqslant 4.$$

Эта система в свою очередь равносильна системе неравенств

$$1 > 2^x - \frac{15}{16} \geqslant 0{,}5^4.$$

Здесь мы учли, что основание логарифма меньше единицы, а также то, что неравенство $2^x - \frac{15}{16} > 0$ следует из правого неравенства этой системы. Преобразуя полученную систему, получаем $31/16 > 2^x \geqslant 1$, откуда $\log_2 31 - 4 > x \geqslant 0$. ▲

Пример 5. Решить неравенство $2^x < 3^{1/x}$.

△ Заметим, что обе части данного неравенства положительны, следовательно, определены логарифмы этих частей, например по основанию 2. По свойству логарифмической функции получаем, что данное неравенство верно тогда и только тогда, когда верно неравенство

$$\log_2 2^x < \log_2 3^{1/x},$$

т. е. эти неравенства равносильны. Преобразуя полученное неравенство, имеем

$$x < \frac{1}{x}\log_2 3, \qquad \frac{x^2 - \log_2 3}{x} < 0.$$

Решив последнее неравенство, например методом интервалов, найдем, что его решения таковы: $x < -\sqrt{\log_2 3}$, $0 < x < \sqrt{\log_2 3}$. ▲

Пример 6. Решить неравенство $\lg(x^2 - 16) \leqslant \lg(4x - 11)$.

△ Это неравенство равносильно системе неравенств

$$0 < x^2 - 16 \leqslant 4x - 11. \tag{8}$$

Множеством решений первого неравенства $0 < x^2 - 16$ является объединение двух интервалов $]-\infty; -4[$ и $]4; +\infty[$. Множество решений второго неравенства — отрезок $[-1; 5]$. Пересечение этих двух множеств — промежуток $]4; 5]$ — является решением рассматриваемой системы, а значит, и исходного неравенства. ▲

Как и в примере 6, при решении неравенств вида

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{9}$$

или нестрогих неравенств такого вида следует рассматривать лишь такие значения x, для которых $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. При этом условии неравенство вида (9) равносильно системе неравенств

$$0 < f(x) < g(x) \quad \text{при} \quad 1 < a,$$

или системе неравенств

$$f(x) > g(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < a < 1.$$

Рассмотрим примеры более сложных неравенств.

Если неравенство содержит степень, основание и показатель которой зависят от переменной, то здесь будут рассматриваться лишь такие значения этой переменной, при которых основание *положительно*.

Пример 7. Решить неравенство

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1. \tag{10}$$

△ Если $x - 3 > 1$, то данное неравенство верно тогда и только тогда, когда $2x^2 - 7x > 0$. Значит, любое решение *системы* неравенств

$$\begin{cases} x - 3 > 1, \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \tag{11}$$

является решением исходного неравенства (10).

Если $0 < x - 3 < 1$, то неравенство (10) верно тогда и только тогда, когда верно и неравенство $2x^2 - 7x < 0$. Значит, любое решение *системы* неравенств

$$\begin{cases} 0 < x - 3 < 1, \\ 2x^2 - 7x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

также является решением неравенства (10).

При $x - 3 = 1$, т. е. $x = 4$, неравенство (10), очевидно, неверно. Из сказанного следует, что множество решений неравенства (10) является *объединением* множеств решений систем неравенств (11) и (12).

Легко найти, что множество решений системы (11) есть интервал $]4; +\infty[$, а системы (12) — интервал $]3; 3, 5[$. Объединение

этих двух интервалов и есть множество решений исходного неравенства.

Ответ: $]3;\ 3{,}5[\cup]4;\ +\infty[$. ▲

Как и в этом примере, при решении неравенств вида

$$(f(x))^{g(x)} > 1, \quad (f(x))^{g(x)} < 1 \tag{13}$$

следует рассматривать два случая:

$$f(x) > 1 \quad \text{и} \quad 0 < f(x) < 1. \tag{14}$$

В случае нестрогих неравенств вида (13) нужно учесть и случай $f(x) = 1$.

Пример 8. Решить неравенство $(x^2 - 2{,}5x + 1)^{x+1} \leqslant$.

△ Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 2{,}5x + 1 \geqslant 1, \\ x + 1 \leqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x^2 - 2{,}5x + 1 \leqslant 1, \\ x + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем неравенств имеет решения $x \leqslant -1$. Вторая система имеет решения $0 \leqslant x < 0{,}5$, $2 < x \leqslant 2{,}5$. Все эти значения x и составляют множество решений исходного неравенства.

Ответ: $]-\infty;\ -1] \cup [0;\ 0{,}5[\cup]2;\ 2{,}5]$. ▲

При решении неравенств вида

$$\log_{f(x)} g(x) > a, \qquad \log_{f(x)} g(x) < a \tag{15}$$

следует так же рассматривать два случая:

$$f(x) > 1 \quad \text{и} \quad 0 < f(x) < 1. \tag{16}$$

Пример 9. Решить неравенство $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) > 1$.

△ Если $2x > 1$, то данное неравенство верно в том и только том случае, когда $x^2 - 5x + 6 > 2x$. Если же $0 < 2x < 1$, то данное неравенство верно тогда и только тогда, когда $x^2 - 5x + 6 < 2x$. Учитывая еще, что в любом случае должно выполняться неравенство $x^2 - 5x + 6 > 0$, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решения $0{,}5 < x < 1$, $6 < x$. Во второй системе первое неравенство верно при $0 < x < 0{,}5$, а неравенство $x^2 - 5x + 6 < 2x$ — при $1 < x < 6$. Сравнивая эти два множества, видим, что вторая система решений не имеет. Следовательно, множество решений исходного неравенства совпадает в данном случае с множеством решений первой из рассмотренных систем.

Ответ: $]0{,}5;\ 1[\cup]6;\ +\infty[$. ▲

При решении нестрогих неравенств вида (15) следует рассматривать и случай

$$g(x) = (f(x))^n. \tag{17}$$

Пример 10. Решить неравенство $\log_{1/x} \frac{2x-1}{x-1} \leqslant -1$.

△ Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 1/x > 1, \\ 0 < \frac{2x-1}{x-1} \leqslant x, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < 1/x < 1, \\ \frac{2x-1}{x-1} \geqslant x. \end{cases}$$

Решаем первую из этих систем. Неравенство $1/x > 1$ имеет решения $0 < x < 1$. Значит, $x - 1 < 0$, а тогда из неравенства $(2x-1)/(x-1) > 0$ следует, что $2x - 1 < 0$, т. е. $x < 0{,}5$. Неравенство $(2x-1)/(x-1) \leqslant x$ сводится (поскольку $x - 1 < 0$) к неравенству $2x - 1 \geqslant x(x-1)$, которое имеет решения $0{,}5 \cdot (3 - \sqrt{5}) \leqslant x \leqslant 0{,}5(3 + \sqrt{5})$. Пересечение этого отрезка с интервалом $0 < x < 0{,}5$ есть промежуток

$$0{,}5(3 - \sqrt{5}) \leqslant x < 0{,}5, \tag{18}$$

который и является множеством решений первой системы.

Вторая система решается аналогично, множество ее решений есть промежуток

$$1 < x \leqslant 0{,}5(3 + \sqrt{5}). \tag{19}$$

Ответ: $[0{,}5(3 - \sqrt{5});\ 0{,}5[\cup]1;\ 0{,}5(3 + \sqrt{5})]$. ▲

Некоторые показательные и логарифмические неравенства введением нового переменного удается свести к алгебраическим неравенствам, например квадратным.

Пример 11. Решить неравенство $\log_4 x - \log_x 4 \leqslant 3/2$.

△ Запишем неравенство в виде

$$\log_4 x - \frac{1}{\log_4 x} \leqslant \frac{3}{2}$$

и обозначим $t = \log_4 x$. В результате получим неравенство

$$t - \frac{1}{t} \leqslant \frac{3}{2},$$

которое имеет решения: $t \leqslant -0{,}5$, $0 < t \leqslant 2$. Отсюда соответственно находим, что

$$\log_4 x \leqslant -0{,}5, \quad 0 < x \leqslant 0{,}5;$$
$$0 < \log_4 x \leqslant 2, \quad 1 < x \leqslant 16.$$

Ответ: $]0;\ 0{,}5] \cup]1;\ 16]$. ▲

Пример 12. Решить неравенство

$$\log_3 (16^x - 2 \cdot 12^x) \leqslant 2x + 1.$$

△ Это неравенство равносильно системе неравенств

$$0 < 16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}.$$

Запишем эту систему в виде

$$0 < 4^{2x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x \leqslant 3 \cdot 3^{2x}.$$

Разделив каждую часть на $3^{2x} > 0$ и обозначив $t = (4/3)^x$, получим систему алгебраических неравенств:

$$0 < t^2 - 2t \leqslant 3.$$

Эта система имеет решения: $2 < t \leqslant 3$. Отсюда находим, что

$$2 < (4/3)^x \leqslant 3, \qquad \log_{4/3} 2 < x \leqslant \log_{4/3} 3.$$

Ответ: $]\log_{4/3} 2;\ \log_{4/3} 3]$. ▲

При решении неравенств следует учитывать те замечания по поводу появления посторонних значений переменной или потери решений, которые были сделаны ранее при решении уравнений.

Пример 13. Решить неравенство

$$2 \log_2 (x-1) > \log_2 (5-x) + 1. \tag{20}$$

△ Преобразуем данное неравенство к виду

$$\log_2 (x-1)^2 > \log_2 2(5-x). \tag{21}$$

Всякое решение исходного неравенства (20) является, очевидно, и решением неравенства (21). Обратное верно в том и только том случае, когда $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$.

Далее, неравенство (21) равносильно системе неравенств

$$(x-1)^2 > 2(5-x) > 0. \tag{22}$$

Первое неравенство этой системы имеет решения: $x < -3$, $3 < x$, второе неравенство — решения: $x < 5$. Следовательно, система (22) имеет решения: $x < -3$, $3 < x < 5$. Из них условию $x > 1$ удовлетворяют лишь значения x из интервала $]3;\ 5[$. Этот интервал и есть множество решений исходного неравенства.

Ответ: $]3;\ 5[$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

Решить уравнения (1—6):

1. $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$. **2.** $x^{\log_8 (8x)} = 16 \sqrt[3]{x^4}$.

3. $\log_{\sqrt{2}\sin x} (1 + \cos x) = 2$.

4. $1 - \log_9 (x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$.

5. $\frac{2}{\lg (0{,}5 + \cos^2 x)} = \log_{\sin 2x} 10$.

6. $\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\cos x} 2 = 0$.

7. При каких значениях a уравнение

$$\log_{x+1}(x+a)=0{,}5$$

имеет единственное решение?

Решить системы уравнений (8—13):

8. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2{,}5,\\ xy=27.\end{cases}$

9. $\begin{cases}4^{x+y}=27+9^{x-y},\\ 8^{x+y}-21\cdot 2^{x+y}=27^{x-y}+7\cdot 3^{x-y+1}.\end{cases}$

10. $\begin{cases}5^{\lg x}=3^{\lg y},\\ (3x)^{\lg 3}=(5y)^{\lg 5}.\end{cases}$ 11. $\begin{cases}x^y=y^x,\\ x^{x^y}=y^{y^x}.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\log_2(x^2+y^2)-\log_2 x=\log_2(x+3y)-1,\\ \log_2\dfrac{xy+1}{2y^2+y-x+2}=\log_2\dfrac{x}{y}-1.\end{cases}$

13. $\begin{cases}2^{x-y}-2\cdot 6^{x-y}-6^{2y}=0,\\ 2^{x-y}-2\cdot 3^{x+y}+3\cdot 9^x=0.\end{cases}$

Решить неравенства (14—19):

14. $\dfrac{7}{9^x-2}\ge\dfrac{2}{3^x-1}$. 15. $\log_3(x+2)>\log_{x+2}81$.

16. $\dfrac{\log_2 x\cdot\log_3(4x)}{\log_4(2x)\cdot\log_{16}(8x)}<5$

17. $\log_x(6x-1)>\log_x(2x)$.

18*. $\log_{x+a}x<\log_a x^2$, $a>0$, $a\ne 1$.

19*. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}<\dfrac{6}{2x-1}$.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

Решить уравнения (1—4):

1. $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$. 2. $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$

3. $5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$. 4. $5^{\log_2 x}+2\cdot x^{\log_2 5}=15$.

5. Вычислить без таблиц значение выражения

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}.$$

6. Выразить:

а) $\log_3 30$ через $a=\log_3 20$ и $b=\lg 3$;

б) $\log_{125}48$ через $a=\log_6 15$ и $b=\log_{12}24$.

Решить уравнения (7—24):

7. $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$. 8. $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$.

9. $5^{\cos^2 x}\left(26-5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)=5$.

10. $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$. 11. $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

12. $x^{0,5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=3^{\log_9 4}$.

13. $4^{\log_3(1-x)}=(2x^2+2x-5)^{\log_3 2}$.

14. $\log_6\left(3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}\right)+\frac{1}{x}=\log_6 5$.

15. $3x+(3-x)\log_3 2=\log_3\left(9\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x+2\cdot 6^x\right)+1$.

16. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

17. $x^{\log_2 98\frac{x}{7}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

18. $x^{\log_3^3 x-3\log_3 x}=3^{-\log_2\sqrt{2^{-64}+8}}$.

19. $(1-\lg 2)\log_5 x=\lg 3-\lg(x-2)$.

20. $\log_2\frac{x-2}{x-1}-1=\log_2\frac{3x-7}{3x-1}$.

21. $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$.

22. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\cos x+\frac{\sqrt{5}}{6}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\cos x-\frac{\sqrt{5}}{6}\right)=2$.

23. $2\log_2\sin x+\log_2 4\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\log_3 2}$.

24. $2\log_3\frac{x-3}{x-7}+1=\log_3\frac{x-3}{x-1}$.

25. Найти все решения уравнения

$$2\log_5|\operatorname{ctg}x|-\log_{0,2}\frac{\sin x}{5\sin x-4\cos x}=0,$$

принадлежащие отрезку $[3,3;\ 4]$.

26. Найти решения уравнения $\operatorname{ctg}x+\log_{\pi/4}x=2$ на интервале $]0;\ \pi[$.

27. Найти:

а) сумму корней уравнения

$$x+1=2\log_2(2^x+3)-2\log_4(1980-2^{-x});$$

б) произведение корней уравнения

$$(3x)^{3\log_6 2x-4}=1980\cdot x^{\log_6 x}.$$

Решить уравнения (28 — 42):

28. $|\cos x|^{\sin^2 x-1,5\sin x+0,5}=1$.

29. $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=(\operatorname{ctg}x)^{\cos x}$.

30. $\log_{x-1}(2x^3-10x^2+13x-1)=3$.

31. $\log_{x^2}(x+1)^2=1$. 32. $\log_{8\cos^2 x}\sin x+0,5=0$.

33. $\log_{\sin 3x}(\cos x-\cos 2x)=1$.

34. $x^2\log_3 x^2-(2x^2+3)\log_9(2x+3)=3\log_3\frac{x}{2x+3}$.

35. $\log_2\log_3(2x+3)+\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{2x+3}=1$.

36. $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4)$.

37. $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$.

38. $\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2$.

39. $\log_x 3\cdot\log_{x/3}3+\log_{x/81}3=0$.

40. $\lg(x^2-8)\cdot\lg(2-x)=\dfrac{\log_5(x^2-8)}{\log_5(2-x)}$.

41. $\log_5 x\cdot\log_3 x=\log_5 x+\log_3 x$.

42. $\log_{ax}x=n\log_{a^2x}x$, где $a>0$, $n\neq 1$, $n\neq 2$.

43. Доказать, что $\log_a b\cdot\log_{ab}b=\log_a b-\log_{ab}b$.

Решить уравнения (44—54):

44. $\lg^2\left(1+\dfrac{4}{x}\right)+\lg^2\left(1-\dfrac{4}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\dfrac{2}{x-1}-1\right)$.

45. $\lg(x-10)\cdot\lg(x+10)=\lg(x^2-100)-1$.

46. $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

47. $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

48. $\log_2(2\sqrt{5-x}+5)=1-\log_{0,5}(x-0,5)$.

49. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x+1=0$.

50. $\sqrt{4\log_4 x-2}+\sqrt{1+\log_2 x}=4$.

51. $3\log_{16}(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_{16}(4x+1)-0{,}5$

52. $\log_2^2\operatorname{tg}x+\log_2\sin^2 x\cdot\log_2\cos^2 x=1$.

53. $\lg^2\cos x=\lg(1-\sin x)\cdot\lg(1+\sin x)$.

54. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$.

55. При каких значениях a уравнение $\log_{x+a}(x-2)=2$ имеет единственное решение?

56. Сколько решений имеет уравнение $e^{2x-x^2}+2x^2-3=x^4$?

Решить уравнения (57—58):

57*. $\left(\dfrac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$, $0<a<1$.

58*. $\log_2(1+\sqrt{x})=\log_3 x$

Решить системы уравнений (59—85):

59. $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7,\\ \log_4(x+y)=2.\end{cases}$

60. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=x+y,\\ \lg x\cdot(\lg y+2)=1.\end{cases}$

61. $\begin{cases}0{,}5\lg x+0{,}5\lg y-\lg(4-\sqrt{x})=0,\\ \left(25^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{y}}-125\cdot 5^{\sqrt{x}}=0.\end{cases}$

62. $\begin{cases}x^y=9,\\ 324^{1/y}=6x.\end{cases}$

63. $\begin{cases}y=1-\log_5 x^2,\\ x^y=0{,}2.\end{cases}$

64. $\begin{cases}3\cdot x^{2y-1}=4,\\ x^{y+1}=6.\end{cases}$

65. $\begin{cases}x^{x+y}=y^{x-y},\\ x^2y=1.\end{cases}$

66. $\begin{cases}4^{\sin x}+3^{\frac{1}{\cos y}}=11,\\ 5\cdot 16^{\sin x}-2\cdot 3^{\frac{1}{\cos y}}=2.\end{cases}$

67. $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0, \\ \log_4 \dfrac{x}{y} - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2 (x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x^{\log_3 y} = 27y, \\ y^{\log_3 x} = 81x. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \log_2 y = \log_4 (xy-2), \\ \log_6 x^2 + \log_3 (x-y) = 1. \end{cases}$

71. $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1, \\ \log_2 y = \sqrt{x}. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \log_2 (x+y) + 2\log_3 (x-y) = 5, \\ 2^x - 5 \cdot 2^{0,5(x+y-1)} + 2^{y+1} = 0. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x (x-3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{2,5}. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \lg x \cdot \lg (x+y) = \lg y \cdot \lg (x-y), \\ \lg y \cdot \lg (x+y) = \lg x \cdot \lg (x-y). \end{cases}$

75. $\begin{cases} \log_2 (10 - 2^y) = 4 - y, \\ \log_2 \dfrac{x+3y-4}{3y-x} = \log_2 (x-1) - \log_2 (3-x). \end{cases}$

76. $\begin{cases} \log_2 (x-3) \cdot \log_{y-2} 2 = 1 + \log_{y-2} 2, \\ \log_5 x \cdot \log_5 (2x-2y+1) - 3\log_5 (2y-1) + 2 = 0. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \lg^2 x \cdot \left(\log_x^2 y - \log_x y + 1\right) = 13, \\ \lg xy = \sqrt{\log_y x} \cdot |\lg y| - 7. \end{cases}$

78. $\begin{cases} \log^3_{2/3} x + \log^3_{2/3} y - \log^3_{2/3} (x+y) = 1, \\ \log_{3/2} x \cdot \log_{3/2} y + \log_{3/2} (x+y) = 0. \end{cases}$

79. $\begin{cases} 2 \cdot 15^x + 15^y = 5^x \cdot 3^{-y}, \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3 \cdot 9^x. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2^{x^2+y^2} = 16^{x+y}, \\ 2^{x^2} + 8 \cdot 2^{y^2} = 8 \cdot 16^x + 16^y. \end{cases}$

81. $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7, \\ 2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z} = \dfrac{7}{4}, \\ x+y+z = 3. \end{cases}$

82. $\begin{cases} 2^{xy} - 2 \cdot 4^{x^2} + 64 = 0, \\ 2^{y(x+z)} + 2 \cdot 2^{x(y+z)} - 20 \cdot 2^{xy} = 0, \\ 2^{xy} + 2^{z(x+y)} - 24 \cdot 2^{yz} = 0. \end{cases}$

83. $\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 6, \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 162, \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = \sqrt[4]{48}. \end{cases}$

84. $\begin{cases} 1+\log_x^{-1} x=\log_x \dfrac{x^2+y^2}{yz}, \\ 1+\log_y^{-1} y=\log_y \dfrac{y^2+z^2}{zx}, \\ 1+\log_z^{-1} z=\log_z \dfrac{z^2+x^2}{xy}. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x2^{x+1}-2\cdot 2^y=-2y\cdot 4^{x+y}, \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1. \end{cases}$

86. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{3x+y}+2^{x+3y}=4, \\ 8^{x+y}+2^{-x-y}=4^{y+a} \end{cases}$$

имеет решения.

87. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2, \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом b (a, $b\in\mathbb{R}$).

88. Определить без таблиц, какое из чисел больше:

а) 0 или $\log_{\log_3 2} 0{,}5$; б) $\log_3 2$ или $\dfrac{5}{8}$.

Решить неравенства (89—108):

89. $3^{(6x-x^2)/x}<\sqrt[4]{27^{2x-1}}$. 90. $4\cdot 0{,}5^{x(x+3)}<0{,}25^{2x}$.

91. $\log_{1/3}\dfrac{3x-1}{x+2}<1$. 92. $\log_{2,25}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0{,}5$.

93. $\log_x 7>\log_x 3$. 94. $\sqrt{\log_3\dfrac{2x-3}{1-x}}<1$.

95. $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0$. 96. $\left|\log_5\dfrac{x+3}{x-4}\right|>1$.

97. $\log_a^2 x^2\ge 1$, $a>0$, $a\ne 1$.

98. $\dfrac{4^x}{2^x-3^x}<4$. 99. $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\le 7\cdot 10^x$.

100. $0{,}8^x-1{,}25^{x+1}>0{,}25$.

101. $2\cdot 3^x+9\cdot 4^x\ge 12^x+18$.

102. $0{,}4^{\lg^2 x+1}\le 6{,}25^{2-\lg x^3}$.

103. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+2}-9)>3$.

104. $3^{-x}+3^x\cdot\log_2 3-\log_2 6>0$. Верно ли, что $\log_3 2-1$ — неравенства?

105. $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)>3$.

106. $\log_5\left(6+\dfrac{2}{x}\right)+\log_{6,2}\left(1+\dfrac{x}{10}\right)\le 1$.

107. $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\sin x+\log_2\cos x+3\ge 0$.

108. $2\log_1(x+2)-\log_4(x+5)<1$.

109. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[4]{\log_5 x+\log_5(3-x)-\log_5(x-1)}.$$

Решить неравенства (110–133):

110. $\dfrac{\lg(8-2x)}{\lg(x-1)} \leqslant 1.$

111. $\log_2(x^2-4x+4)+2x > 2-(x+1)\log_{0.5}(2-x).$

112. $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 1.$

113. $\log_2(x^3-x)-3\log_2\dfrac{x}{x-1} > -2.$

114. $\log_2 x \cdot \log_3 2x + \log_3 x \cdot \log_2 3x \geqslant 0.$

115. $\log_{0.5}(x+2)\cdot\log_2(x+1)+\log_{x+1}(x+2) > 0.$

116. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1.$

117. $\log_a x < 6\log_x a - 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

118. $\log_{x-2} 6 + \log_{x+2} 6 > \log_{x-2} 6 \cdot \log_{x+2} 6.$

119. $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leqslant 30.$

120*. $\dfrac{\log_2(x+1)^3 - \log_3(x+1)^5}{x^2-1} \geqslant 0.$

121. $x^{3+\log_a x} < a^2 x^2, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

122. $x-1^{\log_2(4-x)} > x-1^{\log_2(1-x)}.$

123. $\log_{1-x}\dfrac{2x+3}{4(2x+1)} \geqslant 1.$ **124.** $\log_{x-3}(x^2-4x)^2 \leqslant 4.$

125. $1-\log_{\log_2 x} 2 \geqslant 0$

126. $\log_x(1+x^2) < \log_{x^2}(16-x^2).$

127. $\log_{x-1}(x+1) > \log_{x^2-1}(x+1).$

128. $\sqrt{\log_3(9x+18)} \leqslant \log_3(x+2).$

129. $\sqrt{\log_2 x} + 2\sqrt{\log_x 2} \geqslant 3.$

130. $\dfrac{\lg(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - \lg 4}{\lg(\sin x + \cos x)} < 2.$

131. $\sqrt{1-\log_a x} - \sqrt{1+\log_a x} > a\sqrt{2}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

132*. $\log_x(x-a) > 2, \quad a \in \mathbb{R}.$

133*. $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1} < \dfrac{10}{3-2x}.$

134. При каких значениях a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2) > 1$$

верно при любом действительном x?

135. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства

$$\log_{4-x}(2x^2-5x-3) \leqslant 1$$

будет и решением неравенства $x^2+a^2x-2a^4 \leqslant 0.$

136. Доказать, что $\log_2 3$ — не рациональное число.

137. Определить без таблиц, что больше:

а) $\log_4 60$ или $\log_3 30$; б) $\log_3 75$ или $\log_2 11$.

138. Доказать, что для всех $x \geqslant 1$

$$1+2\ln x \leqslant x^2.$$

139*. Найти среди целых чисел все решения неравенства

$$2x+1 < 2\log_2(x+3).$$

140. Доказать, что для любых $a>0$ и $b>0$ верно неравенство

$$a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a.$$

141. Пусть $0<a<1$, $\varphi(x)=a^x+(1-a)^x$. Доказать, что, если $x>1$, то $\varphi(x)<1$, а если $x<1$, то $\varphi(x)>1$.

142. Пусть $a>0$, $\varphi(x)=(1+a)^x-a^x$. Доказать, что если $x>1$, то $\varphi(x)>1$, а если $x<1$, то $\varphi(x)<1$.

143. Пусть $0<\alpha<1$, $a>0$, $b>0$. Доказать:

а) $a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} < a+b$; б) $a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leqslant \alpha^\alpha \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha}(a+b)$.

144. При каких действительных x и y верно неравенство

$$\sqrt{\log_x(\pi-\sqrt{y})}+2\cos(3\pi\cos\sqrt{y})+\sqrt{\log_{\pi-\sqrt{y}}x} \leqslant 0?$$

Решить системы (145—146):

145. $\begin{cases} 2^{x+1}=y^2+4, \\ 2^{x-1} \leqslant y. \end{cases}$ **146.** $\begin{cases} \log_x(x+2)>2, \\ (x^2-8x+13)^{x-6}<1. \end{cases}$

147. Найти множество точек плоскости, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе:

а) $\begin{cases} 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0, \\ x+3y=5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{0,5}(x+y-1) > \log_{0,5} y, \\ \sqrt{y-x-1} < \sqrt{2-x}. \end{cases}$

148. Найти среди целых чисел все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5y-2^{\frac{x-y}{y}}=1, \\ 2^y-3^x=1. \end{cases}$$

149. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_{n-1} n \cdot \log_n(n+1)\cdot \ldots \cdot \log_{n^5-1} n^5\right).$$

Глава XI

КОМБИНАТОРИКА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА ДЛЯ СТЕПЕНИ БИНОМА. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Размещения, перестановки, сочетания

1. Примеры простейших комбинаторных задач. Начнем с нескольких примеров, типичных для комбинаторики задач.

Пример 1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны комсорг и староста, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

△ Так как по условию задачи каждый учащийся может быть избран комсоргом, то, очевидно, существует 30 способов выбора комсорга. Старостой может стать каждый из оставшихся 29 человек. Любой из 30 способов выбора комсорга может осуществляться вместе с любым из 29 способов выбора старосты. Поэтому существует $30 \cdot 29 = 870$ способов выбора комсорга и старосты. ▲

Пример 2. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый учащийся дежурит один раз?

△ В понедельник может дежурить любой из выделенных шести человек. Во вторник может дежурить каждый из еще не дежуривших пяти учащихся. Следовательно, расписание дежурств на первые два дня недели можно составить $6 \cdot 5 = 30$ способами. К среде остаются четыре человека, которые еще не дежурили, и поэтому на среду дежурного можно будет назначить 4 способами. Каждый из этих способов может комбинироваться с любым из 30 способов выбора дежурных на понедельник и вторник. Таким образом, существует $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов установления очередности дежурств на первую половину недели. В четверг сможет дежурить любой из трех еще не дежуривших учащихся, в пятницу — любой из двух еще не дежуривших. К субботе выбора не будет, так как останется один человек, который еще не дежурил. Он и будет дежурным в субботу. Ясно, что число способов, которыми можно установить очередность дежурств учащихся, равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. ▲

Пример 3. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

△ Обозначив для удобства преподавателей буквами A, B, C, D, E, нетрудно выписать все возможные варианты для состава комиссии, а именно:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,$$
$$BC,\ BD,\ BE,$$
$$CD,\ CE,$$
$$DE.$$

Таким образом, видно, что число различных комиссий равно 10. ▲

Пример 3 удалось решить простым перебором всех возможных случаев. Конечно, такой метод применим только тогда, когда число случаев невелико. Если бы в примере 3 речь шла о создании комиссии не из двух человек, а допустим, из семи, а выбирать экзаменаторов нужно было бы, например, из четырнадцати преподавателей, то попытка перебрать все способы окончилась бы, по всей видимости, неудачей, так как в этом случае можно образовать 3432 комиссии. Этот результат легко можно будет получить после того, как будут выведены общие формулы, позволяющие решать подобные задачи (см. пример 9).

Но прежде чем переходить к выводу этих формул, вернемся к рассмотренным примерам. Посмотрим, что общего в этих примерах и есть ли какая-либо существенная разница между ними.

Прежде всего отметим, что во всех трех примерах речь идет о некотором конечном множестве элементов и о количестве его подмножеств, удовлетворяющих некоторым заданным требованиям. Так, в примере 1 рассматривалось множество всех учащихся класса, т. е. множество, состоящее из 30 элементов, и требовалось найти число всех различных подмножеств этого множества, состоящих из двух элементов (двух учащихся, избранных комсоргом и старостой). В примере 2 рассматривалось шестиэлементное множество дежурных и определялось число шестиэлементных подмножеств этого множества, отличающихся друг от друга только порядком следования элементов. В примере 3 из пятиэлементного множества всех преподавателей выделялись различные двухэлементные подмножества (комиссии) и подсчитывалось их число.

Наряду с отмеченным сходством, при рассмотрении примеров 1—3 выявляется одно очень важное различие, существующее между ними. Оно заключается в том, что в примерах 1—2 и в примере 3 совершенно по-разному понимаются слова «различные подмножества». В примере 3 различными считались подмножества, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом. Порядок элементов не принимался во внимание. Комиссия, состоящая из преподавателей Иванова и Петрова, ничем естественно не отличается от комиссии, состоящей из Петрова и Иванова. В примере 1, напротив, подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, считались различными. Выбор Иванова комсоргом, Петрова старостой и выбор Петрова комсор-

гом, а Иванова старостой — это два различных способа выбора. В примере 2 различными считались подмножества, если они отличались друг от друга только порядком следования элементов.

Если подмножества, отличающиеся только порядком следования элементов, считаются различными, то говорят об *упорядоченных* подмножествах. В противном случае прилагательное «упорядоченные» опускают. Например, у множества, состоящего из четырех элементов a, b, c, d, имеется, очевидно, 4 трехэлементных подмножества

$$abc, \quad abd, \quad acd, \quad bcd$$

и 24 трехэлементных *упорядоченных* подмножества

$$\begin{array}{cccc} abc, & abd, & acd, & bcd, \\ acb, & adb, & adc, & bdc, \\ bac, & bad, & cad, & cbd, \\ bca, & bda, & cda, & cdb, \\ cab, & dab, & dac, & dbc, \\ cba, & dba, & dca, & dcb. \end{array}$$

В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными.

2. Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов.*

Из определения вытекает, что $n \geqslant k \geqslant 0$ и что размещения из n элементов по k элементов — это все k-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Для множества, состоящего из 4-х элементов a, b, c, d, все размещения по 3 элемента были выписаны в конце предыдущего пункта: их оказалось 24, они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из n элементов по k элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «A из n по k»).

A — первая буква французского слова arrangement, что означает размещение, приведение в порядок. Мы уже видели, что число размещений из 4 элементов по 3 элемента равно 24, т. е. $A_4^3 = 24$. Теперь должно быть ясно, что в примере 1 требовалось найти число размещений из 30 элементов по 2 элемента, и из решения этого примера следует, что $A_{30}^2 = 870$. Далее, очевидно,

что $A_n^0 = 1$, так как существует только одно подмножество n-элементного множества, не содержащее элементов (пустое множество).

В общем случае на вопрос о числе размещений из n элементов по k элементов дает ответ следующая формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k > 0, \tag{1}$$

т. е. *число размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до* $n-k+1$ *включительно.*

□ Число размещений из n элементов по k элементов равно числу всех k-элементных упорядоченных подмножеств множества, содержащего n элементов. Первый элемент подмножества можно, очевидно, выбрать n способами, второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способом, так как в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым. Каждый из способов выбора первого элемента может объединяться с каждым из способов выбора второго, и следовательно, существует $n(n-1)$ способов выбора первых двух элементов при построении k-элементного упорядоченного подмножества. После выбора первых двух элементов остаются $n-2$ возможности для выбора третьего элемента, и опять-таки каждая из этих возможностей может комбинироваться с любой из возможностей выбора первых двух элементов, т. е. выбор первых трех элементов может быть осуществлен $n(n-1)(n-2)$ способами. Последний k-й элемент k-элементного подмножества может быть выбран $n-k+1$ способом, так как к моменту выбора k-го элемента осталось $n-(k-1)$ элементов. ■

Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Будем для краткости произведение $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$, т. е. произведение всех натуральных чисел от n до единицы, обозначать символом $n!$ (читается «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать:

$$1! = 1,$$
$$2! = 2\cdot 1 = 2,$$
$$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6,$$
$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24,$$
$$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$ Тогда получим

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Формула (1) была получена в предположении, что $k \geqslant 0$, формулой (2) можно пользоваться и при $k=0$, так как она и в этом частном случае дает правильный результат, а именно

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

При выводе формулы (1) предполагалось также, что $n \neq 0$, т. е. что данное множество имеет хотя бы один элемент. Если $n=0$, то это означает, что рассматривается пустое множество, а так как пустое множество имеет только одно подмножество (самого себя), то $A_0^0 = 1$. Если условиться, что $0! = 1$, то формула (2) будет давать верный результат и в случае $n=0$. В самом деле

$$A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1.$$

Пример 4. Вычислить

$$\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}.$$

△ Используя формулу (2), получаем

$$\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4} = \frac{\frac{20!}{14!} + \frac{20!}{15!}}{\frac{20!}{16!}} = \frac{16!}{14!} + \frac{16!}{15!} =$$

$$= 16 \cdot 15 + 16 = 16 \cdot 16 = 256. \blacktriangle$$

Пример 5. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

△ Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у четырнадцатиэлементного множества.

Следовательно, число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5, т. е. равно A_{14}^5. По формуле (1), полагая в ней $n=14$, $k=5$, находим

$$A_{14}^5 = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240\,240. \blacktriangle$$

3. Перестановки. Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками из n элементов*.

Перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n. P — первая буква французского слова permutation — перестановка. Теперь ясно, что в примере 2 требовалось найти число всех перестановок из 6 элементов (число всех возможных перестановок дежурных класса). Это число оказалось равным 720. Следовательно, $P_6 = 720$.

В общем случае число перестановок из n элементов $P_n = A_n^n$, и следовательно, его можно найти по формуле (1) или по формуле (2), положив в каждой из них $k = n$.

Действительно, формула (2) дает

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,$$

из формулы (1) находим

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n!.$$

Итак, *число перестановок из n элементов равно n!*

Таким образом в множестве, содержащем n элементов, установить определенный порядок следования элементов или, как говорят, *упорядочить* такое множество можно $n!$ способами.

Например, список учеников класса, в котором 20 человек и нет однофамильцев, можно составить

$$20! = 2\ 432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000 \text{ способами.}$$

Пример 6. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

△ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. ▲

Пример 7. Найти n, если

$$\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 A_{n+3}^{k+3}, \qquad k \leqslant n.$$

△ Применяя формулу для числа перестановок и формулу (2) для числа размещений, перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{(n+5)!}{(n-k)!} = 240 \frac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!}.$$

Полученное уравнение равносильно квадратному уравнению

$$(n+5)(n+4) = 240.$$

Его корни $n = 11$ и $n = -20$. При $n = -20$ и левая, и правая части уравнения не имеют смысла. При $n = 11$ для любого k такого, что $0 \leqslant k \leqslant 11$, справедливо равенство $\frac{P_{16}}{P_{11-k}} = 240 A_{14}^{k+3}$. Итак, $n = 11$. ▲

Пример 8. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова «задача»?

△ Образовать какую-либо перестановку из букв слова «задача» — это значит на шесть занумерованных мест каким-нибудь образом поставить одну букву «з», одну букву «д», одну букву «ч» и три буквы «а». Если буквы «з», «д» и «ч» как-то поставлены, то остальные места заполняются буквами «а». Но сколькими способами можно поставить три различные буквы на шесть мест? Очевидно, что число способов равно числу всех трехэлементных упорядоченных подмножеств шестиэлементного множества, т. е. равно $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Можно рассуждать и иначе. Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы равно 6!. Но буква «а» встречается в данном слове три раза, и перестановки только этих трех букв «а» не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова «задача» будет не 6!, а в 3! раз меньше, т. е.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120. \ ▲$$

4. Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов.*

Таким образом, сочетания из n элементов по k элементов — это все k-элементные подмножества n-элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными. Например, для четырехэлементного множества a, b, c, d сочетаниями по 3 элемента являются следующие подмножества:

$$abc, \quad abd, \quad acd, \quad bcd.$$

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k»). C — первая буква французского слова combinasion — сочетание. Мы только что видели, что $C_4^3 = 4$. В примере 3 было найдено число сочетаний из 5 элементов по 2 элемента, причем оказалось, что $C_5^2 = 10$.

В общем случае число сочетаний из n элементов по k элементов определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (3)$$

□ Сначала образуем все возможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Их число равно C_n^k. Затем из каждого полученного подмножества перестановкой его элементов получим все упорядоченные подмножества, которых будет, очевидно, в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Итак, $A_n^k = k!C_n^k$, откуда и следует формула (3). ■

Формулу (3) можно записать в другом, более удобном для вычислений виде. Сократив числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad (4)$$

т. е. *число сочетаний из n элементов по k элементов равно произведению всех натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, деленному на k!*.

Пример 9. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

△ Очевидно столько, сколько существует семиэлементных подмножеств у четырнадцатиэлементного множества. По формуле (4) находим

$$C_{14}^7 = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3432. \blacktriangle$$

Пример 10. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

△ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т. е. их число равно C_{18}^2. По формуле (4) получаем

$$C_{18}^2 = \frac{18\cdot 17}{2} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. ▲

Пример 11. Решить неравенство

$$C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^x.$$

△ Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда x — целое число, принадлежащее отрезку $[1; 11]$. Правая часть имеет смысл в том и только в том случае, когда x — целое число и $x \in [0; 10]$. Следовательно, решениями неравенства могут быть только целые значения x, лежащие на отрезке $[1; 10]$.

Используя формулу (3), данное неравенство запишем следующим образом:

$$\frac{10!}{(x-1)!\,(10-x+1)!} > 2\,\frac{10!}{x!\,(10-x)!}.$$

Разделив обе части неравенства на $\frac{10!}{(x-1)!\,(10-x)!}$, получим

$$\frac{1}{11-x} > \frac{2}{x},$$

откуда $x > 22-2x$, т. е. $x > 22/3$. Учитывая ограничения $x \in \mathbb{N}$ и $x \in [1; 10]$, получаем множество решений данного неравенства:

$$\{8; 9; 10\}. \blacktriangle$$

Числа C_n^k обладают многими интересными и важными свойствами. Остановимся на двух свойствах, которые часто используются.

Первое свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

□ Применяя формулу (3), получаем

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k. \blacksquare$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k > n/2$, например

$$C_{15}^{13} = C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Второе свойство:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \qquad (k < n). \tag{5}$$

□ Опять используем формулу (3):

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}. \blacksquare$$

§ 2. Формула Ньютона

Хорошо известные формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

можно записать так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 b^2 + C_3^3 b^3.$$

Возникает естественная гипотеза: не будут ли справедливы аналогичные формулы для четвертой, пятой и вообще любой натуральной степени двучлена (бинома)?

Выясним сначала, будет ли справедлива аналогичная формула для четвертой степени. Для этого обе части формулы для $(a+b)^3$ умножим на $a+b$. Тогда получим

$$(a+b)^4 = (C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3)(a+b) =$$
$$= C_3^0 a^4 + C_3^1 a^3 b + C_3^2 a^2 b^2 + C_3^3 ab^3 +$$
$$+ C_3^0 a^3 b + C_3^1 a^2 b^2 + C_3^2 ab^3 + C_3^3 b^4 =$$
$$= C_3^0 a^4 + (C_3^1 + C_3^0)\, a^3 b + (C_3^2 + C_3^1)\, a^2 b^2 + (C_3^3 + C_3^2)\, ab^3 + C_3^3 b^4.$$

Учитывая, что

$$C_4^1 = C_4^0, \quad C_3^1 + C_3^0 = C_4^1, \quad C_3^2 + C_3^1 = C_4^2,$$
$$C_3^3 + C_3^2 = C_4^3, \quad C_3^1 = C_4^4,$$

убеждаемся в справедливости формулы

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4.$$

Таким образом, нам удалось, используя формулу для третьей степени бинома, получить аналогичную формулу для четвертой степени. Проведенное рассуждение, во-первых, подтверждает гипотезу и, во-вторых, наталкивает на мысль воспользоваться для ее доказательства методом математической индукции.

Теорема. *Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Используя знак суммы, формулу Ньютона можно записать короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (2)$$

□ Для $n=1$ формула Ньютона имеет вид

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

и, так как $C_1^0 = C_1^1 = 1$, она, очевидно, верна.

Предположим, что формула справедлива для $n = m$, т. е.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1}.$$

Учитывая, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1},$$

получаем

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.$$

Таким образом, из справедливости формулы (1) для $n=m$ следует ее справедливость для $n=m+1$, и, так как формула верна при $n=1$, то на основании принципа математической индукции ее справедливость установлена для всех натуральных значений n. ■

Формула (1) носит имя великого английского физика и математика И. Ньютона. Правая часть ее называется *разложением натуральной степени бинома*. Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим некоторые характерные особенности формулы Ньютона.

а) Правая часть формулы Ньютона содержит $n+1$ слагаемых.

б) Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$, стоящее на $k+1$-м месте, удобно считать k-м членом разложения и обозначать через T_k, т. е.

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{3}$$

При этом условии $T_0 = C_n^0 a^n$ — нулевой член разложения, $T_1 = C_n^1 a^{n-1} b$ — первый член разложения, $T_n = C_n^n b^n$ — n-й член разложения.

в) Показатели степени при a в каждом следующем члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, показатели степени при b — на единицу больше. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.

г) Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от нулевого и от n-го члена разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример 1. Возвести в шестую степень двучлен

$$x^2 - y.$$

△ Положив в формуле (2) $a=x^2$, $b=-y$, $n=6$, получим

$$(x^2-y)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k} (-y)^k =$$

$$= C_6^0 x^{12} - C_6^1 x^{10} y + C_6^2 x^8 y^2 - C_6^3 x^6 y^3 + C_6^4 x^4 y^4 - C_6^5 x^2 y^5 + C_6^6 y^6 =$$

$$= x^2 - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти четвертый член разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$.

△ Положив в формуле (3) $n=9$, $k=4$, $a=\sqrt[3]{x}$, $b=1/\sqrt[3]{x}$, получим

$$T_4 = C_9^4 (\sqrt[3]{x})^5 (1/\sqrt[3]{x})^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \sqrt[3]{x} = 126\sqrt[3]{x}. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти член разложения степени бинома $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, не зависящий от x.

△ Положив в формуле (3) $n=12$, $a=1/x$, $b=\sqrt{x}$, получим

$$T_k = C_{12}^k (1/x)^{12-k} (\sqrt{x})^k = C_{12}^k x^{-12+\frac{3}{2}k}.$$

Для того чтобы член разложения не зависел от x, необходимо и достаточно, чтобы $-12+\frac{3}{2}k=0$, откуда $k=8$.

Итак, восьмой член разложения не зависит от x. Вычислим его:

$$T_8 = C_{12}^7 = C_{12}^5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти сумму всех биномиальных коэффициентов

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

△ Положив в формуле (2) $a=1$, $b=1$, будем иметь

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \blacktriangle$$

Смысл последнего равенства заключается в следующем. Так как C_n^k — это число всех подмножеств n-элементного множества, содержащих k элементов, то сумма

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$$

дает, очевидно, число всех подмножеств n-элементного множества. Следовательно, *число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n.*

Пример 5. Для освещения зала может быть включена каждая из имеющихся 10 ламп. Сколько существует различных способов освещения зала?

△ Очевидно столько, сколько существует подмножеств у десятиэлементного множества, т. е. $2^{10}=1024$. При этом учитывается и тот способ «освещения», при котором ни одна лампа не горит. ▲

Пример 6. Найти наибольший коэффициент многочлена

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

△ Обозначим коэффициент многочлена при x^k через a_k. Используя формулу (2), расположим данный многочлен по возрастающим степеням переменной x:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Для отыскания наибольшего коэффициента a_k решим неравенство $a_{k-1} \leqslant a_k$, т. е.

$$C_{10}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leqslant C_{10}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}.$$

Разделив обе части неравенства на $2^{k-1}/3^{10}$, получим

$$C_{10}^{k-1} \leqslant 2C_{10}^{k},$$

откуда

$$\frac{10!}{(k-1)!\,(10-k+1)!} \leqslant \frac{2\cdot 10!}{k!\,(10-k)!}.$$

После дальнейших очевидных сокращений будем иметь

$$1/(10-k+1) \leqslant 2/k, \qquad k \leqslant 20-2k+2, \quad k \leqslant 22/3.$$

Таким образом, доказано, что

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_7.$$

Очевидно, что при $k > 22/3$ имеет место противоположное неравенство $a_{k-1} > a_k$, т. е. коэффициенты многочлена, начиная с седьмого, убывают.

Итак, коэффициент a_7 является наибольшим среди всех одиннадцати коэффициентов данного многочлена. Наибольший коэффициент равен

$$C_{10}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}. \blacktriangle$$

При доказательстве формулы Ньютона не предполагалось, что a и b — действительные числа. Поэтому формулы (1) — (3) справедливы и в том случае, когда a и b — произвольные комплексные числа.

Пример 7. Записать комплексное число $(2+i)^6$ в алгебраической форме.

$\triangle$ Полагая в формуле (2) $n=6$, $a=2$, $b=i$, получим

$$(2+i)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k 2^{6-k} i^k =$$

$$= C_6^0 2^6 + C_6^1 2^5 i + C_6^2 2^4 i^2 + C_6^3 2^3 i^3 + C_6^4 2^2 i^4 + C_6^5 2 i^5 + C_6^6 i^6 =$$
$$= 64 + 192i - 240 - 160i + 60 + 12i - 1 = -117 + 44i. \blacktriangle$$

§ 3. Случайные события и их вероятности

Рассмотрим простой опыт, заключающийся в подбрасывании монеты. Этот опыт имеет два исхода: либо монета упадет так, что сверху окажется герб, либо она ляжет гербом вниз. Тот или иной исход опыта зависит от многих причин, которые не поддаются учету, и заранее предсказать результат опыта нельзя. Событие, состоящее в том, что «выпал герб», является примером

случайного события. Другими примерами случайных событий могут служить: «появление единицы» при бросании игральной кости (кубика из однородного материала с гранями, занумерованными цифрами от единицы до шести), выход из строя электролампы до определенного срока, несоответствие стандарту выбранного для контроля изделия. Во всех этих случаях невозможно предсказать заранее, до окончания опыта, произойдет или не произойдет соответствующее событие. Поэтому такие события и называют случайными.

В опыте с подбрасыванием монеты оба исхода очевидно равноправны, до опыта нет никаких оснований предпочитать один исход другому. В таких случаях говорят, что оба исхода *равновероятны*, а вероятность каждого из них равна 1/2. При подбрасывании игральной кости имеется шесть исходов. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то все исходы опыта одинаково возможны или *равновероятны*. Вероятность каждого исхода равна 1/6.

Обобщением этих простых опытов будет опыт, в котором возможны n равновероятных исходов: u_1, u_2, ..., u_n (их называют также *элементарными событиями*). В этом случае вероятность каждого исхода принимается равной $1/n$. Записывают это следующим образом:

$$\mathsf{P}(u_1) = 1/n, \quad \mathsf{P}(u_2) = 1/n, \quad \ldots, \quad \mathsf{P}(u_n) = 1/n.$$

Первая из этих формул читается так: «вероятность u_1 равна $1/n$» (P — первая буква английского слова «probability» — вероятность).

Рассмотрим теперь опыт с n равновероятными исходами и некоторое событие A, которое происходит тогда, когда опыт оканчивается какими-то k исходами, и не происходит в том случае, если имеет место один из остальных $n-k$ исходов. Будем говорить, что исходы, приводящие к событию A, *благоприятствуют* ему. *Вероятностью* события A, связанного с опытом с n равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов, т. е.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{k}{n}, \qquad (1)$$

где k — число исходов, благоприятствующих событию A.

Пояснim сказанное примерами. Опыт с игральной костью имеет шесть равновероятных исходов.: u_i — выпала грань с номером i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Рассмотрим следующие события, связанные с этим опытом:

событие A_1 — число выпавших очков кратно 3,

событие A_2 — выпало простое число,

событие A_3 — выпало 7 очков,

событие A_4 — число выпавших очков меньше 7.

Событию A_1 благоприятствуют два исхода u_3 и u_6. Положив в формуле (1) $n = 6$, $k = 2$, находим $\mathsf{P}(A_1) = 2/6 = 1/3$.

Событию A_2 благоприятствуют три исхода u_2, u_3, u_5. По формуле (1) получаем $\mathsf{P}(A_2) = 3/6 = 1/2$.

Событию A_3 не благоприятствует ни один из возможных исходов. Следовательно, $\mathsf{P}(A_3) = 0/6 = 0$. Событие A_3 является примером *невозможного* события.

Событию A_4 благоприятствуют все шесть исходов, поэтому $\mathsf{P}(A_4) = 6/6 = 1$. Событие A_4 — пример *достоверного* события.

Вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1,$$

что непосредственно следует из формулы (1), так как очевидно, что $0 \leqslant k \leqslant n$.

Для вычисления вероятностей событий по формуле (1) приходится находить число всех равновозможных исходов и число исходов, благоприятствующих случайному событию. Здесь часто оказываются полезными комбинаторные формулы, рассмотренные в § 1.

Пример 1. Опыт заключается в подбрасывании двух монет: медной и серебряной. Какова вероятность того, что хотя бы на одной монете появится герб?

△ Равновероятными исходами опыта являются следующие:

u_1 — герб появился на обеих монетах,

u_2 — герб выпал только на медной монете,

u_3 — герб выпал только на серебряной монете,

u_4 — герб не выпал ни на одной монете.

Благоприятствуют событию A (появлению герба хотя бы на одной монете) исходы u_1, u_2 и u_3. Полагая в формуле (1) $n = 4$, $k = 3$, получаем $\mathsf{P}(A) = 3/4$. ▲

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

△ Две последние цифры можно набрать числом способов, равным числу упорядоченных двухэлементных подмножеств у десятиэлементного множества (множества всех цифр). Это число способов равно A_{10}^2. Следовательно, всего существует A_{10}^2 исходов. Благоприятствует событию A (цифры набраны верно) только один исход. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = 1/A_{10}^2 = 1/10 \cdot 9 = 1/90. \text{ ▲}$$

Пример 3. Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

△ У множества, содержащего 100 элементов, существует C_{100}^3 трехэлементных подмножеств. Поэтому 3 лампы из 100 можно выбрать C_{100}^3 способами. Лампы выбираются наудачу. Это означает, что все эти способы выбора (все исходы) равновероятны.

Число благоприятных исходов (все три лампы оказались исправными) подсчитывается аналогично. Из 95 исправных ламп 3 лампы можно выбрать C_{95}^3 способами, так как именно столько существует трехэлементных подмножеств у 95-ти элементного множества. Полагая в формуле (1) $n = C_{100}^3$, $k = C_{95}^3$, получаем

$$\mathrm{P}(A) = C_{95}^3 / C_{100}^3 = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}856. \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: а) все путевки различны, б) все путевки одинаковы?

2. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: а) шары одного цвета не отличимы друг от друга, б) все шары разные.

3. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

4. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй — 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

5. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй — 4, а четвертый 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

6. Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.

7. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?

8. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков.

9. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

10. Сколькими способами $2n$ элементов можно разбить на пары, если разбиения, отличающиеся только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются одинаковыми?

11. Найти средний член разложения

$$(x^{-1/5} + x^{1/3})^{10}.$$

12. При каких значениях x пятый член разложения $(2x+3)^9$ будет больше соседних с ним членов?

13. Найти члены разложения $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$, являющиеся целыми числами.

14. Найти коэффициент многочлена $(1 + 3x + 2x^3)^{10}$ при x^4.

15. Найти сумму коэффициентов многочлена $(13x^3 - 7x - 5)^{100}$.

16. Вычислить $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$.

17. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов: а) один выигрышный, б) оба выигрышных.

18. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них независимо друг от друга и с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Вычислить:

а) $\frac{6!}{A_{10}^7}(C_7^3+C_7^3)$; б) $\frac{P_{k+1}}{(k-n)!\,A_{k-1}^{n-1}}$.

2. Найти n, если:

а) $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=15(n+2)$; б) $\frac{1}{C_4^n}=\frac{1}{C_5^n}+\frac{1}{C_6^n}$;

в) $5C_n^3=C_{n+2}^4$; г) $(n+2)!=132A_n^kP_{n-k}$;

д) $C_{n+3}^{n+1}-5C_{3n}^2+19n^2=6$;

е) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{143}{4P_n}$; ж) $8C_{105}^n<3C_{105}^{n+1}$.

3. Найти множество значений функции:

а) $f(x)=A_7^{x-3}$; б) $f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$.

4. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если: а) один из них должен быть старшим; б) старшего быть не должно?

5. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

6. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4?

7. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

8. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

9. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

10. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

11. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

12. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть пять занятий: по алгебре, геометрии, истории, географии и литературе, причем алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

13. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: а) зебра, б) баран, в) водород, г) абракадабра?

14. Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырем игрокам так, чтобы каждый получил 7 костей?

15. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

16. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

17. На конференции должны выступить докладчики A, B, C и D, причем B не может выступать раньше A. Сколькими способами можно установить очередность выступлений?

18. Сколько делителей имеет число 462?

19. На полке стоят m книг в черных переплетах и n книг в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

20. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

21. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не остался пустым?

22. Сейф запирается на замок, состоящий из пяти дисков, на каждом из которых изображены цифры 0, 1, 2, ..., 9. Замок открывается, если на дисках набрана одна определенная комбинация цифр. Хватит ли 10 дней на открытие сейфа, если «рабочий день» продолжается 13 часов, а на набор одной комбинации цифр уходит 5 секунд?

23. Среди всех целых чисел от 1 до 10^n каких больше: тех, для записи которых используется цифра 9, или тех, которые записываются без нее?

24. Написать формулу Ньютона для степени бинома:

а) $(x+1)^7$; б) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5$.

25. Используя формулу Ньютона, вычислить:

а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5$; б) $(\sqrt{7}+i)^4+(\sqrt{7}-i)^4$;

26. Найти:

а) седьмой член разложения $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^{13}$.

б) член разложения $(a^{1/3}+a^{-1/2})^{15}$, не зависящий от a;

в) член разложения $(\sqrt{x}+\sqrt{2})^{18}$, содержащий x^8;

г) член разложения $(x^5+1)^{1980}$, содержащий x^{1050}.

27. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:

а) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

28. Сколько членов разложения $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$ являются целыми числами?

29. Найти наибольший коэффициент многочлена:

а) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$; б) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}x)^{20}$.

30. Найти коэффициент многочлена:

б) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8;

б) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}.

31. Найти сумму коэффициентов многочлена:

а) $(4x-5)^{21}$; б) $\left(3\sqrt{2}x-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.

32. Доказать равенства:

а) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

б) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

в) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

33. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 черных, 5 красных шаров, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: а) белым, б) черным, в) желтым, г) красным?

34. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, окажется равной 8?

35. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных двух кубиков оба имеют ровно по две окрашенные грани?

36. Работа каждого из четырех учеников заочной школы может проверяться одним из семи преподавателей. Какова вероятность того, что все четыре работы проверены разными преподавателями?

37. Экзаменационная программа содержит 40 вопросов. На экзамене предлагается ответить на два из них. Ученик подготовил ответы на 30 вопросов. Какова вероятность того, что на экзамене ему предложат два вопроса, на которые он подготовил ответ?

38. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

39. Первенство по баскетболу разыгрывают 18 команд, среди которых 2 команды экстракласса. Для уменьшения общего числа игр команды путем жеребьевки разбиваются на две равные группы. Какова вероятность того что две команды экстракласса окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе?

40. Доказать, что вероятность того, что у двенадцати случайно выбранных человек дни рождения приходятся на разные месяцы, меньше 1/10000.

Глава XII
ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

Во многих задачах приходится по заданной функции находить новую функцию, производная которой в каждой точке равна значению данной функции в этой точке. В качестве примера можно привести задачу о нахождении закона движения $s(t)$ материальной точки по заданному закону изменения ее скорости $v(t)$. В этом примере задана функция $v(t)$, $t \in]a; b[$, и требуется найти функцию $s(t)$ такую, что $s'(t) = v(t)$ для любого $t \in]a; b[$.

Определение. Функция $F(x)$, $x \in]a; b[$, называется *первообразной* для функции $f(x)$, $x \in]a; b[$, если $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in]a; b[$.

Для функции $f(x) = 3x^2$; $x \in \mathbb{R}$, первообразной является функция $F(x) = x^3$, так как $(x^3)' = 3x^2$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что функция $F(x) = x^3 + 2$ также является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, так как $(x^3 + 2)' = 3x^2$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что и в общем случае, если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то при любой постоянной C функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

для любого x из рассматриваемого интервала.

Таким образом, если функция имеет хотя бы одну первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных.

Справедлива следующая теорема.

Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то любая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, т. е. множество $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ является множеством всех первообразных для функции $f(x)$.

Из этой теоремы следует, что при любом C функция $F(x) = x^3 + C$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ и других первообразных эта функция не имеет.

Пример 1. Для функции $f(x) = \cos x + \sin x$ найти первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F(0) = 1$.

△ Одной из первообразных для функции $f(x) = \cos x + \sin x$ является функция $\sin x - \cos x$. Из теоремы следует, что любая

первообразная для данной функции имеет вид $F(x) = \sin x - \cos x + C$, где C — некоторая постоянная. Для определения постоянной C воспользуемся условием $F(0) = 1$. Из него находим

$$\sin 0 - \cos 0 + C = 1,$$

т. е. $C = 1 + \cos 0 = 2$. Следовательно, функция $F(x) = \sin x - \cos x + 2$ является искомой первообразной. ▲

Для нахождения первообразных справедливы следующие три правила.

1. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а функция $G(x)$ является первообразной для функции $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$.*

□ Действительно, производная от суммы функций равна сумме производных, т. е.

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

а это и означает, что функция $F(x) + G(x)$ является первообразной для функции $f(x) + g(x)$. ■

2. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $kF(x)$ является первообразной для функции $kf(x)$.*

□ Действительно,

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

т. е. функция $kF(x)$ является первообразной для $kf(x)$. ■

3. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $F(y(t))$ является первообразной для функции $f(y(t))\,y'(t)$. (При этом предполагаем, что функции $f(y(t))$, $y'(t)$ и $F(y(t))$ определены.)*

Это правило сразу же следует из правила дифференцирования сложной функции.

В частном случае, если $y(t) = at + b$, $a \neq 0$, и если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{a} F(at + b)$ является первообразной для функции $f(at + b)$.

Пример 2. Найти все первообразные для функции

$$f(x) = 3e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2(\pi x/4)}.$$

△ Функция $f(x)$ равна сумме двух функций. Найдем первообразную для функции $3e^{2x+1}$. Так как первообразной для функции e^x является функция e^x, то первообразной для функции e^{2x+1}, по правилу 3 будет функция $\frac{1}{2} e^{2x+1}$. По правилу 2 первообразной для функции $3e^{2x+1}$ будет функция $3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1}$, т. е. $\frac{3}{2} e^{2x+1}$.

Найдем теперь первообразную для функции $1/\cos^2(\pi x/4)$. Так как функция $\operatorname{tg} x$ является первообразной для функции $1/\cos^2 x$, то по правилу 3 функция $\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ является первообразной для функции $1/\cos^2(\pi x/4)$. По правилу 1 функция $\frac{3}{2}e^{2x+1}+\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ является первообразной для функции $f(x)$. Любая первообразная для функции $f(x)$ задается формулой

$$\frac{3}{2}e^{2x+1}+\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+C,$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Пример 3. Найти функцию $F(x)$, если известно, что

$$F'(x)=e^{\sin x}\cos x \quad \text{и} \quad F(\pi/2)=e+3.$$

△ Требуется из всех первообразных для функции $e^{\sin x}\cos x$ выделить ту, которая при $x=\pi/2$ принимает значение $e+3$. Так как производная от $\sin x$ равна $\cos x$ и так как первообразная от e^x равна e^x, то по правилу 3 первообразной для $e^{\sin x}\cos x$ является функция $e^{\sin x}$. Действительно,

$$(e^{\sin x})'=e^{\sin x}(\sin x)'=e^{\sin x}\cos x.$$

Любая первообразная для функции $e^{\sin x}\cos x$ имеет вид $e^{\sin x}+C$, где C — произвольная постоянная. Определим C из условия, что $F(\pi/2)=e+3$. Из него находим

$$e^{\sin(\pi/2)}+C=e+3, \quad \text{т. е.} \quad C=3.$$

Следовательно, искомая функция имеет вид $e^{\sin x}+3$. ▲

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$, $x\in]a;\ b[$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Это обозначение читается: «неопределенный интеграл от функции $f(x)$ по dx», или короче «интеграл от $f(x)$ по dx».

Из вышесказанного следует, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}. \tag{1}$$

На практике формула (1) записывается более кратко:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{2}$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а постоянная C называется *постоянной интегрирования*.

Пример 4. Найти $\int \cos x\,dx$.

△ Чтобы найти неопределенный интеграл от $\cos x$ по dx, достаточно найти какую-то первообразную для функции $\cos x$, т. е. найти функцию $F(x)$ такую, что $F'(x)=\cos x$. Из таблицы производных следует, что такой функцией будет $\sin x$. Следовательно,

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C. \quad ▲$$

Нахождение функции по ее производной называется *интегрированием функции*. Интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Из свойства дифференцирования легко получаются следующие два свойства для неопределенных интегралов:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx, \qquad k\neq 0. \tag{4}$$

Формула (3) означает, что каждая первообразная функции $f(x)+g(x)$ является суммой некоторых первообразных для $f(x)$ и $g(x)$ и, наоборот, сумма любых первообразных для $f(x)$ и $g(x)$ является первообразной для $f(x)+g(x)$. Так что из формулы (3) следует, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то

$$\int (f(x)+g(x))\,dx=F(x)+G(x)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Коротко формула (3) читается так: «интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций».

Формула (4) означает, что каждая первообразная для функции $kf(x)$, где $k\neq 0$, есть произведение постоянной k и некоторой первообразной для функции $f(x)$ и что любое такое произведение есть первообразная для функции $kf(x)$.

Из формулы (4) следует, что если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ и $k\neq 0$, то

$$\int kf(x)\,dx=kF(x)+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Заметим, что формула (4) перестает быть верной в случае $k=0$. Действительно, в этом случае левая часть есть

$$\int 0\cdot f(x)\,dx=\int 0\,dx=C,$$

где C — произвольная постоянная, а правая часть есть

$$0\cdot\int f(x)\,dx=0.$$

Используя таблицу производных, составляем таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int a\,dx = ax + C.$
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

Формулы 2, 3, 7, 8 справедливы для тех интегралов, где определены подынтегральные функции.

Докажем, например, формулу 3.

□ Подынтегральная функция определена для всех $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x.$$

Если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$(\ln|x|)' = 1/x$$

для любого $x \neq 0$, и поэтому

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

для $x > 0$ и для $x < 0$. ■

Пример 5. Найти $\int (x^2 + 2e^x)\,dx$.

△ Согласно формулам (3) и (4)

$$\int (x^2 + 2e^x)\,dx = \int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx.$$

Интегралы, стоящие в правой части этого равенства, являются табличными:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C.$$

Следовательно, функция $\frac{1}{3}x^3+2e^x$ является первообразной для функции x^2+2e^x, и поэтому

$$\int (x^2+2e^x)\,dx=\frac{1}{3}x^3+2e^x+C,$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Пример 6. Найти $\int \frac{3-x^2}{x}\,dx$.

$$\triangle\ \int \frac{3-x^2}{x}\,dx=\int \frac{3}{x}\,dx-\int \frac{x^2}{x}\,dx=$$
$$=3\int \frac{1}{x}\,dx-\int x\,dx=3\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C.\ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\int \sin^2 x\,dx$.

$$\triangle\ \int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$$
$$=\int \frac{1}{2}\,dx-\int \frac{\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.\ \blacktriangle$$

Для нахождения интегралов от функций вида $\sin mx\cos nx$, $\sin mx\sin nx$ и $\cos mx\cos nx$ удобно использовать следующие тригонометрические формулы:

$$2\sin mx\cos nx=\sin(m-n)x+\sin(m+n)x, \tag{5}$$
$$2\sin mx\sin nx=\cos(m-n)x-\cos(m+n)x, \tag{6}$$
$$2\cos mx\cos nx=\cos(m-n)x+\cos(m+n)x. \tag{7}$$

Пример 8. Найти $\int \sin x\cos 3x\,dx$.

△ По формуле (5) имеем

$$\sin x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x).$$

Поэтому

$$\int \sin x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx.$$

Легко видеть, что для функции $\sin 4x$ функция $-\frac{1}{4}\cos 4x$ является первообразной. Аналогично функция $-\frac{1}{2}\cos 2x$ является первообразной для $\sin 2x$. Следовательно,

$$\int \sin x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=$$
$$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C.\ \blacktriangle$$

Для вычисления неопределенных интегралов часто бывает полезна формула интегрирования по частям.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда имеет место следующая формула, носящая название *формулы интегрирования по частям*:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx. \tag{8}$$

Эта формула является следствием формулы производной от произведения двух функций: $(uv)' = u'v + uv'$. Действительно,

$$\int (uv)'\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx,$$

и поэтому

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Заметим, что здесь произвольная постоянная не пишется, так как она содержится в написанных интегралах.

Пример 9. Найти $\int x \sin x\,dx$.

△ Так как $\sin x$ является производной от $-\cos x$, то

$$\int x \sin x\,dx = \int x\,(-\cos x)'\,dx.$$

Применяя формулу (8), получаем

$$\int x\,(-\cos x)'\,dx = x\,(-\cos x) - \int (-\cos x)\,x'\,dx =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \quad ▲$$

Пример 10. Найти $\int \ln x\,dx$.

△ Для нахождения интеграла воспользуемся формулой (8). Для этого положим $u = \ln x$ и $v' = 1$. Тогда $v = x$ и $u' = 1/x$, и поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \quad ▲$$

§ 2. Интеграл и формула Ньютона — Лейбница

Определение. Пусть задана функция $f(x)$, определенная на некотором интервале X, и пусть $F(x)$, $x \in X$, некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда число $F(b) - F(a)$, где $a \in X$ и $b \in X$, называется *интегралом от a до b от функции $f(x)$* и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, согласно определению, если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Функция f называется *подынтегральной функцией*, переменная x называется *переменной интегрирования*, отрезок с концами a и b называется *отрезком интегрирования*, число b называется *верхним пределом интегрирования*, число a — *нижним пределом интегрирования*.

Равенство (1) носит название *формулы Ньютона — Лейбница*.

Для удобства записи разность $F(b) - F(a)$ обозначают $F(x)\Big|_a^b$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона — Лейбница записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Заметим, что интеграл от a до b от функции $f(x)$ не зависит от выбора первообразной для функции $f(x)$. Действительно, если $\Phi(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, отличная от $F(x)$, то существует постоянная C такая, что $\Phi(x) = F(x) + C$ для любого x из рассматриваемого интервала, и поэтому $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 2^x\,dx$.

△ Так как $(2^x/\ln 2)' = 2^x$, то функция $F(x) = 2^x/\ln 2$ является первообразной для функции $f(x) = 2^x$, и поэтому по формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int_1^2 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2}(2^2 - 2) = \frac{2}{\ln 2}. \quad ▲$$

Сформулируем некоторые свойства интегралов. При этом будем предполагать, что все рассматриваемые интегралы существуют.

Свойство 1.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Свойство 2.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 (x + 3\cos x)\,dx$.

△ Воспользовавшись свойствами 1 и 2, получаем

$$\int_1^2 (x + 3\cos x)\,dx = \int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 \cos x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3\sin x\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 3\sin 2 - 3\sin 1 = \frac{3}{2} + 3\sin 2 - 3\sin 1. \quad ▲$$

Свойство 3.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Свойства 1, 2, 3 легко доказываются, если воспользоваться определением интеграла. Докажем, например, свойство 3.

□ Пусть функция $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на некотором интервале, который содержит точки a, b и c. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) =$$

$$= \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx. \blacksquare$$

Свойство 4. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ такие, что определена и непрерывна сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда, если функция $\varphi(t)$ имеет производную $\varphi'(t)$, справедлива формула*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

□ Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда, как легко видеть, функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Поэтому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Формула (5) называется *формулой замены переменной интегрирования*. Она сводит вычисление интеграла от одной функции к вычислению интеграла от другой функции, который в каком-то смысле проще. Формула (5) применяется как слева направо, так и справа налево.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. При замене x на t по формуле $x = \varphi(t)$ нужно вместо x подставить $\varphi(t)$, вместо dx подставить $\varphi'(t)\,dt$, а новые пределы интегрирования α и β найти из условий $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5'}$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$.

△ Перейдем к новой переменной интегрирования t, положив $x = a \sin t$, где $t \in [0; \pi/2]$. Когда t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то x изменяется от 0 до a. В этом примере $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Подставив $x = a \sin t$, получим

$$f(a \sin t) = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t.$$

Вместо dx подставляем $(a \sin t)' \, dt = a \cos t \, dt$.

По формуле (5) получаем

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \cos t = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt.$$

Так как $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, то

$$a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} dt + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2t \, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{2 \cdot 2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}. \blacktriangle$$

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx$. При замене x на y по формуле $y = \varphi(x)$ нужно вместо $\varphi(x)$ подставить y, вместо $\varphi'(x) \, dx$ подставить dy, а за новые пределы интегрирования взять числа $A = \varphi(a)$, $B = \varphi(b)$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_A^B f(y) \, dy. \qquad (5'')$$

Пример 4. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$.

△ Данный интеграл можно вычислить непосредственно по определению, найдя предварительно одну из первообразных для подынтегральной функции. Однако его проще вычислить, воспользовавшись формулой замены переменной интегрирования. Действительно, перейдем к новой переменной интегрирования, положив $y = \sin x$. Под знаком интеграла вместо $\sin^2 x$ подставим y^2.

Так как производная от $\sin x$ равна $\cos x$, то вместо $\cos x \, dx$ подставим dy. Новые пределы интегрирования находим из условий $A = \sin 0 = 0$ и $B = \sin(\pi/2) = 1$. По формуле (5'') получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \blacktriangle$$

При вычислении интегралов часто используют *формулу интегрирования по частям*:

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx,$$

которая, как и для неопределенного интеграла, является непосредственным следствием формулы для производной произведения функций.

Пример 5. Вычислить $\int_0^2 xe^x\,dx$.

△ Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Для этого положим $u = x$ и $v' = e^x$. Тогда $u' = 1$ и $v = e^x + C$, где C — произвольная постоянная. Для простоты будем считать, что $C = 0$, т. е. за функцию v возьмем функцию e^x. Теперь по формуле интегрирования по частям получаем

$$\int_0^2 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 - 1. \blacktriangle$$

Свойство 5. *Если* $f(x) \leqslant g(x)$ *для любого* $x \in [a;\ b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6}$$

□ Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$ такие, что $F(a) = G(a) = 0$, тогда

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Напомним, что эти первообразные называются *интегралами с переменным верхним пределом*.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = G(x) - F(x)$. Эта функция неубывающая и $\varphi(a) = 0$. Действительно, $\varphi'(x) = G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in [a;\ b]$ и $\varphi(a) = G(a) - F(a) = 0$. Следовательно, $\varphi(b) = G(b) - F(b) \geqslant 0$, т. е. $G(b) \geqslant F(b)$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. *Если* m *и* M *— наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;\ b]$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{7}$$

□ Действительно, так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то в силу свойства 5 справедливо неравенство

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

из которого и получается неравенство (7), если учесть, что

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a), \quad \int_a^b M\,dx = M(b-a). \ \blacksquare$$

Пример 6. Используя формулу (7), оценить значение интеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

△ Наименьшее значение функции e^{-x^2} на отрезке $[0;\ 1]$ равно e^{-1}, а наибольшее значение равно 1. И поэтому

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1. \ \blacktriangle$$

§ 3. Площадь криволинейной трапеции

Пусть задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$, $x \in [a;\ b]$. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, называется *криволинейной трапецией*.

Криволинейная трапеция $aABb$ ограничена графиком функции $f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox (рис. 134). Выведем формулу для вычисления площади S этой криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\,i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

на n равных по длине отрезков $[x_{i-1};\ x_i]$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. На каждом отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$, как на основании, построим два прямоугольника высоты m_i и M_i, где m_i и M_i — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$. Площади этих прямоугольников соответственно равны $m_i \Delta x_i$ и $M_i \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

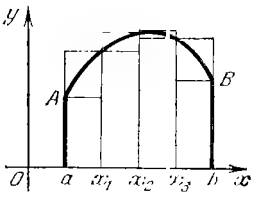


Рис. 134.

Через s_n обозначим сумму площадей всех прямоугольников высоты m_i, т. е.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n.$$

Аналогично через S_n — сумму площадей всех прямоугольников высоты M_i, т. е.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n.$$

Очевидно, что $s_n \leqslant S \leqslant S_n$. Можно показать, что при $n \to \infty$ s_n и S_n стремятся к одному и тому же пределу — к площади криволинейной трапеции $aABb$.

В силу неравенства (7) § 2 получаем n неравенств

$$m_i \Delta x_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \leqslant M_i \Delta x_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$s_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \leqslant S_n.$$

А так как

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx,$$

то

$$s_n \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant S_n.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ следует равенство

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Заметим, что для любого $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$ выполняется неравенство $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем формулу

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Пример 1. Показать, что для прямоугольного треугольника справедлива формула (1).

△ Пусть задан прямоугольный треугольник с катетами длины a и b. На плоскости введем систему координат так, как указано на рис. 135. Данный треугольник является частным случаем криволинейной трапеции, причем $f(x) = \frac{b}{a} x$, $x \in [0;\ a]$.

Отрезок $[0;\ a]$ точками $x_i = \frac{a}{n} i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ разделим

на n отрезков длины a/n. Тогда $m_i = \frac{b}{n}(i-1)$, $M_i = \frac{b}{n} i$, и поэтому

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}(i-1)\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} i \frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{ab}{2}.$$

Таким образом доказано, что площадь данного треугольника равна $\frac{1}{2}ab$, т. е. вычисляется по известной формуле. ▲

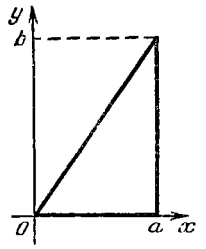


Рис. 135.

Рис. 136.

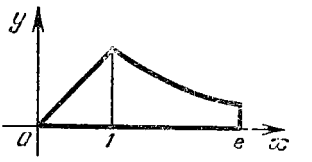


Рис. 137.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной частью параболы $y = x^2$ и отрезками прямых $y = 0$ и $x = 2$ (рис. 136).

△ Используя формулу (1), имеем

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \ ▲$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 1/x$, $y = 0$ и $x = e$.

△ Данную фигуру прямой $x = 1$ разобьем на две части (рис. 137): криволинейную трапецию, соответствующую функции $y = x$ на отрезке $[0; 1]$, и криволинейную трапецию, соответствующую функции $y = 1/x$ на отрезке $[1; e]$. Через S_1 и S_2 обозначим их площади. Тогда

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e = 1,$$

и, следовательно, $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$. ▲

Рассмотрим фигуру, ограниченную отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ и графиками неотрицательных и непрерывных на

$[a; b]$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (рис. 138). Площадь данной фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций $aABb$ и $aA'B'b$, т. е.

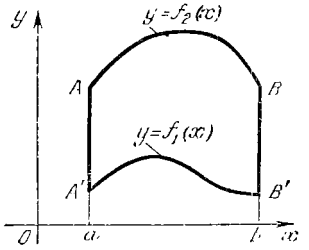


Рис. 138.

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \quad (2)$$

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Площадь S фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные непрерывные функции, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \quad (3)$$

□ Действительно, пусть m — наименьшее значение функции $f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда $f_2(x) - m \geqslant f_1(x) - m \geqslant 0$ для любого $x \in [a; b]$. Фигура, координаты которой удовлетворяют неравенствам

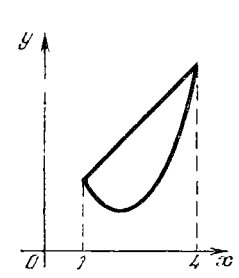


Рис. 139.

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) - m \leqslant y \leqslant f_2(x) - m,$$

получается из данной параллельным переносом вдоль оси Oy. Следовательно, их площади равны, и поэтому (см. формулу (2))

$$S = \int_a^b (f_2(x) - m - f_1(x) + m)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \blacksquare$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 5$ и $y = x + 1$ (рис. 139).

△ Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x + 1$ и $y = x^2 - 4x + 5$, для этого решим уравнение $x + 1 = x^2 - 4x + 5$. Из квадратного уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ находим $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Искомую площадь находим по формуле (3):

$$S = \int_1^4 (x + 1 - (x^2 - 4x + 5))\,dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right)\Big|_1^4 =$$

$$= -\frac{1}{3}(64 - 1) + \frac{5}{2}(16 - 1) - 4(4 - 1) = -21 + 37{,}5 - 12 = 4{,}5. \blacktriangle$$

Если требуется вычислить площадь более сложной фигуры, то стараются ее разбить на несколько фигур, для вычисления площади каждой из которых можно применить одну из формул (1) — — (3).

Пример 5. На рис. 140 изображена фигура, ограниченная линиями $y=-x^2+6x-5$, $y=-x^2+4x-3$ и $y=3x-15$. Найти площадь этой фигуры.

△ Точки A, B, D являются точками пересечения данных парабол с осью Ox. Найдем абсциссы этих точек, для этого решим два уравнения $-x^2+6x-5=0$ и $-x^2+4x-3=0$. Корнями первого уравнения являются числа $x=1$ и $x=5$, а корнями второго уравнения являются числа $x=1$ и $x=3$. Следовательно $x_A=1$, $x_B=5$, $x_D=3$. Для определения абсциссы точки C решим уравнение $-x^2+4x-3=3x-15$. Решая квадратное уравнение $x^2-x-12=0$, находим, что $x_1=-3$, $x_2=4$, т. е. $x_C=4$. Разобьем данную фигуру отрезками $[DB]$ и $[EC]$ на три фигуры и обозначим их площади соответственно S_1, S_2, S_3, как указано на рис. 140.

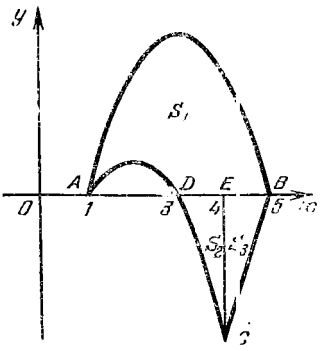


Рис. 140.

Вычислим площадь S_1. Для этого из площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=-x^2+6x-5$ и отрезком $[1; 5]$ оси Ox, вычтем площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=-x^2+4x-3$ и отрезком $[1; 3]$ оси Ox, т. е.

$$S_1=\int_1^5(-x^2+6x-5)\,dx-\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right)\Big|_1^5+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_1^3=\frac{28}{3}.$$

Для вычисления площадей S_2 и S_3 применим формулу (3):

$$S_2=\int_3^4(x^2-4x+3)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_3^4=\frac{4}{3},$$

$$S_3=\int_4^5(-3x+15)\,dx=\left(-\frac{3}{2}x^2+15x\right)\Big|_4^5=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, $S=S_1+S_2+S_3=73/6$. ▲

§ 4. Применение интеграла к вычислению объемов тел

1. Объем пирамиды. Сначала рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$, у которой ребро AD перпендикулярно плоскости ABC, и выразим объем V этой пирамиды через высоту $H = |AD|$ и площадь основания S, считая известным, что объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

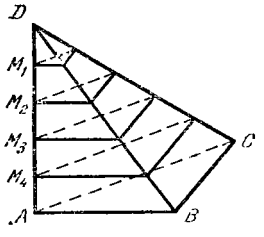


Рис. 141.

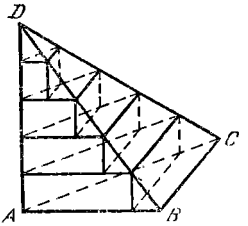


Рис. 142.

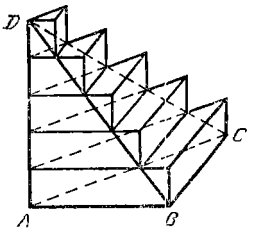


Рис. 143.

Отрезок DA точками M_1, M_2, ..., M_{n-1} разобьем на n равных по длине отрезков и через каждую точку M_i проведем плоскость, параллельную основанию ABC (рис. 141). Тогда пирамида разобьется на n частей: одну пирамиду и $n-1$ усеченных пирамид. Очевидно, объем пирамиды $ABCD$ не меньше объема v_n ступенчатой пирамиды, вписанной в $ABCD$ (рис. 142), и не больше объема V_n ступенчатой пирамиды, описанной около $ABCD$ (рис. 143):

$$v_n \leqslant V \leqslant V_n, \tag{1}$$

причем, $V_n - v_n = S \cdot \frac{H}{n}$.

Пусть $S(x)$ — площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей параллельно основанию ABC на расстоянии x от вершины D, и пусть $x_0 = 0$, $x_i = |DM_i|$, $x_n = |DA| = H$. Тогда $S(x_i)$ — площадь сечения, проходящего через точку M_i, и

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_{i-1})\,\Delta x_i, \qquad V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = H/n$. Так как функция $S(x)$, $x \in [0;\ H]$, возрастающая, то

$$S(x_{i-1})\,\Delta x_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x)\,dx \leqslant S(x_i)\,\Delta x_i$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, и поэтому

$$v_n \leqslant \int_0^H S(x)\,dx \leqslant V_n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\left| V - \int_0^H S(x)\,dx \right| \leqslant V_n - v_n = S \cdot \frac{H}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, справедлива формула

$$V = \int_0^H S(x)\,dx. \tag{3}$$

Известно, что $S(x)/S = x^2/H^2$. Учитывая это соотношение, из формулы (3) получаем

$$V = \int_0^H \frac{x^2}{H^2} S\,dx = \frac{S}{H^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3} SH.$$

Таким образом, объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} SH, \tag{4}$$

где S — площадь основания, а H — высота пирамиды.

Формула (4) выведена для специального вида треугольных пирамид. Легко доказать, что она справедлива для любой пирамиды.

2. Объем тела вращения. Пусть задана криволинейная трапеция, ограниченная графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 144). При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox образуется геометрическое тело Ф (рис. 144). Это геометрическое тело называется *телом вращения*.

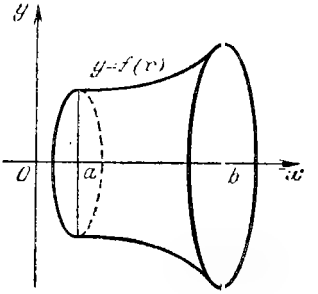


Рис. 144.

Выведем формулу для объема тела вращения Ф. При этом, для простоты, будем предполагать, что функция $f(x)$ неубывающая. Пусть $S(x)$ — площадь сечения тела Ф плоскостью, проходящей через точку с абсциссой x параллельно плоскости Oyz. Очевидно, что любое такое сечение тела Ф является кругом или точкой и $S(x) = \pi f^2(x)$. Отрезок $[a;\ b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, где $i = 0,\ 1\ \ldots,\ n$, разобьем на n равных по длине отрезков и через каждую точку разбиения проведем плоскость, перпендикулярную оси абсцисс. Тогда тело Ф разобьется на n тел вращения Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n, сумма объемов которых равна объему тела Ф.

Очевидно, объем тела Φ_i не меньше объема цилиндра, у которого высота равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиус основания равен $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, и не больше объема цилиндра с высотой Δx_i и радиусом основания $y_i = f(x_i)$ (рис. 145). Следовательно, объем V тела Φ удовлетворяет неравенствам

$$v_n \leqslant V \leqslant V_n, \tag{5}$$

где $v_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_{i-1}^2 \Delta x_i$ — объем ступенчатого тела вращения, вписанного в тело Φ, а $V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$ — объем ступенчатого тела вращения, описанного около Φ. Причем,

$$V_n - v_n = \pi (y_n^2 - y_0^2) \cdot \frac{b-a}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Из монотонности функции $f(x)$ и свойств интеграла следуют неравенства

$$\pi y_{i-1}^2 \Delta x_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi f^2(x)\, dx \leqslant \pi y_i^2 \Delta x_i,$$

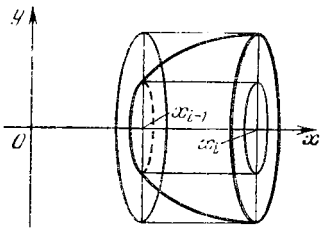


Рис. 145.

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Суммируя по i, из этих неравенств получаем

$$v_n \leqslant \int_a^b \pi f^2(x)\, dx \leqslant V_n. \tag{6}$$

Теперь из (5) и (6) следует, что

$$\left| V - \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \right| \leqslant V_n - v_n \to 0$$

при $n \to \infty$, и поэтому

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{7}$$

Учитывая, что $\pi f^2(x) = S(x)$, формулу (7) для объема тела вращения можно записать в виде интеграла от площади $S(x)$ его поперечного сечения:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{8}$$

Пусть геометрическое тело Φ заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и пусть $S(x)$ — площадь сечения тела Φ плоскостью, перпендикулярной оси Qx и проходящей через точку с абсциссой

$x \in [a; b]$. Тогда, как и в случае тел вращения, объем V тела Φ вычисляется по формуле (8).

Пример 1. Криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$, и осью абсцисс, вращается вокруг оси Ox. Найти объем образованного вращением тела.

△ Применяя формулу (7), получим

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx.$$

Заменим $\sin^2 x$ на $\frac{1-\cos 2x}{2}$, тогда

$$V = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти объем тела, отсекаемого от цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 146) плоскостью $z = 2x$.

△ Рассмотрим сечение этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox. Сечение, проходящее через точку с абсциссой $x \in]0; 2[$ перпендикулярно оси Ox, является прямоугольником. Обозначим площадь такого прямоугольника через $S(x)$. Вычислим $S(x)$ для $x \in]0; 2[$. Сторона прямоугольника $|AB|$, лежащая в основании цилиндра, равна

$$|AB| = 2|AE| = 2\sqrt{|OA|^2 - |OE|^2} = 2\sqrt{4 - x^2}.$$

Сторона прямоугольника $|AD|$ равна отрезку $|EF|$ и равна $2x$. Следовательно, площадь прямоугольника $ABCD$ равна

$$S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

По формуле (8) объем тела равен

$$V = \int_0^2 2x\sqrt{4 - x^2} \, dx.$$

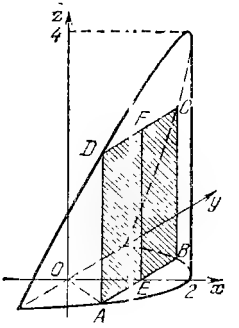


Рис. 146

Сделаем замену переменного под знаком интеграла, положим $y = 4 - x^2$. Тогда по формуле (5″) § 2 получаем

$$V = \int_0^2 -\sqrt{4 - x^2}\,(-2x)\,dx = -\int_4^0 \sqrt{y}\,dy =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}. \blacktriangle$$

§ 5. Применение интеграла при решении физических задач

1. Задача о вычислении пути. Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой скоростью $v = v(t)$, зависящей от времени t. Требуется найти путь, который проходит точка за промежуток времени от $t = T_1$ до $t = T_2$. Если скорость движения постоянна и равна v_0, то путь S равен произведению скорости на время движения, т. е. $S = v_0 (T_2 - T_1)$.

Если же скорость не постоянна, то

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\, dt. \qquad (1)$$

□ Действительно, разобьем отрезок $[T_1; T_2]$ на n равных по длине отрезков, при этом $t_0 = T_1$, $t_i = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{n} i$, где $i = 1, 2 \ldots$ $\ldots, n$. Приближенно будем считать, что скорость $v(t)$ на промежутке $[t_{i-1}; t_i]$ постоянна и равна $v(\tau_i)$, где τ_i — некоторая точка, принадлежащая отрезку $[t_{i-1}; t_i]$. Тогда путь, пройденный точкой за время от t_{i-1} до t_i, приближенно равен произведению $v(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = v(\tau_i)\,\Delta t_i$, и путь, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1; T_2]$, равен приближенно $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\,\Delta t_i$. Путь S, пройденный точкой за время от T_1 до T_2, равен пределу этой суммы при $n \to \infty$, т. е. интегралу (1). ■

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3 + 3t^2$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 с.

△ По формуле (1) находим

$$S = \int_0^5 (3 + 3t^2)\, dt = (3t + t^3)\Big|_0^5 = 15 + 125 = 140. \ ▲$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t + 6t^2$ м/с. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

△ По формуле (1) находим

$$S = \int_2^3 (t + 6t^2)\, dt = \left(\frac{1}{2} t^2 + 2t^3\right)\Big|_2^3 = 40{,}5. \ ▲$$

2. Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется по оси Ox под действием силы $\boldsymbol{P}$. Если сила $\boldsymbol{P}$ постоянна и f — проекция этой силы на ось Ox, то произведение $f \cdot (b - a)$ называется *работой силы* на отрезке пути $[a; b]$.

Выведем формулу для подсчета работы A силы $\boldsymbol{P}$ в случае, когда сила не является постоянной.

Пусть $f(x)$ — проекция силы $\boldsymbol{P}$ на ось Ox. Покажем, что работа A силы $\boldsymbol{P}$ на отрезке пути $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

□ Будем предполагать, что $f(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$. Отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

разобьем на n равных по длине отрезков $[x_{i-1}; x_i]$. Очевидно, что длина каждого из этих отрезков равна $\Delta x_i = (b-a)/n$ и стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому можно считать, что работа силы $\boldsymbol{P}$ на отрезке пути $[x_{i-1}; x_i]$ приближенно равна $f(x_i)\,\Delta x_i$, а вся работа на отрезке $[a; b]$ равна сумме $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$, которая является интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда в пределе при $n \to \infty$ получаем формулу (2). ■

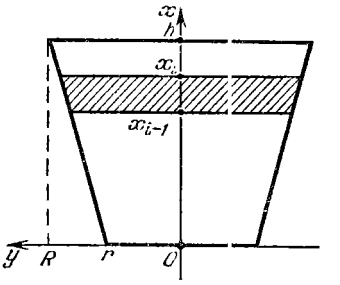


Рис. 147.

Заметим, что формулу (2) иногда удобно записывать в другой форме, а именно

$$A = \int_a^b (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{e})\,dx,$$

где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси Ox, а $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{e})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{e}$.

Пример 3. Сила в 2Н растягивает пружину на 4 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 4 см?

△ По закону Гука $F = kx$, т. е. сила, растягивающая пружину на величину x, пропорциональна этому растяжению. Из условия $2 = k \cdot 0{,}04$ находим коэффициент растяжения k: он равен 50. По формуле (2)

$$A = \int_0^{0{,}04} 50x\,dx = 25x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}04. \quad ▲$$

Пример 4. Вода, подаваемая с плоскости основания в конический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определить затраченную при этом работу, если высота бака равна h, радиус нижнего основания (дна) равен r, а радиус верхнего основания равен R, $R > r$.

△ Рассмотрим сечение конического бака, проходящее через его ось. И выберем оси координат в этом сечении так, как показано на рис. 147. Разобьем отрезок $[0; h]$ оси Ox точками $x_i =$

$= \frac{h}{n} i$ на n равных по длине отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Образующая конуса в выбранной системе координат имеет уравнение $y = r + x\frac{R-r}{h}$. Следовательно, объем i-го слоя V_i приближенно равен $\pi y_i^2 \Delta x_i$, а его потенциальная энергия приближенно равна $\pi\rho g y_i^2 x_i \Delta x_i$, где ρ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения. Отсюда следует, что

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\rho g y_i x_i \Delta x_i,$$

т. е.

$$A = \pi\rho g \int_0^h y^2 x\, dx.$$

Очевидно, что потенциальная энергия равна искомой работе. Таким образом,

$$A = \pi\rho g \int_0^h x\left(r + x\frac{R-r}{h}\right)^2 dx.$$

Вычислив этот интеграл, получим

$$A = \frac{\pi\rho g h^2}{12}(r^2 + 2rR + 3R^2). \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Найти все первообразные для следующих функций:

а) $f(x) = x^5$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x+1)$;

в) $f(x) = \frac{1}{5x+6}$; г) $f(x) = \frac{3}{\cos^2(2x+1)} + \cos 6x$.

2. Найти все первообразные для функции $f(x) = |x|$.

3. Найти для функции $f(x) = x^2$ первообразную, график которой проходит через точку $M(2; 3)$.

4. Для функции $f(x) = \frac{1}{x} + 2^{2x}$ найти первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F(1) = 3$.

5. Найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int (t^3 + 3e^{5t})\, dt$; б) $\int \frac{x^{1/3} + x^{1/5}}{x^2} dx$;

в) $\int \sin 2x \cos 4x\, dx$; г) $\int \left(5^{3x} + \frac{1}{\sin^2(2x+1)} + \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}\right) dx$.

6. Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int x\cos x\, dx$; б) $\int x \ln x\, dx$.

7. Доказать, что функция

$$f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

не имеет на всей оси ни одной первообразной.

8. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^3\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3}\sin x\,dx$;

в) $\int\limits_4^9\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; г) $\int\limits_1^3\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$;

д) $\int\limits_1^2(3x^3+4)^{1/3}x^2\,dx$; е) $\int\limits_0^{\pi/2}x\sin x\,dx$;

ж) $\int\limits_1^l\frac{\ln x}{x^2}\,dx$; з) $\int\limits_{-2}^{2}(x-2)\,x^4\,dx$.

9. Найти производные следующих функций:

а) $\Phi(x)=\int\limits_0^x t^2\sin t\,dt$; б) $\Phi(x)=\int\limits_{2x}^{3x^2}2^t\cos(\sin t)\,dt$.

10. В каком отношении делится площадь квадрата параболой, проходящей через две его соседние вершины и касающейся его стороны в ее середине?

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x^2-1|$ и $y=5+x^2$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2+x-6$ и $2y=-x^2+3x+6$.

13. Доказать, что если функция $f(x)$, $x\in[-a;\ a]$, где $a>0$, четная, то

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

14. Доказать, что если функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, периодическая с периодом $T>0$, то

$$\int\limits_a^{a+T}f(x)\,dx=\int\limits_0^T f(x)\,dx$$

для любого $a\in\mathbb{R}$.

15. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x(y+2)=4$, $x=1$ и $y=0$, вокруг оси Oy.

16. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{\pi}x$ и $y=\sin x$, $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ вокруг оси Ox.

17. С какой силой однородный стержень $0\leqslant x\leqslant l$ линейной плотности δ притягивает материальную точку $P(a)$ $(a>l)$ массы m?

18. Однородное тело в форме прямого кругового цилиндра высоты h и с радиусом основания R вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти кинетическую энергию тела, если плотность материала, из которого изготовлено тело, равна ρ.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Найти все первообразные для следующих функций:

а) $f(x)=e^{3x+2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{4}-3\sqrt{x}$;

б) $f(x)=2^{2x}-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$;

в) $f(x)=\frac{3}{2x+5}-\frac{2}{\sin^2\frac{x}{2}}+4\cos 3x$.

2. Найти для функции $f(x)$ первообразную, график которой проходит через заданную точку:

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin(2x+1)$, $M(1;\ 1)$;

б) $f(x)=\frac{1}{x-3}+e^{2x+1}$, $M(1;\ 2)$.

3. Для функции $f(x)=2\cos 3x-3\sin 4x$ найти первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F(\pi/2)=1$.

4. Найти функцию $f(x)$, если известно, что $f'(x)=3e^{3x}$ и $f(0)=4$.

5. Найти все первообразные для функции $f(x)=(2x-3)\,|x-2|$ в промежутке $]-3;\ 1[$ и в промежутке $]1;\ 3[$.

6. При каких значениях x обращается в нуль та из первообразных функции $f(x)=\pi\sin\pi x+2x-4$, которая при $x=1$ имеет значение 3?

7. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для некоторой периодической функции $f(x)$. Является ли периодической функция $F(x)$?

8. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для некоторой четной функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Является ли нечетной функция $F(x)$?

9. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для некоторой нечетной функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Является ли четной функция $F(x)$?

10. Найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int(x^2+2\sin 3x+e^{2x})\,dx$;

б) $\int\sin 6t\cos t\,dt$; в) $\int\frac{x^3+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

г) $\int\left(3^{2x}+\frac{4}{\cos^2\frac{\pi x}{3}}\right)dx$; д) $\int\left(\frac{1}{2u-1}+\frac{3}{\sqrt[3]{4u+1}}\right)du$;

е) $\int|x-1|\,dx$; ж) $\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

11. Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int x\sin x\,dx$; б) $\int x^2\cos x\,dx$;

в) $\int(x^2+1)\,e^x\,dx$; г) $\int x\cdot 2^{3x}\,dx$.

12. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int_2^3 (x+1)\,dx$; б) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \cos x\,dx$;

в) $\int_1^2 (2^{3x} - \cos 2x)\,dx$; г) $\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,dx$;

д) $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt[5]{3x-1}}\,dx$; е) $\int_1^2 xe^{-x^2}\,dx$;

ж) $\int_1^0 x\cos x\,dx$; з) $\int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}|\,dx$;

и) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

13. Найти все числа $a > 0$, для которых $\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx \leq a$.

14. Найти числа A и B такие, чтобы функция вида $f(x) = A2^x + B$, удовлетворяла условиям $f'(1) = 2$ и $\int_0^3 f(x)\,dx = 7$.

15. Найти все решения уравнения $\int_0^\alpha \cos(x+\alpha^2)\,dx = \sin\alpha$, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

16. Найти производные следующих функций:

а) $\Phi(x) = \int_1^x (u+1)\,e^u\,du$;

б) $\Phi(t) = \int_{t^2}^2 2^{x^2} \ln(1+x^2)\,dx$; в) $\Phi(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} e^x \sin^3(2x+5)\,dx$.

17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 1/\cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/4$;

б) $y = x^2$; $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$;

г) $y = 2 + \sin x$, $y = 1 + \cos^2 x$, $x \in [0; \pi]$;

д) $|y| = 1 - x^2$; е) $y = (1/2)^x$, $x - 2y + 2 = 0$, $x = 2$;

ж) $xy = 7$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 12$;

з) $y = -3x^2 - |x| + 3$, $y = 0$;

и) $3y = -x^2 + 8x - 7$, $y + 1 = 4/(x-3)$;

к) $y = x^3$, $y = 1/x$, $x = 2$.

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x} +$, $x = 1$ и касательной, проведенной в точке $(2; 3/2)$ к кривой $y = \frac{1}{x} + 1$.

19. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos ax$, $y = 0$, $x = \pi/6a$, $x = \pi/2a$, больше 3?

20. Дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y=0$, $x=a\,(a>0)$ и $y=x^3$. Какую часть площади трапеции составляет площадь треугольника, отсекаемого от данной трапеции касательной к линии $y=x^3$ в точке $x=2a/3$?

21. В некоторой точке графика функции $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этой касательной и прямыми $y=0$ и $x=1/4$.

22. Доказать, что если функция $f(x)$, $x\in[-a;\ a]$, нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$$

23. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=3$.

24. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y=1$ фигуры, ограниченной графиком функции $y=1+\cos^2 x$ на промежутке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ и этой прямой.

25. Найти объем тела, образованного при вращении криволинейной трапеции $y=x^{\alpha}$, $x\in[0;\ 1]$, $\alpha>0$, а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy, в) вокруг прямой $y=1$, г) вокруг прямой $x=1$, д) вокруг прямой $y=x$.

Глава XIII

РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Решение геометрических задач часто вызывает трудности у учащихся. Это в первую очередь связано с тем, что редко какая задача в геометрии может быть решена только с использованием определенной формулы. При решении большинства задач не обойтись без привлечения разнообразных фактов теории, доказательств тех или иных утверждений, справедливых лишь при определенном расположении элементов фигур. Можно с уверенностью сказать, что для успешного решения геометрических задач необходимо свободно владеть всем теоретическим материалом. Но и при хорошем знании теории приобрести навык в решении задач можно лишь решив достаточно много задач, начиная с простых и переходя к более сложным.

В этой главе приведено большое число задач различной трудности с решениями. Особенно подробны решения задач § 1, где мы напоминаем формулировки многих теорем и показываем их применение. Ряду задач предшествует обсуждение некоторых определений и теорем. Это сделано с целью подчеркнуть важные и часто ускользающие от внимания учащихся их следствия. Некоторые утверждения, содержащиеся в школьном учебнике лишь в форме задач, нами сформулированы и доказаны как теоремы, так как они часто используются в решении задач.

Одна и та же задача может быть решена, как правило, несколькими способами. Приведенные здесь решения не всегда самые изящные и короткие, однако мы выбрали именно эти решения для того, чтобы показать определенные приемы решений, продемонстрировать применение различных теорем.

Сделаем несколько общих замечаний.

О чертеже. Выполняя чертеж (рисунок), стремитесь сделать его соответствующим условиям задачи. Так, если сказано, что некоторый угол вдвое больше другого или отрезки перпендикулярны, отразите это на чертеже. Хороший чертеж — это удобный для восприятия наглядный способ записи условий задачи, он может стать помощником в решении задачи, подсказать правильный ход рассуждений. В то же время надо отчетливо понимать, что даже самый аккуратный, выполненный с помощью циркуля и линейки чертеж сам по себе ничего не доказывает. Все, что

«увидено» из чертежа, должно быть обосновано соответствующим логическим выводом.

О поиске решения. Начиная решать задачу, используйте определение и свойства входящих в задачу данных и искомых элементов, ведите рассуждения: треугольник равнобедренный, следовательно, ..., две касательные проведены из одной точки, следовательно, ..., окружность описана около прямоугольного треугольника, следовательно, ... и т. п. Вспомните теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомните похожие задачи.

О проверке решения. Для контроля правильности решения задачи (особенно самоконтроля на экзаменах) полезно не только еще раз просмотреть решение и проверить выкладки, но провести, в некотором смысле, обратное решение: исходя из ответа, вычислить известные элементы, проверить, существует ли фигура при найденном значении искомой величины. Если задача с параметром, выбрать для проверки такое значение параметра, при котором решение очевидно или результат легко находится.

§ 1. Разные задачи

Задача 1. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN (рис. 148). Найти площадь треугольника ABC, если $|AM|=m$ и $|BN|=n$.

△ Пусть медианы AM и BN пересекаются в точке O. *Медианы треугольника пересекаясь делятся в отношении* $2:1$, *считая от вершины*, следовательно, $|AO|=\frac{2}{3}|AM|$. Медиана AM перпендикулярна медиане BN, значит, отрезок AO — высота треугольника ABN. Используя формулу площади треугольника

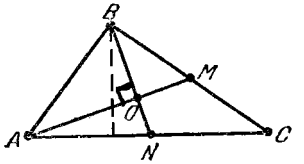


Рис. 148.

$$S=\frac{1}{2}ah_a, \qquad (1)$$

где a — основание, h_a — высота к основанию a, получаем, что площадь треугольника ABN равна $\frac{1}{2}|AO|\cdot|BN|=\frac{1}{3}mn$. Треугольники ABC и ABN имеют общую высоту, проведенную из вершины B, основание AC вдвое больше основания AN. Из той же формулы площади следует, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABN, т. е. равна $\frac{2}{3}mn$. ▲

Задача 2. Найти площадь трапеции, зная длины d_1 и d_2 ее диагоналей и длину высоты h.

△ Рассмотрим трапецию $ABCD$, в которой $|BD|=d_1$ и $|AC|=d_2$ (рис. 149). Через точку D параллельно диагонали AC про-

ведем прямую, точку пересечения этой прямой с прямой BC обозначим K. В четырехугольнике $ACKD$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, $ACKD$ — параллелограмм,

$$|DK| = |AC| = d_2 \quad \text{и} \quad |CK| = |AD|.$$

Из последнего равенства следует, что

$$|BK| = |BC| + |CK| = |BC| + |AD|,$$

т. е. длина отрезка BK равна сумме длин оснований трапеции. Площадь трапеции, длины оснований которой равны a и b и длина высоты равна h, находится по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} h, \tag{2}$$

поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}|BK|h$. Пусть $DM \perp BK$, тогда $|DM| = h$. Из прямоугольных треугольников BMD и DMK, используя теорему Пифагора, находим длины отрезков BM и MK:

$$|BM| = \sqrt{|BD|^2 - |DM|^2} = \sqrt{d_1^2 - h^2},$$
$$|MK| = \sqrt{|DK|^2 - |DM|^2} = \sqrt{d_2^2 - h^2}.$$

Таким образом, площадь трапеции $ABCD$ равна

$$\frac{1}{2} h \left(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}\right). \blacktriangle$$

В этой задаче дополнительным построением получили треугольник, площадь которого, с одной стороны, равна площади трапеции, а с другой — легко вычисляется по данным задачи. Приведем еще один пример, в котором используется тот же прием — построение фигуры равной площади.

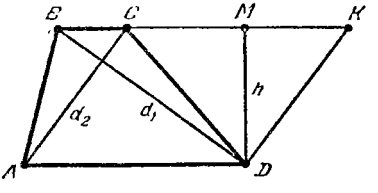


Рис. 149.

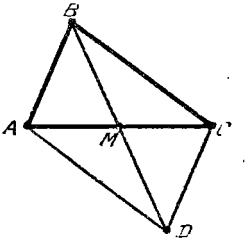


Рис. 150.

Задача 3. Найти площадь треугольника ABC, если $|AB| = 3$ см, $|BC| = 7$ см и длина медианы BM равна 4 см.

△ Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 150). *Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам*, поэтому точка M лежит на диагонали BD и $|BD| = 2|BM|$.

Площади треугольников ABC и BCD составляют половину площади параллелограмма $ABCD$, следовательно, площади этих треугольников равны. В треугольнике BCD известны длины трех его сторон:

$$|BC|=7 \text{ см}, \quad |CD|=3 \text{ см}, \quad |BD|=8 \text{ см}.$$

Площадь треугольника, длины сторон которого равны a, b и c, находится по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $2p=a+b+c$.

Подставляя в эту формулу числовые значения длин сторон, находим, что площадь треугольника BCD, как и площадь треугольника ABC, равна $6\sqrt{3}$ см^2. ▲

В следующих двух задачах напомним некоторые теоремы о прямоугольных треугольниках.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD (рис. 151). Точка D находится на расстоянии m и n от катетов AC и BC соответственно. Найти длины катетов.

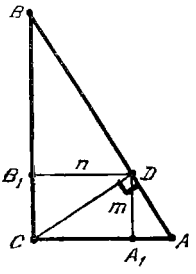


Рис. 151.

△ Пусть $DA_1 \perp AC$ и $DB_1 \perp BC$. *Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны*, следовательно, $DA_1 \parallel BC$ и $DB_1 \parallel AC$. Тогда CB_1DA_1 — по определению прямоугольник, поэтому $|CA_1|=|DB_1|=n$ и $|CB_1|=|DA_1|=m$.

В прямоугольном треугольнике CDA отрезок DA_1 является высотой, проведенной из вершины прямого угла. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу*, следовательно,

$$|DA_1|^2=|CA_1|\cdot|A_1A|.$$

Обозначив $b=|AC|$, это равенство перепишем в виде $m^2=n(b-n)$, откуда находим $b=(n^2+m^2)/n$. Аналогично, обозначая $|BC|=a$, из прямоугольного треугольника BCD находим $a=(n^2+m^2)/m$.

Таким образом, катеты равны $\frac{n^2+m^2}{n}$ и $\frac{n^2+m^2}{m}$. ▲

Задача 5. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r. Найти площадь этого треугольника, если длина гипотенузы равна c.

△ Пусть окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке P и касается катетов в точках M и N (рис. 152).

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, поэтому, если O — центр окружности, то $OM \perp BC$ и $ON \perp AC$. Отсюда следует (рассуждения аналогичны рассуждениям задачи 4), что $CMON$ — прямоугольник, а так как $|OM| = |ON| = r$, то $CMON$ — квадрат, площадь которого равна r^2.

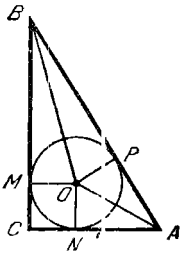


Рис. 152

Прямоугольные треугольники конгруэнтны, если гипотенуза и катет одного конгруэнтны гипотенузе и катету другого, поэтому прямоугольные треугольники MBO и PBO конгруэнтны и, следовательно, имеют равные площади. Аналогично устанавливается, что равные площади имеют прямоугольные треугольники NAO и PAO. Таким образом,

$$S_{ABC} = S_{CMON} + 2S_{PBO} + 2S_{PAO}.$$

Сумма площадей треугольников PBO и PAO равна площади треугольника BOA, площадь которого находится по формуле (1) и равна $\frac{1}{2}cr$. Окончательно получаем $S_{ABC} = r^2 + cr$. ▲

Рассмотрим задачу о делении отрезка при пересечении его прямой. Как правило, такая задача решается дополнительным построением — проведением параллельной прямой и использованием теоремы о пересечении сторон угла параллельными прямыми.

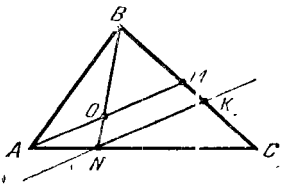


Рис. 153.

Задача 6. Точка N лежит на стороне AC треугольника ABC (рис. 153), причем $|AN| : |AC| = n$. Найти, в каком отношении медиана AM делит отрезок BN.

△ Пусть O — точка пересечения медианы AM и отрезка BN. Требуется найти отношение $|BO| : |ON|$. Проведем прямую NK параллельно медиане AM. *Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки*. Параллельные прямые AM и NK пересекают стороны угла NBC, следовательно,

$$\frac{|BO|}{|ON|} = \frac{|BM|}{|MK|}. \qquad (3)$$

Те же прямые пересекают и стороны угла ACB, поэтому

$$\frac{|MC|}{|MK|} = \frac{|AC|}{|AN|}.$$

Заметим, что M — середина стороны BC, значит, $|BM| = |MC|$; кроме того, $|AC| : |AN| = 1/n$, таким образом,

$$\frac{|BM|}{|MK|} = \frac{|MC|}{|MK|} = \frac{1}{n},$$

и тогда из (3) следует, что $|BO| : |ON| = 1 : n$. ▲

Используем аналогичные дополнительные построения для доказательства следующей теоремы о свойстве биссектрисы треугольника.

Теорема. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если AD — биссектриса треугольника ABC* (рис. 154), *то* $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$.

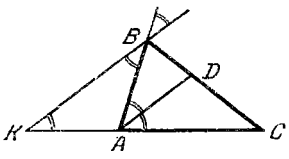


Рис. 154.

□ Проведем прямую BK, параллельную биссектрисе AD. Параллельные прямые BK и DA, пересекая стороны угла BCK, отсекают на них пропорциональные отрезки, имеем

$$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|KA|}{|AC|}. \qquad (4)$$

Заметим, что треугольник KAB равнобедренный. Действительно, *если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные*, а следовательно, *и накрест лежащие углы конгруэнтны*, поэтому

$$\widehat{BKA}=\widehat{DAC}, \qquad \widehat{KBA}=\widehat{BAD},$$

а равенство углов BAD и DAC следует из того, что AD — биссектриса угла A. Таким образом, $|KA|=|AB|$, и из (4) следует

$$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}. \quad ■$$

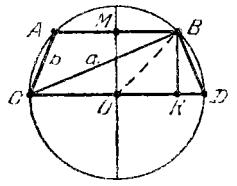


Рис. 155.

Рассмотрим несколько задач, в условии которых задана окружность.

Задача 7. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности (рис. 155). Найти длину хорды AB, если $|AC|=b$ и $|BC|=a$ $(a>b)$.

△ *Дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны*, кроме того, *конгруэнтные дуги стягиваются конгруэнтными хордами*, поэтому $|BD|=|AC|=b$.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, следовательно, $\widehat{CBD}=90°$ и треугольник CBD — прямоугольный. По теореме Пифагора находим $|CD|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Пусть $BK\perp CD$. Площадь прямоугольного треугольника CBD равна половине произведения длин его катетов, с другой стороны, она может быть выражена по формуле (1), т. е. имеет место равенство $\frac{1}{2}|CB|\cdot|BD|=\frac{1}{2}|CD|\cdot|BK|$, из которого находим $|BK|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пусть O — центр окружности и $OM\perp AB$. *Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными*

прямыми, конгруэнтны между собой, следовательно, $|OM| = |BK|$. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам*, поэтому $|AM| = |MB|$. Из прямоугольного треугольника OMB, в котором $|OB| = |CD|/2$, находим

$$|MB| = \sqrt{|OB|^2 - |OM|^2} = \frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}},$$

следовательно, $AB = (a^2 - b^2)/\sqrt{a^2 + b^2}$. ▲

Задача 8. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность, которая проходит через середины диагоналей трапеции и касается основания AD (рис. 156). Найти углы трапеции.

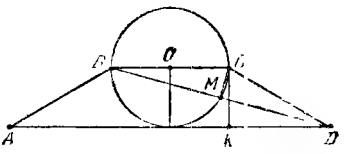


Рис. 156

△ Пусть окружность пересекает диагональ BD в точке M, тогда по условию $|BM| = |MD|$. Вписанный угол BMC прямой, так как опирается на диаметр. *Прямоугольные треугольники конгруэнтны, если катеты одного конгруэнтны катетам другого*, поэтому $\triangle BMC \cong \triangle DMC$ ($|BM| = |MD|$, CM — общий катет) и, следовательно, $|BC| = |CD|$. Так как окружность проходит также через середину диагонали AC, то аналогично устанавливается $|AB| = |BC|$. Таким образом, трапеция равнобедренная и углы при основании равны.

Окружность касается основания AD, поэтому расстояние между основаниями равно радиусу окружности, и если $CK \perp AD$, то $|CK| = \frac{1}{2}|BC|$. Отсюда следует, что в прямоугольном треугольнике CKD гипотенуза CD в два раза больше катета CK, следовательно, катет CK лежит против угла в 30°.

Итак, углы трапеции $ABCD$ равны 30° и 150°. ▲

В решении этой задачи в частности было доказано, что *если медиана треугольника (BCD) является высотой, то треугольник равнобедренный*. Легко доказываются также следующие признаки равнобедренного треугольника (доказательство проведите самостоятельно):

если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный;

если высота треугольника является биссектрисой, то треугольник равнобедренный;

если медиана треугольника является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

В дальнейшем будем использовать эти признаки.

Задача 9. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса r в точках M и N (рис. 157). Найти длину отрезка MN, если расстояние от точки A до центра окружности равно a.

△ Пусть O — центр окружности, тогда $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90°$. В прямоугольных треугольниках OMA и ONA гипотенуза OA общая и $|OM| = |ON| = r$, следовательно, $\triangle OMA \cong \triangle ONA$. Из конгруэнтности этих треугольников следует, что углы MAO и NAO конгруэнтны и $|AM| = |AN|$. Таким образом, треугольник MAN равнобедренный. *В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой*, поэтому, если E — точка пересечения OA и MN, то $OA \perp ME$ и $|ME| = |EN|$.

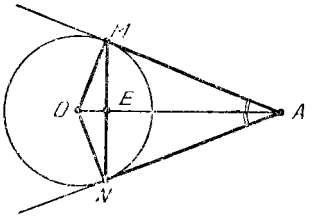


Рис. 157.

Для площади S прямоугольного треугольника OMA имеем

$$S = \frac{1}{2}|ME||OA| = \frac{1}{2}|OM||AM|,$$

откуда, так как $|AM| = \sqrt{a^2 - r^2}$, находим $|ME| = r\sqrt{a^2 - r^2}/a$ и $|MN| = 2r\sqrt{a^2 - r^2}/a$. ▲

В решении этой задачи доказаны два свойства касательных, которые сформулируем следующим образом:

если из точки к окружности проведены две касательные, то

а) *длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны,*

б) *прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, делит угол между касательными пополам.*

Первое из указанных свойств поможет нам решить следующую задачу.

Задача 10. В треугольник ABC площади S вписана окружность радиуса r, которая касается сторон AC и BC соответственно в точках M и N (рис. 158). Найти длину стороны AC, если $|AM| : |MC| = 2 : 3$ и $|BN| : |NC| = 5 : 6$

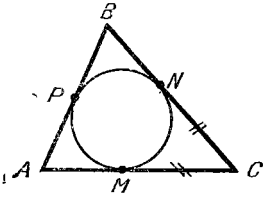


Рис. 158.

△ Длину стороны AC обозначим a. Из условия $|AM| : |MC| = 2 : 3$ находим, что $|AM| = 2a/5$ и $|MC| = 3a/5$.

По свойству касательных, проведенных из одной точки, имеем $|NC| = |MC| = 3a/5$, и тогда из условия $|BN| : |NC| = 5 : 6$ получаем $|BN| = a/2$.

Если окружность касается стороны AB в точке P, то также $|AP| = |AM| = 2a/5$ и $|BP| = |BN| = a/2$.

Площадь треугольника через длины его сторон a, b, c и радиус r вписанной окружности выражается по формуле

$$S = pr, \tag{5}$$

где $2p = a + b + c$.

Находим полупериметр p треугольника ABC: $p = 3a/2$, тогда по этой формуле $S = \frac{3}{2} ar$ и, следовательно, $a = \frac{2}{3} \frac{S}{r}$. ▲

Напомним, что:

в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны;

около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°.

Задача 11. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

△ Пусть r — радиус окружности, которая вписана в прямоугольную трапецию $ABCD$ (рис. 159). Так как трапеция прямоугольная, то $|AB| = 2r$. Пусть $|BC| = b$ и $|AD| = a$. В эту трапецию вписана окружность, следовательно,

$$|BC| + |AD| = |AB| + |CD|,$$

откуда получаем $|CD| = a + b - 2r$. Пусть $CK \perp AD$, тогда $|CK| = |AB| = 2r$ и $|KD| = a - b$. По теореме Пифагора $|CD|^2 = |CK|^2 + |KD|^2$, т. е. $(a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (a - b)^2$, откуда находим

$$r = \frac{ab}{a + b}. \blacktriangle$$

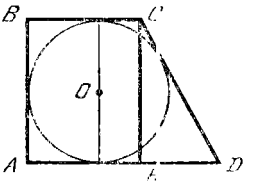


Рис. 159

Приведем пример задачи, решение которой становится проще при дополнительном построении окружности.

Задача 12. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, величина угла A равна α ($\alpha < \pi/4$), точка D — середина гипотенузы. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CD. Найти величину угла AB_1C.

△ Пусть точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CD (рис. 160), тогда точки B и B_1 лежат на одном перпендикуляре к прямой CD и на равном расстоянии от этой прямой, т. е. $BB_1 \perp CD$ и $|OB| = |OB_1|$. Отрезок OD соединяет середины сторон треугольника BB_1A, следовательно, OD — средняя линия треугольника BB_1A, она параллельна стороне AB_1. А так как $OD \perp BB_1$, то и $AB_1 \perp BB_1$, т. е. треугольник BB_1A прямоугольный.

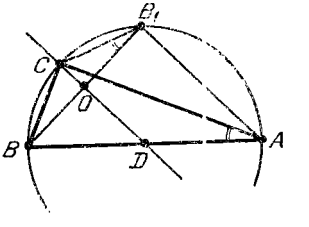


Рис. 160

Вершины прямоугольных треугольников с гипотенузой AB лежат на окружности с диаметром AB, следовательно, точки A, B, C и B_1 лежат на окружности с диаметром AB.

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы BAC и BB_1C

опираются на одну дугу, поэтому их величины равны: $\widehat{BB_1C} = \alpha$.

Отсюда находим, что $\widehat{AB_1C} = \widehat{AB_1B} + \widehat{BB_1C} = \frac{\pi}{2} + \alpha$. ▲

§ 2. Подобие треугольников. Теоремы синусов и косинусов

Подобие треугольников. Напомним определения подобия фигур: фигура Φ_1 называется *подобной* фигуре Φ (записывается $\Phi_1 \sim \Phi$), если существует отображение фигуры Φ на фигуру Φ_1, при котором для любых двух точек M и N фигуры Φ и их образов — точек M_1 и N_1 отношение расстояний $|MN|$ и $|M_1N_1|$ есть величина постоянная. Число $k = |M_1N_1|/|MN|$ называется *коэффициентом подобия*.

Наиболее часто в решении задач используется подобие треугольников. Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC и вершины A_1 и B_1 являются образами вершин A и B, то коэффициент подобия этих треугольников равен $|A_1B_1|/|AB|$, как говорят, равен отношению длин соответственных сторон.

Признаки подобия треугольников

1. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

2. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

3. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.*

Задача 1. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найти длину отрезка MN, если длины оснований трапеции равны a и b.

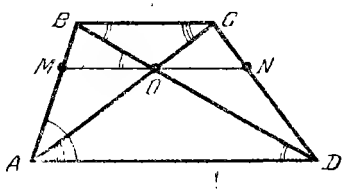


Рис. 161.

△ Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезок MN параллелен основаниям и содержит точку O (рис. 161), $|AD| = a$, $|BC| = b$. Если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные и накрест лежащие углы равны. Основания трапеции параллельны, следовательно, $\widehat{BDA} = \widehat{CBD}$ и $\widehat{CAD} = \widehat{BCA}$ и по второму признаку подобия $\triangle BOC \sim \triangle DOA$. Следо-

вательно, $\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$, т. е. $\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{b}{a}$. Отсюда находим, что

$$\frac{|BO|}{|BD|} = \frac{b}{a+b}. \qquad (1)$$

Прямая MN параллельна основанию AD, поэтому $E\widehat{MO} = \widehat{BAD}$ и $\widehat{BOM} = \widehat{BDA}$, треугольники MBO и ABD также подобны и $|MO|/|AD| = |BO|/|BD|$. Отсюда, учитывая (1), получаем $|MO| = ab/(a+b)$. Аналогично устанавливаем, что $|NO| = ab/(a+b)$, таким образом, $MN| = 2ab/(a+b)$. ▲

Сформулируем признаки подобия прямоугольных треугольников

1. *Два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу.*

2. *Два прямоугольных треугольника подобны, если катеты одного пропорциональны катетам другого.*

3. *Два прямоугольных треугольника подобны, если катет и гипотенуза одного пропорциональны катету и гипотенузе другого.*

Задача 2. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN (рис. 162). Найти углы треугольника MNC, если $\hat{A} = \alpha$ и $\hat{B} = \beta$.

△ Прямоугольные треугольники AMC и BNC имеют равные острые углы при вершине C, следовательно, они подобны и $|NC|/|BC| = |MC|/|AC|$. Отсюда заключаем, что в треугольниках MCN и ACB стороны, прилежащие к равному углу при вершине C, пропорциональны, следовательно (по третьему признаку подобия), эти треугольники подобны. В подобных треугольниках против соответственных сторон лежат равные углы, поэтому $\widehat{NMC} = \alpha$ и $\widehat{MNC} = \beta$.

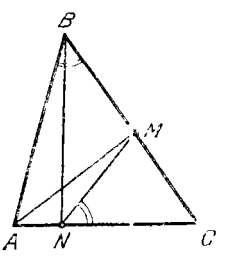


Рис. 162.

Результат этой задачи можно сформулировать так: если соединить основания двух высот треугольника, то образуется треугольник, подобный данному. ▲

Из определения подобия фигур следует, что в подобных фигурах все соответственные линейные элементы пропорциональны. Так, *отношение периметров подобных многоугольников равно отношению длин соответствующих сторон.* Или, например, в подобных треугольниках отношение радиусов вписанных окружностей (также и описанных окружностей) равно отношению длин соответственных сторон. Это замечание поможет нам решить следующую задачу.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD (рис. 163). Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны соответ-

ственно r_1 и r_2. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

△ Обозначим искомый радиус r, положим $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$. Из подобия прямоугольных треугольников ACD и ABC (у них равные углы при вершине A) имеем $\frac{r}{r_1}=\frac{c}{b}$, откуда $b=\frac{r_1}{r}c$. Прямоугольные треугольники CBD и ABC также подобны, поэтому $\frac{r}{r_2}=\frac{c}{a}$, откуда $a=\frac{r_2}{r}c$. Так как $a^2+b^2=c^2$, то, возводя в квадрат выражения для a и b и складывая их, получим $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2c^2+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2c^2=c^2$ или $\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=1$. Теперь находим $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. ▲

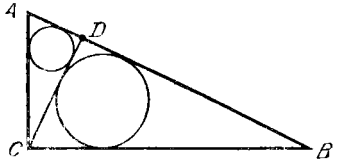


Рис. 163.

Напомним, что *отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия*. Для треугольников это утверждение можно сформулировать так: площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответственных сторон. Рассмотрим характерную задачу на эту тему.

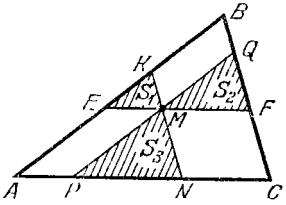


Рис. 164.

Задача 4. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. При этом образовалось три треугольника (рис. 164), площади которых равны S_1, S_2 и S_3. Найти площадь треугольника ABC.

△ Легко видеть, что треугольники EKM, MQF и PMN подобны треугольнику ABC. Пусть S — площадь треугольника ABC, тогда

$$\frac{S_1}{S}=\frac{|EM|^2}{|AC|^2},\quad \frac{S_2}{S}=\frac{|MF|^2}{|AC|^2},\quad \frac{S_3}{S}=\frac{|PN|^2}{|AC|^2}.$$

Отсюда находим

$$|EM|=\sqrt{\frac{S_1}{S}}\,|AC|,\quad |MF|=\sqrt{\frac{S_2}{S}}\,|AC|,\quad |PN|=\sqrt{\frac{S_3}{S}}\,|AC|.$$

А так как $|EM|=|AP|$, $|MF|=|NC|$, то

$$|EM|+|PN|+|MF|=|AP|+|PN|+|NC|=|AC|.$$

Таким образом,

$$|AC|\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)=|AC|.$$

Отсюда следует $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. ▲

Теоремы косинусов и синусов. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a, b, c, а величины противолежащих им углов — $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, справедливы две теоремы, устанавливающие соотношения между сторонами и углами треугольника, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C},$$

теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}.$$

Покажем на примерах, как применяются эти теоремы.

Задача 5. Найти длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C, если длины сторон, лежащих против вершин A, B и C, равны соответственно a, b, c.

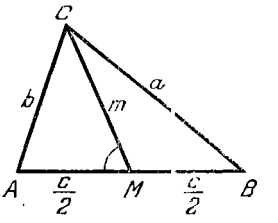


Рис. 165.

△ Пусть CM — медиана треугольника ABC (рис. 165). Обозначим $m = |CM|$, $\varphi = \widehat{CMA}$, тогда $\widehat{CMB} = 180° - \varphi$. Из треугольников ACM и CMB по теореме косинусов будем иметь

$$b^2 = m^2 + \frac{c^2}{4} - 2m\,\frac{c}{2}\cos\varphi,$$

$$a^2 = m^2 + \frac{c^2}{4} - 2m\,\frac{c}{2}\cos(180° - \varphi).$$

Складывая почленно два эти равенства и учитывая, что $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, получаем $a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}$, откуда находим $m^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Таким образом, $|CM| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$. ▲

Задача 6. Площадь треугольника ABC равна 16 см². Найти длину стороны AB, если $|AC| = 5$ см, $|BC| = 8$ см и угол C тупой (рис. 166).

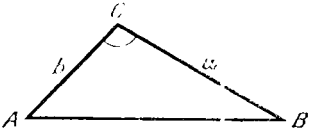


Рис. 166.

△ Площадь треугольника через длины двух сторон a и b и величину угла C между ними выражается следующим образом:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\sin\hat{C}. \qquad (2)$$

Для данного треугольника ABC из этой формулы следует $\sin\hat{C} = 2S/ab = 4/5$. Так как угол C тупой, то косинус этого угла отрицателен, и поэтому

$$\cos\hat{C} = -\sqrt{1 - \sin^2\hat{C}} = -\frac{3}{5}.$$

Теперь по теореме косинусов находим $|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 137$. Следовательно, $|AB| = \sqrt{137}$ см. ▲

Задача 7. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и AC равны b, угол при вершине A равен 2α. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D (рис. 167). Найти длину отрезка BD.

△ Центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности лежит на его биссектрисе AK (так как $AK \perp BC$ и $|BK| = |KC|$), следовательно, $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{OAB} = \alpha$. Итак, в треугольнике BAD два угла известны, а так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\overset{\frown}{BDA} = 180° - 3\alpha$. По теореме синусов из треугольника BAD имеем

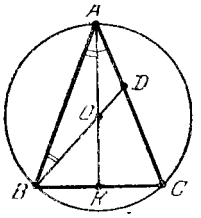


Рис. 167.

$$\frac{|BD|}{\sin 2\alpha} = \frac{|AB|}{\sin(180° - 3\alpha)},$$

откуда, учитывая, что $\sin(180° - 3\alpha) = \sin 3\alpha$, находим

$$|BD| = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}\, b. \text{ ▲}$$

Приведем доказательство теоремы синусов, по ходу которого установим одно важное соотношение.

□ Пусть около треугольника ABC, длины сторон которого, противолежащие вершинам A, B, C, обозначены a, b, c, описана окружность радиуса R (см. рис. 168). Проведем диаметр BD. Вписанные углы BDA и BCA опираются на одну дугу, следовательно, $\overset{\frown}{BDA} = \hat{C}$. Угол BAD прямой, так как опирается на диаметр, значит, треугольник BAD прямоугольный и

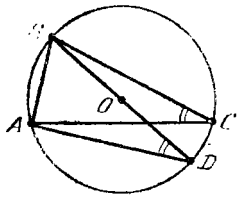


Рис. 168.

$$c = 2R\sin\hat{C}. \tag{3}$$

Аналогично устанавливается, что $a = 2R\sin\hat{A}$ и $b = 2R\sin\hat{B}$. Из этих равенств следует

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R. \text{ ■} \tag{4}$$

Если из (3) выразить $\sin\hat{C}$ и подставить в формулу (2), то получим выражение площади треугольника через длины его сторон a, b, c и радиус описанной окружности R:

$$S = \frac{abc}{4R}. \tag{5}$$

Задача 8. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC (рис. 169). Найти отношение радиусов окруж-

ностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $|AN|:|AC|=n$.

△ Обозначим через a сторону правильного треугольника ABC, тогда $|AN|=na$. Длину стороны BN найдем по теореме косинусов из треугольника ABN:

$$|BN|=\sqrt{|AB|^2+|AN|^2-2|AB|\,|AN|\cos 60^\circ}=\sqrt{1+n^2-n}\cdot a.$$

Пусть R_1 и R_2 — радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников ABN и ABC. По формуле (5) получим

$$S_{ABN}=\frac{n\sqrt{1+n^2-n}\,a^3}{4R_1},\qquad S_{ABC}=\frac{a^3}{4R_2}.$$

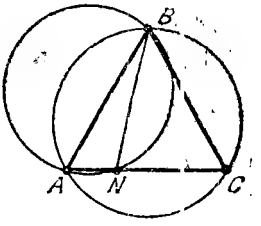


Рис. 169

С другой стороны, треугольники ABN и ABC имеют общую высоту, проведенную из вершины B, поэтому их площади относятся как длины оснований, т. е. $S_{ABN}=nS_{ABC}$. Подставив сюда выражения для площадей, получим $n\sqrt{1+n^2-n}a^3/4R_1=na^3/4R_2$, откуда находим $R_1/R_2=\sqrt{1+n^2-n}$. ▲

§ 3. Свойства хорд, секущих и касательных

Углы, измеряемые с помощью дуг окружности. Угловой величиной дуги называют величину соответствующего ей центрального угла. *Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.* Установим, как измеряются углы с вершинами внутри или вне круга, когда стороны этих углов пересекаются с окружностью.

Теорема. *Величина угла с вершиной внутри круга равна полусумме угловых величин дуг, заключенных между его сторонами*

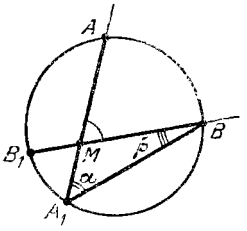


Рис. 170.

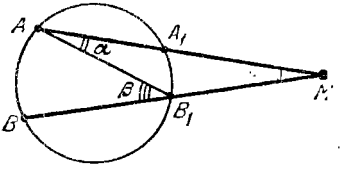


Рис. 171.

и их продолжениями. Величина угла, образованного двумя секущими с вершиной вне круга, стороны которого пересекают этот круг, равна полуразности угловых величин большей и меньшей дуг, заключенных между его сторонами.

□ Рассмотрим угол AMB (рис. 170). Заметим, что $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$, $\beta = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_1B_1}$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных, поэтому $\widehat{AMB} = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{A_1B_1})$.

Рассмотрим теперь угол AMB, образованный двумя секущими MA и MB (рис. 171). Так как $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_1B_1}$, $\beta = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$, то по свойству внешнего угла треугольника получаем $\widehat{AMB} = \beta - \alpha = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} - \overset{\smile}{A_1B_1})$. ■

Теорема. *Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине угловой величины дуги, заключенной между его сторонами.*

□ Рассмотрим угол NAB, образованный касательной и хордой (рис. 172). Проведем диаметр AC. Касательная перпендикулярна диаметру, проведенному через точку касания, следовательно, $\widehat{CAN} = 90°$ и $\overset{\smile}{CBA} = 180°$. Далее, $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$, $\widehat{NAB} = 90° - \alpha$, отсюда получаем

$$\widehat{NAB} = \frac{1}{2}(180° - \overset{\smile}{BC}) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BA}$$

(случай тупого угла, на рис. 172 угол MAB, рассматривается аналогично). ■

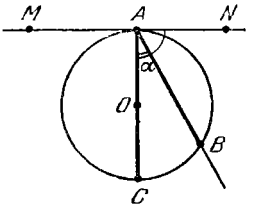


Рис. 172.

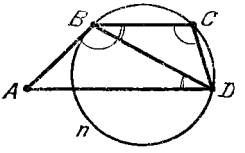


Рис. 173.

Задача 1. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B (рис. 173). Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.

△ Угол между касательной AB и хордой BD, как и вписанный угол BCD, измеряются половиной угловой величины дуги BnD, следовательно, $\widehat{ABD} = \widehat{BCD}$. Основания трапеции параллельны, поэтому $\widehat{CBD} = \widehat{BDA}$. Таким образом, треугольники ABD и BCD имеют по два равных угла и, следовательно, подобны. Из подобия получаем $|BD|/|AD| = |BC|/|BD|$, откуда следует $|BD|^2 = |AD||BC|$ и $|BD| = \sqrt{ab}$. ▲

Свойства секущих и касательных. Докажем теорему, называемую «теоремой о касательной и секущей», часто применяемую в решении задач.

Теорема. *Пусть к окружности проведены из одной точки M касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точках B и C* (рис. 174). *Тогда справедливо равенство*

$$|MA|^2 = |MB|\,|MC|,$$

т. е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек ее пересечения с окружностью.

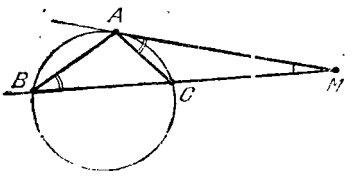


Рис. 174.

□ По предыдущей теореме $\widehat{MAC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$, но также $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$, следовательно, $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Так как в треугольниках AMC и BMA угол при вершине M общий, то отсюда по второму признаку подобия следует, что эти треугольники подобны. Из подобия имеем $|MA|/|MB| = |MC|/|MA|$, откуда получаем $|MA|^2 = |MB|\cdot|MC|$. ■

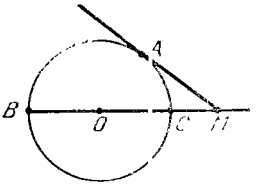


Рис. 175.

Задача 2. Радиус окружности равен r. Из точки M проведена секущая MB, проходящая через центр окружности, и касательная MA, причем $|MB| = 2|MA|$ (рис. 175). Найти, на каком расстоянии от центра окружности находится точка M.

△ Обозначим $x = |OM|$, тогда $|BM| = x + r$ и $|CM| = x - r$, кроме того, по условию $|MA| = \frac{|BM|}{2} = \frac{1}{2}(x + r)$.

По теореме о касательной и секущей имеем $\frac{1}{4}(x+r)^2 = (x+r)(x-r)$, откуда, сокращая на $(x+r)$, получаем $\frac{1}{4}(x+r) = x - r$ и легко находим $x = \frac{5}{3}r$. ▲

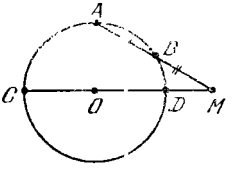


Рис. 176.

Задача 3. Через точку M, удаленную от центра окружности на расстоянии b, проведена секущая MA так, что она делится окружностью пополам: $|MB| = |BA|$ (рис. 176). Определить длину секущей MA, если радиус окружности равен r.

△ Проведем секущую MC через центр окружности. Из теоремы о касательной и секущей следует, что если из точки M проведены две секущие MA и MC, пересекающие окружность

в точках B и D соответственно, то $|MA|\,|MB| = |MC|\,|MD|$, так как оба произведения равны квадрату длины касательной, проведённой из точки M к той же окружности. По условию $|OM| = b$, поэтому $|MC| = b + r$ и $|MD| = b - r$. Обозначим $|MA| = x$, тогда $|BM| = x/2$ и по указанному свойству двух секущих, проведенных из одной точки, получаем $x \cdot \frac{x}{2} = (b+r)(b-r)$, откуда находим $x = \sqrt{2(b^2 - r^2)}$. ▲

Свойство пересекающихся хорд.

Теорема. *Если через точку, взятую внутри круга, проведены две хорды, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды, т. е.* (рис. 177) *если через точку M проведены две хорды AB и CD, то $|MA|\,|MB| = |MC|\,|MD|$.*

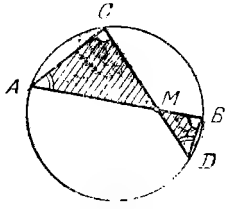


Рис. 177.

□ Проведем хорды AC и BD. Вписанные углы CAB и CDB опираются на дугу CB, следовательно, $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$. Аналогично $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$. Таким образом, треугольники ACM и DBM подобны и $|MA|/|MD| = |MC|/|MB|$. Отсюда получаем $|MA|\,|MB| = |MC|\,|MD|$. ■

Задача 4. Две окружности внутренне касаются в точке Q (рис. 178). Прямая, проходящая через центр O_1 меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей, если $|AB| : |BC| : |CD| = 2 : 4 : 3$.

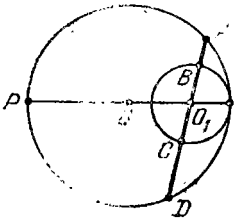


Рис. 178.

△ Пусть R и r — соответственно радиусы большей и меньшей окружностей, тогда $|BC| = 2r$ и из заданной пропорции получаем $|AB| = r$ и $|CD| = \frac{3}{2} r$.

Проведем диаметр QP. Диаметр, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому точки O_1 лежат на QP.

По свойству пересекающихся хорд имеем $|O_1Q|\,|O_1P| = |O_1A|\,|O_1D|$, отсюда, учитывая, что $|O_1P| = 2R - r$, $|O_1A| = |O_1B| + |BA| = 2r$ и $|O_1D| = |CD| + |CO_1| = \frac{5}{2} r$, получаем $(2R - r)r = 5r^2$. Теперь легко находим $R/r = 3$. ▲

§ 4. Алгебраические и тригонометрические методы решения. Применение векторной алгебры

В рассмотренных ранее задачах нам приходилось решать несложные алгебраические уравнения, использовать теоремы косинусов и синусов, находить значения углов. Очевидно, что отде-

лить геометрию от алгебры и тригонометрии невозможно, поскольку многие геометрические утверждения сформулированы в алгебраической форме (теорема Пифагора или свойство высоты прямоугольного треугольника) или тригонометрической (теоремы синусов и косинусов). Однако возможности применения алгебры и тригонометрии гораздо шире. Во многих случаях решения геометрических задач сводятся к решению соответствующих алгебраических или тригонометрических уравнений и систем. Рассмотрим в качестве примеров следующие задачи.

Задача 1. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найти высоту этого треугольника.

△ Пусть BD — высота равнобедренного треугольника ABC (рис. 179). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину, то точка D лежит на диаметре BF. Обозначим $h=|BD|$ и $2b=|AC|$. По условию $2R=h+2b$, а по свойству пересекающихся хорд (§ 3) имеем $b^2=h(2R-h)$. Таким образом, получили систему

$$\begin{cases} 2R=h+2b, \\ b^2=h(2R-h). \end{cases}$$

Исключая $2R$, находим $b^2=2bh$, откуда $b=2h$, и тогда из первого уравнения получаем $h=\frac{2}{5}R$. ▲

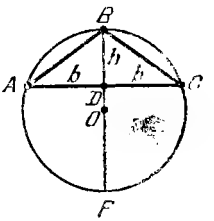


Рис. 179.

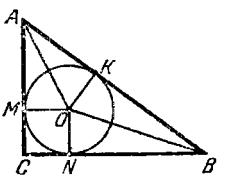


Рис. 180.

Задача 2. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, находится на расстоянии $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см от вершин A и B (рис. 180). Найти катеты.

△ Задача решается просто, если за неизвестные принять не катеты, а радиус вписанной окружности r и $\alpha=\widehat{OAK}$. Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов A и B, то $\widehat{OBK}=\frac{\pi}{4}-\alpha$. Из прямоугольных треугольников OAK и OBK находим

$$r=\sqrt{5}\sin\alpha \quad \text{и} \quad r=\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

следовательно,

$$\sqrt{5}\sin\alpha=\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right). \qquad (1)$$

Задача свелась к простому тригонометрическому уравнению. Так как $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$, то из (1) получаем $\sin\alpha=\cos\alpha-\sin\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=1/2$.

Зная $\operatorname{tg}\alpha$, по формуле $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ находим $\sin\alpha=1/\sqrt{5}$ и, следовательно, $r=1$ см.

Так как $|AC|=|AM|+|MC|$ и $|BC|=|BN|+|NC|$, то легко находим $|AC|=3$ см и $|BC|=4$ см. ▲

Задача 3. Равнобедренные треугольники ABC ($|AB|=|BC|$) и $A'B'C'$ ($|A'B'|=|B'C'|$) конгруэнтны. Вершины A', B', C' расположены соответственно на продолжениях стороны BC за точку C, стороны BA за точку A, стороны AC за точку C, причем прямые BC и $B'C'$ перпендикулярны (рис. 181). Найти углы треугольника ABC.

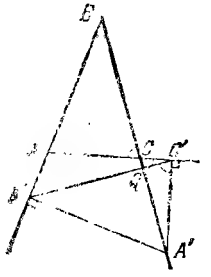


Рис. 181.

△ Обозначим $b=|AB|$ и $\varphi=\widehat{ABC}$. Пусть прямые BC и $B'C'$ пересекаются в точке Q. Так как по условию $A'B\perp B'C'$ и $\widehat{QCC'}=\widehat{ACB}=\widehat{B'C'A'}$, то угол $CC'A'$ — прямой и отрезок $C'Q$ является высотой прямоугольного треугольника $CC'A'$. Следовательно,

$$|QC'|^2=|QC|\,|QA'|. \qquad (2)$$

Из прямоугольного треугольника $B'QA'$ находим $|QA'|=b\sin\varphi$, $|B'Q|=b\cos\varphi$, и так как $|QC'|=|B'C'|-|QB'|$, то $|QC'|=b(1-\cos\varphi)$. Далее, $|QC|=|QB|-|BC|$. Найдем $|QB|$ из прямоугольного треугольника $B'BQ$:

$$|QB|=\frac{|B'Q|}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{b\cos^2\varphi}{\sin\varphi},$$

тогда $|QC|=b\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-1\right)$. Подставляя в (2) длины соответствующих отрезков и сокращая на b^2, получим тригонометрическое уравнение $(1-\cos\varphi)^2=\sin\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-1\right)$, которое приводится к виду $\sin\varphi=2\cos\varphi-1$. Возводя это равенство в квадрат, выражая $\sin^2\varphi$ через $\cos^2\varphi$, получим $5\cos^2\varphi-4\cos\varphi=0$, откуда находим $\cos\varphi=0$ и $\cos\varphi=4/5$. Очевидно, что $\cos\varphi\neq0$ (в противном случае прямые $B'A'$ и BC не пересекались бы), поэтому $\cos\varphi=4/5$ и $\varphi=\arccos(4/5)$. ▲

При сведении геометрической задачи к алгебраической или тригонометрической приходится вводить несколько неизвестных. Не обязательно за неизвестные величины принимать те, которые

требуется найти. Как показывает решение задачи 2, иногда удобно ввести другие, относительно которых получаются более простые соотношения и, лишь найдя их, вычислять искомые. Кроме того, найденные решения алгебраических и тригонометрических уравнений и систем часто требуют геометрической проверки, как, например, в задаче 3.

Большинство геометрических задач на максимум и минимум также решаются с привлечением алгебры и тригонометрии. В этих случаях задачу сводят к исследованию на максимум и минимум некоторой алгебраической или тригонометрической функции. Заметим, что при этом исследование надо проводить на том множестве значений аргумента, на котором существует рассматриваемая геометрическая фигура.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB имеет длину c и образует с катетом AC угол α. Точка D расположена на гипотенузе AB и имеет наименьшую, по сравнению с другими точками отрезка AB, сумму квадратов расстояний до прямых AC и BC. Найти длину отрезка AD.

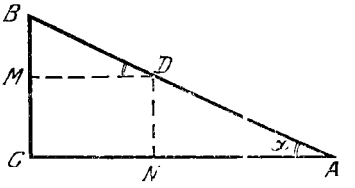


Рис. 182.

△ Пусть $DN \perp AC$ и $DM \perp BC$ (рис. 182). Обозначим $x = |AD|$, тогда $|BD| = c - x$ и

$$|DN| = x\sin\alpha, \quad |DM| = (c-x)\cos\alpha.$$

Сумму квадратов расстояний от точки D до прямых AC и BC обозначим f, имеем $f = x^2\sin^2\alpha + (c-x)^2\cos^2\alpha$. Требуется узнать, при каком значении x эта функция имеет наименьшее значение, если x заключено в пределах $0 \leqslant x \leqslant c$. Преобразуем функцию f к виду $f = x^2 + c^2\cos^2\alpha - 2cx\cos\alpha$. Производная этой функции равна $2x - 2c\cos\alpha$ и обращается в нуль при $x = c\cos\alpha$. Это значение x принадлежит отрезку $[0; c]$, слева от этой точки производная отрицательна, справа — положительна, следовательно, при $x = c\cos\alpha$ функция f имеет минимум.

Таким образом, $|AD| = c\cos\alpha$. ▲

Применение векторной алгебры. С помощью векторной алгебры некоторые задачи и теоремы планиметрии, требующие сложных геометрических рассуждений, сводятся к сравнительно простым вычислениям. Рассмотрим для примера следующую задачу.

Задача 5. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA расположены точки A_1, B_1 и C_1 так, что

$$\frac{|AA_1|}{|AB|} = \frac{|BB_1|}{|BC|} = \frac{|CC_1|}{|AC|}.$$

Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

△ Пусть $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$ (рис. 183). Если AM — медиана треугольника ABC, то $\overrightarrow{AM} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$. Медианы треугольника

пересекаются в одной точке, каждая медиана в этой точке делится в отношении 2 : 1, считая от вершины, поэтому если O — точка пересечения медиан треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}). \qquad (3)$$

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 184). Обозначим $m = |AA_1|/|AB|$, тогда $\overrightarrow{A_1C_1} = (1-m)\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = (1-m)\boldsymbol{a} + m(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. Если A_1M_1 — медиана треугольника $A_1B_1C_1$, то

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} + (1-3m)\boldsymbol{a}).$$

Точка O_1 пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на A_1M_1

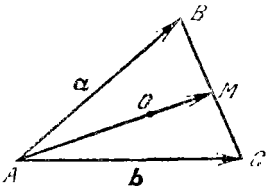


Рис. 183.

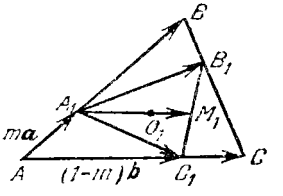


Рис. 184.

и $|A_1O_1| = \frac{2}{3}|A_1M_1|$, т. е. $|A_1O_1| = \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + (1-3m)\boldsymbol{a})$. Найдем вектор $\overrightarrow{AO_1}$:

$$\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1O} = m\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + (1-3m)\boldsymbol{a}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}). \qquad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO_1}$, т. е. точки O и O_1 совпадают. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Диагонали трапеции, пересекаясь в точке O, разбивают трапецию на 4 треугольника с вершиной в точке O. Доказать, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам трапеции, равны.

2. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB. Площадь образовавшегося при этом параллелограмма составляет 5/18 площади треугольника ABC. Найти, в каком отношении точка M делит сторону BC.

3. Точки M, N и P лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, причем $|AM|/|AB| = |BN|/|BC| = |CP|/|CA| = 1/3$. Прямые CM, AN и BP, пересекаясь, ограничивают треугольник, площадь которого равна S. Найти площадь треугольника ABC.

4. При повороте с центром в точке C на угол α ($\alpha < \pi/2$) треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C$. Точка B' является образом точки B и

лежит на стороне AB; точка A' — образ точки A. Найти углы треугольника ABC, если прямые AC и $A'B'$ перпендикулярны.

5. Доказать, что три высоты треугольника или три прямые, на которых лежат высоты, пересекаются в одной точке.

6. Продолжения высот треугольника ABC делят описанную около треугольника ABC окружность на дуги, длины которых относятся как $p:q:r$. Найти углы треугольника ABC.

7. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка AB, если $|BC| = a$.

8. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три конгруэнтные отрезка. Найти отношение длин сторон треугольника ABC.

9. Продолжения высот BM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найти радиус описанной окружности, если $|BC| = a$ и $|PQ| = \frac{6}{5}a$.

10. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.

11. В равнобедренном треугольнике ABC $(|AB| = |BC|)$ медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE. Определить величину угла ACB.

12. В треугольнике ABC величина угла при вершине A равна α. Найти длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины A, если $|AB| = c$ $|AC| = b$.

13. В треугольнике ABC величина угла при вершине B равна φ величина угла при вершине C равна 2φ. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Определить отношение $|AM| : |AB|$.

14. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает сторону AC в точке M, при этом $|MA| : |MC| = 3$. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает сторону AB в точке N, так что $|AN| : |NB| = 2$. Определить углы треугольника ABC.

15. Доказать, что если в треугольнике ABC длины сторон AB и BC различны, то биссектриса угла ABC лежит между медианой и высотой, проведенных из той же вершины.

16. В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2$. Доказать, что медианы AM и BN перпендикулярны.

17. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{2}$ см пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 3 см. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $|AB| = |AC|$. Найти длину отрезка AB.

18. В ромбе $ABCD$ угол BAD острый. Окружность, вписанная в этот ромб, касается сторон AB и CD соответственно в точках M и N, пересекает отрезок CM в точке P, а отрезок BN — в точке Q. Найти отношение $|BQ| : |QN|$, если $|CP| : |PM| = 9 : 16$.

19. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точку D, взята точка M, отличная от точек C и E. Прямая BM пересекает первую окружность в точке N. Найти длину отрезка MN, если $|CN| = a$, $DN| = b$.

20. Дан треугольник ABC. Биссектриса внешнего угла треугольника при вершине A пересекает прямую BC в точке M. Доказать, что $|MB| : |MC| = |AB| : |AC|$.

21. Дан треугольник ABC. Точка M лежит на прямой BC, при этом $|MB| : |MC| = |AB| : |AC|$. Доказать, что точка M лежит либо на биссектрисе угла A треугольника ABC, либо на биссектрисе внешнего угла при вершине A.

22. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен α. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB, DAC, DBC и ABC. Определить отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин его трех медиан меньше периметра треугольника, но больше трех четвертей периметра.

2. В равнобедренном треугольнике длина основания равна a, длина высоты, опущенной на основание, равна h. Найти расстояние от середины основания до боковой стороны.

3. Определить площадь трапеции, если известно, что при последовательном соединении середин ее сторон образуется квадрат, длина стороны которого равна a.

4. В трапеции длина основания равна $2a$, длины всех остальных сторон этой трапеции равны a. Найти расстояние от середины одной боковой стороны трапеции до другой боковой стороны.

5. Вычислить площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b.

6. Трапеция описана около окружности. Найти отношение длины средней линии трапеции к ее периметру.

7. В прямоугольном равнобедренном треугольнике через вершину прямого угла проведены две прямые, которые разбивают этот угол на три конгруэнтных угла. Найти длины отрезков, на которые эти прямые разобьют гипотенузу, если длина ее равна a.

8. Найти площадь треугольника ABC, вписанного в окружность, если вершины A и C отстоят от касательной, проведенной через вершину B, на расстояниях m и n и $|AC| = b$.

9. В треугольнике ABC проведена высота BD. Через точку D проведена прямая параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC в точке K. Найти отношение $|BK| : |KC|$, если площадь треугольника BDK составляет 3/16 площади треугольника ABC.

10. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) биссектриса AE пересекает высоту BD в точке O, причем $|OB| : |OD| = 3$. В каком отношении высота AF делит высоту BD?

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) высота AF пересекает высоту BD в точке O, причем $|BO| : |OD| = n$. В каком отношении биссектриса AE делит высоту BD?

12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, площадь которого равна 24 см^2, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ACD, а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника BDA. Найти площадь треугольника ABC.

13. В параллелограмме проведены биссектрисы его внутренних углов. Площадь полученного от их пересечения четырехугольника равна 1/4 площади параллелограмма. Найти отношение длин сторон параллелограмма.

14. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB и OBN соответственно равны S_1, S_2, S_3.

15. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O. Отношение площади треугольника DOA к площади треугольника BOF равно 3/8. Найти отношение $|AC| : |AB|$.

16. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две части, площади которых относятся как $m : n$. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если длины оснований трапеции равны a и b.

17. В равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b, вписана окружность. Определить длину диагонали трапеции.

18. Доказать, что во всякой трапеции сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин непараллельных сторон и удвоенного произведения длин оснований.

19. Найти длину основания равнобедренного треугольника, если длина высоты, опущенной на основание, равна h и радиус вписанной окружности равен r.

20. Дан треугольник ABC. Точки M, N и P лежат на продолжениях стороны AB за точку B, стороны BC за точку C и стороны CA за точку A, при этом $|BM| = m|AB|$; $|CN| = n|BC|$; $|AP| = p|AC|$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

21. Точки M и N, D и E, K и L лежат соответственно на сторонах AB, AC и BC треугольника ABC, при этом $|AM| = |MN| = |NB|$; $|BK| = |KL| = |LC|$; $|AD| = |DE| = |EC|$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых ML, NK, BD, BE, если площадь треугольника ABC равна S.

22. Точки M, N и P лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, при этом $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = |CP| : |PA| = m : n$. Определить отношение площадей треугольников MNP и ABC.

23. Из вершины A треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов, пересекающие прямую BC в точках D и E соответственно. Определить отношение $|AB| : |AC|$, если $|BD| : |BE| = 3/5$.

24. Из вершины A треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов, пересекающие прямую BC в точках D и E соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ADE, если $|BC| = a$ и $|AB| : |AC| = 2/3$.

25. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найти углы трапеции.

26. Окружность радиуса R, проведенная через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = \pi/2$), пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N так, что $|AM| : |AD| = |CN| : |CD| = 1 : 3$. Найти площадь трапеции.

27. Из точки M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Из точки A проведена прямая, перпендикулярная диаметру BD и пересекающая его в точке N. Доказать, что прямая MD делит отрезок AN пополам.

28. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b ($a < b$). Найти радиус окружности, проходящей через середину меньшего катета и касающейся гипотенузы в ее середине.

29. В окружности даны две хорды: $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

30. Две касательные, проведенные из одной точки к окружности радиуса R, образуют угол 60°. Найти радиус окружности, которая вписана в угол, образованный этими касательными, и касается данной окружности.

31. В полуокружность радиуса R вписан квадрат так, что одна его сторона лежит на диаметре и две вершины — на окружности. Найти длину стороны квадрата.

32. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса R в точках B и C. Треугольник ABC — правильный. Найти его площадь.

33. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Окружность пересекает основание AC в точке M и боковую сторону BC в точке N. Найти длину отрезков MN и NC, если $|AC| = a$ и $|AB| = b$.

34. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает боковую сторону AC в точке D. Найти длину боковой стороны AB, если $|AD| / |DC| = k$.

35. В треугольнике ABC длина высоты AD равна $2\sqrt{2}$ см, длина высоты BE равна 3 см. Высота CK в точке пересечения высот делится в отношении 5 : 1, считая от вершины C. Найти площадь треугольника ABC.

36. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На высоте BD, как на диаметре, построена окружность. Через точки A и C проведены к этой окружности касательные, которые пересекаются в точке O. Найти отношение $|AB| : |AC|$, если $|AO| : |AC| = 3 : 2$ и $BD < AC$.

37. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD, как на диаметре, построена окружность. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке M и пересекающая прямую BD в точке O. Найти отношение $|AB| : |AC|$, если $|OM| : |AC| = 2$ и $|AC| < |BD|$.

38. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает ее в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность в отношении $m : n$ ($m < n$). Найти, в каком отношении вторая окружность делит первую.

39. В треугольнике ABC угол B прямой, медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Определить величину угла C.

40. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C}=\pi/2$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти площадь треугольника ABC.

41. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, соответственно равны m и n. Найти катеты AC и BC.

42. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $|AC|=3$ см и $|BC|=4$ см. Через точку C проведена прямая, лежащая вне треугольника и образующая с катетами углы, равные 45°. Найти радиус окружности, проходящей через точки A, B и касающейся этой прямой.

43. Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность с центром на катете AC касается гипотенузы AB и пересекает катет BC в точке P так, что $|BP|:|PC|=2:3$. Найти отношение радиуса окружности к длине катета BC, если $|AC|:|BC|=4:5$.

44. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC длины сторон которого равны a, b, c. Доказать, что $|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

45. В окружность вписан треугольник ABC, через точку O пересечения его медиан проведены хорды AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}+\frac{|BO|}{|B_1O|}+\frac{|CO|}{|C_1O|}=3.$$

46. Две окружности радиусов R и r ($R>r$) имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка BC, если длина хорды AB равна a.

47. Около треугольника ABC описана окружность. Диаметр AD пересекает сторону BC в точке E, при этом $|AE|=|AC|$ и $|BE|/|CE|=3/2$. Найти отношение $|DE|/|AE|$.

48. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) медианы AD и CE пересекаются в точке O. Отношение радиуса окружности, вписанной в треугольник AOC, к радиусу окружности, вписанной в четырехугольник $CDBE$, равно $2/3$. Найти отношение $|AC|/|BC|$.

49. Две окружности радиусов 5 см и 3 см внутренне касаются. Хорд большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найти длину этой хорды.

50. Две окружности радиусов 5 см и 4 см касаются внешне. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A, пересекает большую окружность в точках B и C так, что $|AB|=|BC|$. Найти длину отрезка AC.

51. Две окружности радиусов $\sqrt{2}$ см и 1 см пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 2 см. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке B и делится в этой точке пополам. Найти длину этой хорды.

52. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает ее в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей, если $|AB|:|BC|:|CD|=3:7:2$.

53. В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC перпендикулярна основаниям AD и BC. Точка E — середина стороны CD. Найти отношение $|AD| : |BC|$, если $|AE| = 2|AB|$ и прямая AE перпендикулярна прямой CD.

54. Треугольник ABC — правильный. На продолжении стороны AC за точку A взята точка M, и около треугольников ABM и MBC описаны окружности. Точка A делит дугу MAB в отношении $\overset{\smile}{MA} : \overset{\smile}{AB} = n$. Найти, в каком отношении точка C делит дугу MCB.

55. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.

56. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке F. Найти площадь трапеции, если $|AF| = m$, $|FB| = n$, а длина меньшего основания трапеции BC равна b.

57. Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность K, центр которой лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность K пересекает продолжение стороны BA (за точку A) в точке M. Найти угол BCA, если $|MA| : |AB| = 2 : 5$, а $\widehat{ABC} = \arcsin(3/5)$.

58. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, а основание AD — в точке N. Отрезки MN и AC пересекаются в точке P так, что $|NP| : |PM| = 2$. Найти отношение $|AD| : |BC|$.

59. В окружность вписана трапеция $ABCD$ (AD — большее основание). Из вершины C проведен перпендикуляр к AD, пересекающий окружность в точке E. Отношение длины дуги BC (не содержащей точки D) к длине дуги CDE равно $1/2$. Радиус окружности равен высоте трапеции. Найти отношение $|AB| : |BC|$.

60. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $|MN| = |BC|$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Определить углы треугольника ABC.

61. В равнобедренной трапеции $ABCD$ величина угла при основании AD равна α, длина боковой стороны AB равна b. Окружность, касающаяся сторон AB и AD и проходящая через вершину C, пересекает стороны BC и CD в точках M и N соответственно. Определить $|BM|$, если $CN : ND = 3$.

62. В равнобедренной трапеции $ABCD$ величина угла при основании AD равна $\arcsin(24/25)$. Окружность радиуса R касается основания AD, боковой стороны AB и проходит через вершину C. Она отсекает на сторонах BC и CD конгруэнтные отрезки MC и NC соответственно. Найти длину отрезка BM.

63. Площадь трапеции $ABCD$ равна s, отношение оснований $|AD| : |BC| = 2$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен диагонали BD, пересекает диагональ AC, а отрезок AM параллелен отрезку CN. Определить площадь четырехугольника $AMND$, если $|CN| : |AM| = 3$, $|BD| : |MN| = 6$ (найти все решения).

64. В ромб $ABCD$ вписана окружность. Прямая, касающаяся этой окружности в точке P, пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AD соот-

ветственно в точках N, Q и M так, что $|MN|:|NP|:|PQ|=7:1:2$. Определить углы ромба.

65. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, и угол между ними равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM, BCM, CDM, DAM. Определить отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $O_1O_2O_3O_4$.

66. В четырехугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α. Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Определить отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

67. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен α. Пусть O — произвольная точка внутри параллелограмма, O_1, O_2, O_3, O_4 — точки, симметричные точке O относительно прямых AB, BC, CD, AD соответственно. Определить отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма.

68. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC величина угла при основании AC равна α, а длина боковой стороны равна a. Точка M расположена на отрезке BC и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BC сумму квадратов расстояний до прямых AC и AB. Найти длину отрезка MC.

69. В трапеции длина меньшего основания равна длинам боковых сторон. При каком угле при большем основании трапеция будет иметь наибольшую площадь?

70. В равнобедренном треугольнике ABC величина угла при основании AC равна α, длина боковой стороны равна a. Через точку M, лежащую на боковой стороне, проведены две прямые, параллельные сторонам треугольника, отрезающие от треугольника ABC параллелограмм наибольшей возможной площади. Найти площадь этого параллелограмма.

71. Дана окружность радиуса R с диаметром AD. Окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точке B, а диаметр AD — в точке C. При каком значении радиуса второй окружности длина отрезка BC будет наибольшей?

72. Найти углы треугольника, в котором высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре конгруэнтные угла.

Глава XIV

МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 1. Множества точек, обладающих заданным свойством

В геометрии часто возникает потребность выделить из всех точек плоскости или пространства те точки, которые обладают некоторым специальным свойством. Все точки плоскости или пространства разбиваются при этом на два множества: одно множество включает в себя *те и только те точки*, которые обладают указанным свойством; другое множество состоит из всех остальных точек, и следовательно, ни одна точка этого второго множества не обладает рассматриваемым свойством. Каждая задача, связанная с нахождением того или иного множества точек, обладающих некоторым свойством, неизбежно требует доказательства двух утверждений, двух теорем: прямой и противоположной. Утверждая, например, что множеством точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек A и B, является прямая l, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину, необходимо доказать не только то, что каждая точка прямой l равноудалена от точек A и B, но и то, что любая точка, не принадлежащая прямой l, не находится на одинаковом расстоянии от заданных точек. Непонимание этого простого обстоятельства с неизбежностью приводит к ошибкам: к логической неполноценности решения, а в ряде случаев — к неверному результату.

Замечание. Часто вместо доказательства прямой теоремы $(\forall x)\,(A(x) \Rightarrow B(x))$ и противоположной $(\forall x)\,\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ доказывают прямую и обратную $(\forall x)\,B(x) \Rightarrow A(x)$. Законность такого способа действий вытекает из того, что из истинности обратной теоремы $(\forall x)\,B(x) \Rightarrow A(x)$ следует истинность противоположной $(\forall x)\,\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ (см. § 3 главы II).

В задачах на отыскание множества точек, обладающих заданным свойством, обычно получаются точки, прямые, отрезки, окружности или их дуги, многоугольники, круги, плоскости, сферы. Формулировку задачи: «найти множество точек, обладающих заданным свойством» следует понимать в таком смысле: перечислить точки этого множества, если их конечное число, указать, каким прямым, отрезкам, окружностям, дугам окружностей, плоскостям, сферам принадлежат точки заданного множества.

Полезно знать множества точек на плоскости и в пространстве, обладающие простейшими и наиболее часто встречающимися свойствами. Перечислим некоторые из таких множеств.

На плоскости:

а) Множеством точек, расстояние от которых до данной точки O равно R, является *окружность* радиуса R с центром в точке O (рис. 185).

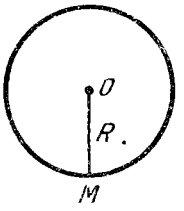


Рис. 185.

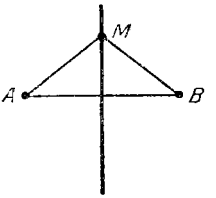


Рис. 186.

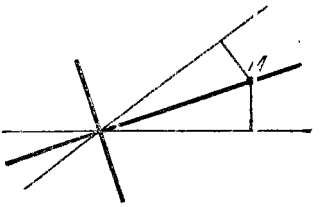


Рис. 187.

б) Множеством точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, является *прямая*, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину (рис. 186).

в) Множеством точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, является *пара взаимно перпендикулярных прямых*, делящих пополам углы между данными прямыми (рис. 187).

г) Множеством точек, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой, является *точка* — центр окружности, проходящей через данные точки (рис. 188).

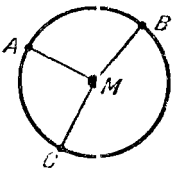


Рис. 188.

д) Множеством точек, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, т. е. множеством точек M, для которых $\widehat{AMB} = \pi/2$, является *окружность* с диаметром AB без точек A и B (рис. 189).

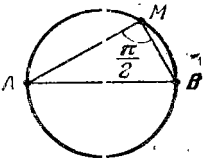


Рис. 189.

В пространстве:

а) Множеством точек, расстояние от которых до данной точки O равно R, является *сфера* радиуса R с центром в точке O.

б) Множеством точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, является *плоскость*, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

в) Множеством точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, является *пара взаимно перпендикулярных плоскостей*, делящих пополам двугранные углы между данными плоскостями.

г) Множеством точек, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой, является *прямая*, проходящая

через центр окружности, проведенной через данные точки, и перпендикулярная плоскости, содержащей данные точки.

д) Множеством точек, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, т. е. множеством точек M, для которых $\widehat{AMB} = \pi/2$, является *сфера* с диаметром AB без точек A и B.

Рассмотрим теперь несколько задач.

Задача 1. Найти множество точек, являющихся серединами хорд, проведенных из одной точки данной окружности.

△ Пусть точка O — центр данной окружности, точка A — точка окружности (рис. 190). Докажем, что множеством середин всех хорд окружности, проходящих через точку A, является окружность с диаметром AO, за исключением точки A. Обозначим множество всех точек окружности с диаметром AO, кроме точки A, буквой Г.

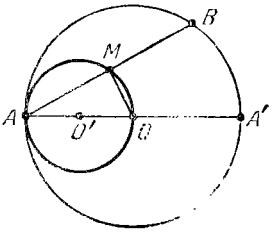


Рис. 190.

Пусть точка M обладает заданным свойством, т. е. является серединой некоторой хорды, исходящей из точки A. Возможны два случая. Если точка M — середина диаметра AA', то она совпадает с точкой O и, следовательно, принадлежит множеству Г. Если точка M — середина некоторой хорды AB, не совпадающей с диаметром AA', то соединим ее с точкой O и рассмотрим угол AMO. Так как точка M — середина хорды AB, то $[AB] \perp [OM]$, т. е. угол AMO прямой, и поэтому точка M принадлежит окружности с диаметром AO (с. 349, пункт д)).

Докажем обратное утверждение: если точка $M \in \Gamma$, то она является серединой некоторой хорды, исходящей из точки A. Опять рассмотрим два случая. Если точка M совпадает с точкой O, то M — середина хорды AA'. Если $M \neq O$, то соединим точки M и O. Так как $M \in \Gamma$, то угол AMO прямой и, следовательно, точка M — середина хорды AB. ▲

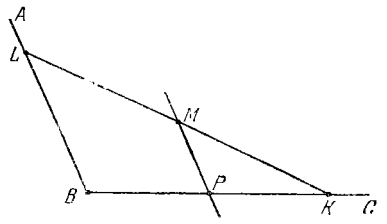


Рис. 191.

Задача 2. Найти множество точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на разных сторонах данного угла (данный угол меньше развернутого).

△ Очевидно, что никакая точка плоскости, не принадлежащая данному углу ABC (рис. 191), не может быть серединой отрезка, концы которого лежат на разных сторонах угла. Столь же очевидно, что в искомое множество не могут входить точки, расположенные на сторонах данного угла. С другой стороны, каждая точка, лежащая внутри угла, является серединой некоторого отрезка, концы которого расположены на сторонах угла. Докажем

это. Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри угла. Проведем через нее прямую параллельно стороне BA угла ABC, и пусть P — точка пересечения этой прямой со стороной угла BC. Отложим на стороне BC отрезок PK, конгруэнтный отрезку BP. Через точки K и M проведем прямую. Отрезок PM является средней линией треугольника KBL, т. е. точка M — середина построенного отрезка KL. ▲

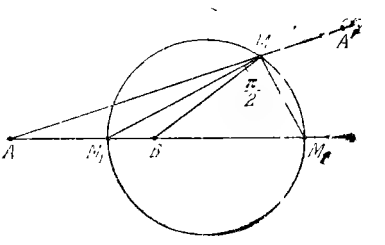


Рис. 192.

Задача 3. На плоскости даны две точки A и B. Найти множество точек M этой плоскости таких, что $|AM|/|MB|=2$.

△ Предположим сначала, что точка M не лежит на прямой AB. Пусть M обладает заданным свойством; это означает, что $|AM|=2|MB|$. Продолжим отрезок AM (рис. 192) и проведем биссектрисы углов AMB и BMA'.

Пусть M_1 — точка пересечения биссектрисы угла AMB с отрезком AB, а M_2 — точка пересечения биссектрисы угла BMA' с продолжением отрезка AB. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (§ 1 гл. XIII) имеем

$$\frac{|AM_1|}{|M_1B|}=\frac{|AM|}{|MB|}=2$$

и по свойству биссектрисы внешнего угла треугольника (задача 20 раздела I главы XIII) можем записать

$$\frac{|AM_2|}{|M_2B|}=\frac{|AM|}{|MB|}=2.$$

Отсюда следует, что расположение точек M_1 и M_2 на прямой AB не зависит от того, где находится точка M. Если заметить теперь, что угол между биссектрисами MM_1 и MM_2 прямой, то станет ясно, что если точка M принадлежит искомому множеству, то отрезок M_1M_2 виден из нее под прямым углом. А это означает (с. 349, пункт д)), что точка M находится на окружности, построенной на отрезке M_1M_2, как на диаметре.

Проведенное рассуждение теряет смысл в том случае, когда точка M лежит на прямой AB (в этом случае нельзя, например, рассматривать угол AMB и его биссектрису). Но на прямой AB найти точки M, удовлетворяющие условию задачи, легко. Это, очевидно, уже построенные нами точки M_1 и M_2. Точка M_1 делит отрезок AB (считая от точки A) в отношении $2:1$. Точка M_2 удалена от точки A на расстояние вдвое большее, чем от точки B.

Докажем теперь обратное утверждение: каждая точка M окружности, построенной на отрезке M_1M_2, как на диаметре, обладает свойством $|AM|=2|BM|$, т. е. принадлежит искомому множеству. Концы диаметра M_1M_2, т. е. точки M_1 и M_2, очевидно,

обладают нужным свойством. Пусть M — любая другая точка окружности с диаметром M_1M_2 (рис. 193). Проведем через точку B прямую, параллельную прямой AM и пусть K и L — точки пересечения этой прямой с прямыми MM_2 и MM_1. Из подобия треугольников AMM_2 и BKM_2 получаем

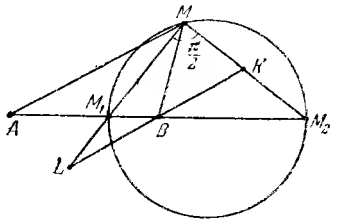


Рис. 193.

$$\frac{|AM|}{|BK|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = 2.$$

Из подобия треугольников AMM_1 и BLM_1 имеем

$$\frac{|AM|}{|BL|} = \frac{|AM_1|}{|BM_1|} = 2.$$

Из полученных равенств следует, что $|BK| = |AM|/2$ и $|BL| = |AM|/2$, т. е. $|BK| = |BL|$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике KML отрезок BM является медианой и, следовательно, $|BM| = |BK|$. Учитывая, что $|AM|/|BK| = 2$, получаем $|AM|/|BM| = 2$.

Итак, каждая точка окружности с диаметром M_1M_2 обладает заданным свойством. ▲

Задача 4. Найти множество точек, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки пространства на прямые, лежащие в заданной плоскости и пересекающиеся в одной точке.

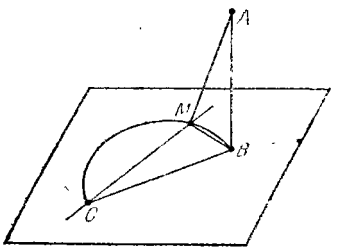


Рис. 194.

△ Обозначим через A данную точку пространства, через B — ее проекцию на данную плоскость, через C — точку пересечения прямых. Рассмотрим сначала случай, когда A, B, C — различные точки пространства (рис. 194).

Пусть точка M принадлежит искомому множеству. Это означает, что $[AM] \perp (CM)$, но отсюда следует, что и проекция MB наклонной AM на данную плоскость перпендикулярна прямой CM, т. е. угол CMB — прямой. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром BC.

Докажем обратное утверждение. Пусть M — произвольная точка окружности с диаметром BC, не совпадающая с концами диаметра — с точками B и C. Тогда угол CMB опирается на диаметр. Следовательно, этот угол прямой, поэтому $[BM] \perp (CM)$. Но если проекция BM наклонной AM перпендикулярна прямой CM, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой, т. е. $[AM] \perp (CM)$. Значит, действительно, точка M обладает заданным свойством (является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на некоторую прямую, проходящую через точку C и лежащую в плоскости). Концы диаметра BC также обладают

заданным свойством. В самом деле, точка B является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CB. Точка C является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую, проходящую через точку C перпендикулярно отрезку CB.

Отметим теперь два частных случая расположения точек A, B, C.

Первый случай: точка A принадлежит заданной плоскости. В этом случае точка A совпадает с точкой B. Легко видеть, что и в этом случае, в качестве множества оснований перпендикуляров, опущенных из точки $A=B$ на прямые, проходящие через точку C, получается окружность с диаметром CB. Но доказательство в этом случае упрощается, так как не придется ссылаться на теорему о трех перпендикулярах и ей обратную. Второй случай: точка C, через которую проводятся прямые, совпадает с точкой B — проекцией точки A на заданную плоскость. В этом случае очевидно, что искомым множеством является точка, а именно, точка $C=B$. ▲

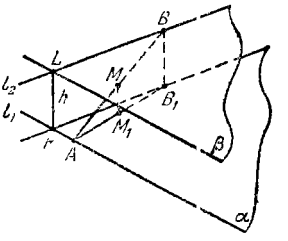


Рис. 195.

Задача 5. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2. Найти множество точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат соответственно на прямых l_1 и l_2.

△ Обозначим через α и β параллельные плоскости, содержащие соответственно прямые l_1 и l_2, длину общего перпендикуляра KL обозначим через h (рис. 195). Пусть точка M принадлежит искомому множеству точек, это означает, что точка M является серединой некоторого отрезка AB, концы которого — точки A и B — лежат соответственно на прямых l_1 и l_2.

Пусть точки B_1 и M_1 — проекции соответственно точек B и M на плоскость α. Отрезок MM_1 является средней линией треугольника ABB_1. Так как $|BB_1|=|KL|=h$, то $|MM_1|=h/2$. Таким образом, если точка принадлежит искомому множеству, то она находится на одинаковом расстоянии от плоскостей α и β, т. е. лежит в плоскости, перпендикулярной к отрезку KL и проходящей через его середину.

Докажем обратное утверждение: каждая точка M плоскости, перпендикулярной отрезку KL и проходящей через его середину, является серединой некоторого отрезка, концы которого лежат на прямых l_1 и l_2. Проектируем точку M на плоскость α получаем точку M_1. Через точку M_1 проводим отрезок AB_1 так чтобы концы отрезка — точки A и B_1 — лежали на разных сторонах угла B_1KA и точка M_1 делила бы отрезок AB_1 пополам. Как это сделать, показано в решении задачи 2. Проектируем теперь точку B_1 на плоскость β, получаем точку B и соединяем ее с точкой A. Отрезок AB будет содержать точку M. Предположив противное, легко получим, что точка M не находится на одинаковом

расстоянии от плоскостей α и β, что противоречит исходному предположению. Из подобия треугольников AM_1M и AB_1B вытекает, что $|AM| = |MB|$. ▲

§ 2. Применение метода координат

Для нахождения множества точек плоскости, обладающих заданным свойством, во многих случаях можно использовать метод координат. В простейших задачах в качестве искомых множеств получаются прямые, окружности, отрезки, дуги окружностей. Применяя метод координат, можно получить их уравнения. Исследуя эти уравнения, можно узнать, что представляют собой сами множества.

Применение метода заключается в следующем. На плоскости выбираем некоторым образом систему координат и пытаемся, прежде всего, установить, какому уравнению удовлетворяют координаты точки $M(x; y)$, если эта точка обладает заданным свойством. Затем обязательно проверяем, будет ли каждая точка $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют найденному уравнению, обладать заданным свойством. Проделав все это, мы тем самым получим уравнение, которому удовлетворяют координаты *тех и только тех* точек плоскости, которые принадлежат искомому множеству. По найденному уравнению определяем, что представляет собой искомое множество.

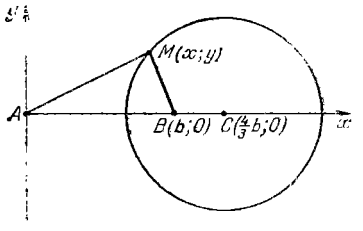


Рис. 196.

Задача 1. Решить методом координат задачу 3 из § 1.

△ Выберем систему координат. Начало координат поместим в точку A (рис. 196), за ось абсцисс возьмем прямую (AB), и пусть точка B в нашей системе имеет координаты $(b; 0)$, где b — длина отрезка AB.

Пусть точка $M(x; y)$ обладает заданным свойством, т. е.

$$|AM| : |MB| = 2. \tag{1}$$

Так как $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $|MB| = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$, то координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

Преобразуем его следующим образом:

$$x^2 + y^2 = 4(x-b)^2 + 4y^2,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}bx + y^2 + \frac{4}{3}b^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{4}{3}b\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}b^2. \tag{2}$$

Мы получили уравнение окружности радиуса $R=\frac{2}{3}b$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}b;\ 0\right)$. Таким образом, доказано, что если точка $M(x;\ y)$ обладает заданным свойством (1), то она лежит на окружности (2).

Докажем обратное утверждение. Пусть точка $M(x;\ y)$ лежит на полученной окружности. Это означает, что ее координаты удовлетворяют уравнению (2), которое равносильно (как это видно из уже проделанных выкладок) условию (1). Следовательно, точка $M(x;\ y)$ обладает заданным свойством.

Итак, искомое множество — окружность радиуса $R=\frac{2}{3}b$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}b;\ 0\right)$. ▲

Задача 2. Концы отрезка длины a скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

△ Поместим начало координат в вершину угла, оси направим по сторонам угла (рис. 197).

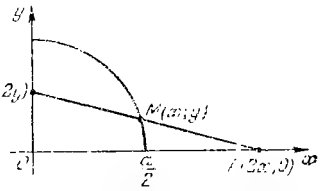


Рис. 197.

Пусть точка $M(x;\ y)$ обладает заданным свойством, т. е. является серединой отрезка длины a, концы которого принадлежат сторонам угла. Очевидно, что точка $M(x;\ y)$ может находиться только в первом квадранте координатной плоскости, поэтому $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$. Обозначим концы отрезка через A и B. Легко видеть, что если $M(x;\ y)$ — середина отрезка AB, то точки A и B имеют координаты: $A(2x;\ 0)$, $B(0;\ 2y)$. По теореме Пифагора из треугольника AOB получаем

$$|AB|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}.$$

Но по условию задачи $|AB|=a$ и, следовательно, координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$4x^2+4y^2=a^2.$$

Таким образом, доказано, что точка $M(x;\ y)$ принадлежит дуге окружности

$$x^2+y^2=(a/2)^2,$$

расположенной в первом квадранте: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Докажем обратное утверждение. Пусть точка $M(x;\ y)$ принадлежит дуге окружности радиуса $R=a/2$ с центром в начале координат, расположенной в первом квадранте. Соединим точку $M(x;\ y)$ с точкой $A(2x;\ 0)$. Продолжим отрезок AM до пересечения с осью ординат в точке B. Абсцисса точки B, очевидно равна нулю; ордината равна $2y$. Следовательно, точка $M(x;\ y)$ — середина

отрезка AB. Концы этого отрезка принадлежат сторонам угла. Покажем, что длина этого отрезка равна a. Найдем его длину по теореме Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2},$$

но по предположению точка $M(x; y)$ лежит на дуге окружности, уравнение которой $x^2 + y^2 = (a/2)^2$, и поэтому $|AB| = a$. Таким образом, доказано, что если точка M принадлежит дуге окружности радиуса $R = a/2$ с центром в начале координат, расположенной в первом квадранте, то она является серединой некоторого отрезка длины a, концы которого принадлежат сторонам данного прямого угла. ▲

§ 3. Задачи на построение

В задачах на построение требуется построить некоторую геометрическую фигуру (точку, прямую, окружность, треугольник) с помощью тех или иных чертежных инструментов: линейки, циркуля, угольника и других. Чаще всего встречаются задачи, в которых разрешается использовать два инструмента: линейку и циркуль. В этом параграфе рассматриваются только такие задачи.

Под линейкой подразумевается инструмент, с помощью которого можно построить произвольную прямую, в частности прямую, проходящую через две данные точки. Линейка считается безмасштабной и односторонней. Безмасштабность означает, что на линейке отсутствуют деления, и поэтому с ее помощью нельзя откладывать отрезки. Односторонность линейки означает, что нельзя использовать одновременно оба ее края, т. е. что с помощью такой линейки нельзя, например, провести две параллельные прямые. С помощью циркуля можно на данной прямой отложить любой данный отрезок, можно провести произвольную окружность или окружность, радиус которой равен длине заданного отрезка. Не следует думать, что главное в задачах на построение — фактическое выполнение построения с использованием названных инструментов. Главное заключается в том, чтобы найти и описать последовательность действий, ведущих к построению нужной фигуры; доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи; выяснить, всегда ли построение можно осуществить; сколько существует решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается, усложняется или делается невозможным.

Напомним несколько простейших построений, которые будут использоваться в дальнейшем в качестве отдельных составных шагов при решении более сложных задач.

Построение 1. Построить прямую, перпендикулярную к данному отрезку AB и проходящую через его середину.

△ Проводим окружности радиуса $r > |AB|/2$ с центрами в точках A и B (рис. 198). Получаем точки C и C_1 — точки пере-

сечения окружностей. Через C и C_1 проводим прямую, которая является искомой. ▲

Замечание. Построение 1 используется также и для деления отрезка пополам. Точка O — точка пересечения отрезка AB с прямой CC_1 — является серединой отрезка AB.

Построение 2. Построить точку, симметричную данной точке M относительно данной прямой l $(M \notin l)$.

△ Проведем окружность с центром M и радиусом, бо́льшим расстояния от M до l (рис. 199). Из точек A и B пересечения

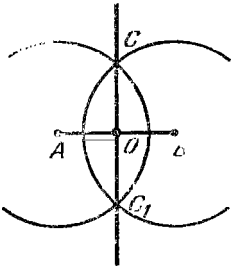


Рис. 198.

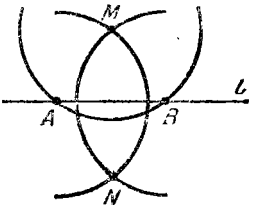


Рис. 199.

окружности с прямой l, как из центров, проводим окружности радиуса $r = |AM|$. Точка N пересечения этих окружностей является искомой. ▲

Построение 3. Построить перпендикуляр к данной прямой l, проходящий через данную точку M.

△ Возможны два случая: а) $M \notin l$, б) $M \in l$. В первом случае построим точку N, симметричную точке M относительно прямой l (построение 2). Проведем через M и N прямую. Прямая MN является искомой.

Во втором случае проводим произвольную окружность с центром в точке M. Отмечаем точки A и B пересечения окружности с прямой l. Проводим две окружности с центрами в точках A и B, радиус которых $r = |AB|$. Искомая прямая проходит через точки пересечения этих окружностей. ▲

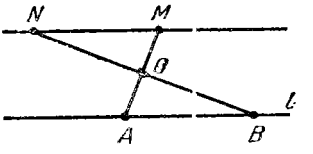


Рис. 200.

Построение 4. Построить прямую, проходящую через данную точку M и параллельную данной прямой l $(M \notin l)$.

△ Выбираем на прямой l две точки A и B (рис. 200). Строим точку O — середину отрезка AM (построение 1), а затем точку N — точку, симметричную точке B относительно центра O. Прямая MN — искомая. ▲

Построение 5. Даны два отрезка, длины которых равны a и b. Построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{ab}$.

△ Проведем произвольную прямую, выберем на ней некоторую точку A и отложим от нее на этой прямой отрезок AN, длина которого равна a (рис. 201). Затем от точки N на той же прямой отложим отрезок NB, длина которого равна b. Находим середину O отрезка AB (построение 1). Проводим окружность радиуса $r = |OA|$ с центром в точке O. Строим прямую, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через точку N (построение 3). Отмечаем одну из точек (точку C) пересечения прямой и окружности. Отрезок CN — искомый, так как

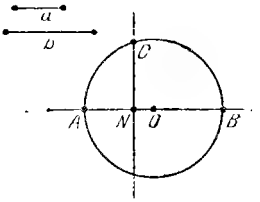


Рис. 201.

$$|CN| = \sqrt{|AN||NB|} = \sqrt{ab}.$$ ▲

Построение 6. Построить окружность, проходящую через три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой.

△ Проводим прямую l, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину (построение 1). Проводим прямую p, перпендикулярную отрезку AC и проходящую через его середину. Точка $O = l \cap p$ есть центр искомой окружности. Проводим окружность с центром в точке O радиуса $R = |OA|$. Эта окружность — искомая. ▲

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

△ Пусть A и B — данные точки, l — данная прямая. Очевидно, что задача не имеет решения, если точки A и B расположены по разные стороны от прямой l. Столь же очевидно, что нет решения и в том случае, когда обе точки лежат на прямой l.

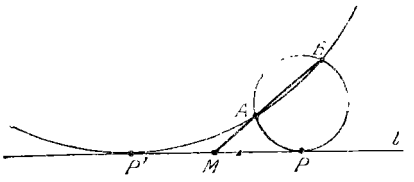


Рис. 202.

Пусть точки A и B находятся по одну сторону от прямой l. Предположим, что задача решена, т. е. искомая окружность построена. Обозначим через P точку касания окружности и прямой l, через M — точку пересечения прямых (AB) и l (рис. 202). По теореме о касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности (глава XIII § 3), будем иметь

$$|MP|^2 = |MB||MA| \quad \text{или} \quad |MP| = \sqrt{|MB||MA|}.$$

Теперь становится понятно, как провести построение. Проводим прямую AB. Отмечаем точку $M = (AB) \cap l$. По известным отрезкам MA и MB строим отрезок, длина которого равна $\sqrt{|MB||MA|}$ (построение 5). Откладываем этот отрезок на прямой l от точки M в обе стороны. Получаем точки P и P'. Проводим окружности через точки A, B, P и через точки A, B, P' (построение 6). Задача имеет два решения.

Легко видеть, что описанное построение не возможно в двух случаях:

а) прямая AB параллельна прямой l,

б) одна из данных точек лежит на прямой l.

Оказывается, что и в этих частных случаях задача имеет решение.

В случае а) (рис. 203) проводим прямую p, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину (построение 1). Через точку $P=p\cap l$ и точки A и B проводим искомую окружность (построение 6). Задача имеет одно решение.

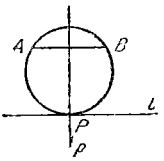


Рис. 203.

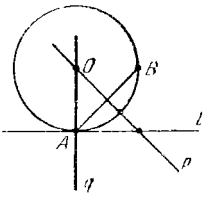


Рис. 204.

В случае б) (рис. 204) проводим прямую p, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину. Затем через точку A проводим прямую q, перпендикулярную прямой l (построение 3). Точка $O=p\cap q$ является центром искомой окружности. Задача имеет одно решение. ▲

Одним из методов решения задач на построение является метод множеств, обладающих заданным свойством. Этот метод особенно удобен, когда требуется построить точку (или точки), удовлетворяющую нескольким условиям, или когда задача сводится к такому построению. Проиллюстрируем этот метод на следующей задаче.

Задача 2. Построить окружность данного радиуса r, проходящую через две данные точки.

△ Задача сводится к построению точки — центра окружности. Отбросим условие о том, что радиус окружности равен r. Пусть окружность имеет произвольный радиус, но проходит через две заданные точки A и B. Тогда множество центров всех таких окружностей будет представлять собой прямую, перпендикулярную хорде AB и проходящую через середину отрезка AB. Но будем теперь принимать во внимание требование о прохождении окружности через точку B. Пусть окружность проходит только через точку A и имеет данный радиус r. Центры всех таких окружностей лежат, очевидно, на окружности радиуса r с центром в точке A. Таким образом, центр искомой окружности, во-первых, лежит на прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину, и, во-вторых, принадлежит окружности радиуса r с центром в точке A, т. е. находится на пересечении прямой и окружности (на рис. 205 они показаны пунктиром). Но прямая

и окружность могут не пересекаться (рис. 205, *а*), могут иметь одну общую точку (рис. 205, *б*), могут иметь две общие точки (рис. 205, *в*).

Теперь можно сформулировать окончательный результат:

а) если $r < \frac{1}{2}|AB|$, построение невозможно, задача не имеет решений;

б) если $r = \frac{1}{2}|AB|$, соединяем точки A и B, делим отрезок AB пополам, проводим окружность радиуса r с центром в середине отрезка AB; задача имеет одно решение;

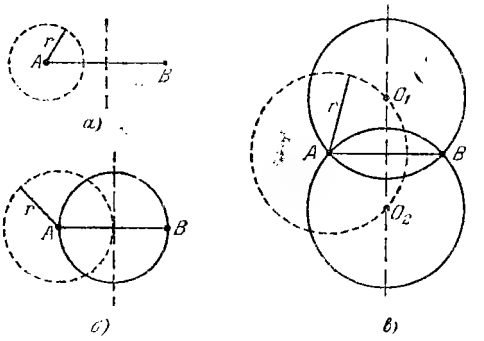


Рис. 205.

в) если $r > \frac{1}{2}|AB|$, соединяем точки A и B, строим прямую, перпендикулярную к отрезку AB в его середине, радиусом r проводим окружность с центром в точке A; получаем две точки O_1 и O_2 пересечения построенных прямой и окружности; проводим две искомые окружности радиуса r с центрами в точках O_1 и O_2; задача имеет два решения. ▲

Другим распространенным методом решения задач на построение является *метод подобия*. Во многих задачах часто бывает удобнее сначала построить фигуру, подобную искомой. Для этого часть требований, предъявляемых к фигуре, отбрасывается, так что остающимся условиям удовлетворяет бесчисленное множество фигур, подобных искомой. Из этого множества подобных фигур выделяется затем та фигура, которая удовлетворяет всем требованиям задачи. В этом и заключается идея метода.

Задача 3. Дан острый угол MON и внутри него точка A. Построить треугольник, одна вершина которого находится в точке A, а две другие B и C — на сторонах OM и ON данного угла, причем $[BC] \perp [OM)$ и $|AC| = |BC|$.

△ Проведем луч OA (рис. 206). Ослабим условия задачи, не будем требовать, чтобы вершина треугольника находилась в точке A, потребуем лишь, чтобы она лежала на луче OA.

В этой ослабленной формулировке задача легко решается. Возьмем на луче ON произвольную точку D и опустим из нее перпендикуляр DE на прямую OM, затем из точки D опишем окружность радиуса $R=|DE|$, которая пересечет луч OA в двух точках K и L. Соединив каждую из этих точек с точками D и E, получим два треугольника DKE и DLE, которые удовлетворяют всем условиям задачи в ослабленной формулировке. Точка D выбиралась на луче ON произвольно, и, следовательно, можно построить сколько угодно треугольников, подобных треугольнику DKE, и сколько угодно треугольников, подобных треугольнику DLE. Проведем теперь через точку A прямые, параллельные отрезкам KD и KE; они пересекут стороны угла в вершинах C и B искомого треугольника. Аналогично получим второе решение: треугольник $AB'C'$. Задача всегда имеет два и только два решения. ▲

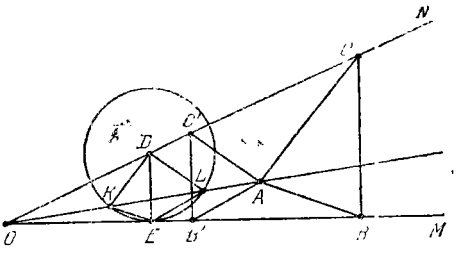


Рис. 206.

Остановимся в заключение на *методе симметрии*. Иногда удается существенно упростить задачу, заменив один из заданных элементов (точку, прямую, окружность) другим, симметрично расположенным относительно некоторой прямой. Классическим примером такой задачи является следующая:

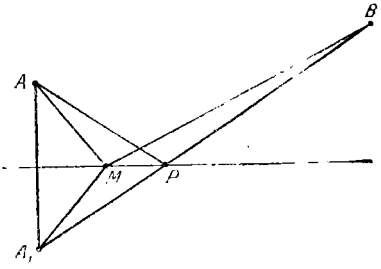


Рис. 207.

Задача 4. Даны две точки, расположенные по одну сторону от данной прямой. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.

△ Рассмотрим точку A_1, симметричную данной точке A относительно данной прямой (рис. 207), и пусть точка M — произвольная точка этой прямой. Тогда, так как $|AM|=|A_1M|$, то

$$|AM|+|BM|=|A_1M|+|BM|.$$

Следовательно, сумма $|AM|+|BM|$ будет наименьшей, если будет наименьшей сумма $|A_1M|+|BM|$. Но последняя сумма, очевидно, будет достигать своего наименьшего значения тогда, когда точка M будет лежать на прямой BA_1 (на нашем рисунке будет совпадать с точкой P). Отсюда вытекает следующее построение: строим точку, симметричную одной из заданных точек относительно заданной прямой, проводим через нее и другую

заданную точку прямую; точка пересечения построенной прямой и данной является искомой. Очевидно, что задача всегда имеет одно и только одно решение.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Дан треугольник ABC. Найти множество точек M, расположенных в плоскости треугольника и таких, что площади треугольников AMB и BMC равны.

2. Дан треугольник ABC. В плоскости этого треугольника найти множество точек M таких, что сумма площадей треугольников AMB и AMC равна s ($s>0$).

3. Даны отрезок AB и на нем точка C. Найти множество точек пересечения двух конгруэнтных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через точки C и B.

4. Точки A, B, C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности и через точку C — касательные к ним. Найти множество точек касания.

5. Найти множество точек плоскости, абсолютная величина разности квадратов расстояний которых до двух заданных точек этой плоскости постоянна и равна $s>0$.

6. Найти множество точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек плоскости равна квадрату расстояния до третьей точки плоскости.

7. Найти множество точек пространства, являющихся основаниями перпендикуляров, проведенных через данную точку пространства к плоскостям, проходящим через данную прямую (данная точка не лежит на данной прямой).

8. Даны трехгранный угол и точки A и B, лежащие на двух разных ребрах трехгранного угла. Найти множество точек пересечения медиан треугольников ABC, где C — произвольная точка третьего ребра.

9. Отрезок не имеет общих точек с плоскостью и не параллелен ей. Через концы отрезка проводятся сферы, касающиеся плоскости. Найти множество точек касания.

10. Найти множество точек пространства, через которые нельзя провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

11. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC построить соответственно точки D и E так, чтобы $|AD|=|DE|=|EC|$.

12. Два пункта A и B расположены по разные стороны прямолинейного канала, ширина которого постоянна. Где надо построить мост, чтобы путь от одного пункта в другой был кратчайшим?

13. По разные стороны от прямой l даны точки A и B. Найти на прямой точку C такую, чтобы разность $|AC|-|BC|$ была наибольшей (расстояние от точки A до прямой l больше расстояния от точки B до прямой l).

14. Даны острый угол AOB и две точки M и N внутри него. Как направить луч света из точки M, чтобы он, отразившись сначала от стороны AO, а затем от стороны BO, прошел через точку N?

15. Даны угол и точка вне его. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник данного периметра $2p$.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Дана окружность и точка внутри ее. Найти множество середин хорд окружности, проходящих через данную точку.

2. Найти множество середин отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

3. На плоскости даны точки A и B. Найти множество проекций точки A на прямые, лежащие в плоскости и проходящие через точку B.

4. На плоскости даны точки A и B. Найти множество точек плоскости, симметричных точке A относительно прямых, лежащих в плоскости и проходящих через точку B.

5. Дан прямой угол с вершиной в точке O. Пусть OM — произвольная ломаная длины l, каждое звено которой параллельно одной из сторон угла. Найти множество точек M, лежащих внутри угла или на сторонах угла.

6. Прямоугольный треугольник перемещается в плоскости так, что вершины его острых углов скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Какую фигуру образуют вершины прямого угла этого треугольника?

7. На окружности даны две неподвижные точки A и B. Точки C и D перемещаются по окружности так, что расстояние между ними не изменяется. Доказать, что точка пересечения прямых AC и BD движется при этом по некоторой окружности, проходящей через точки A и B.

8. Найти множество точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B этой плоскости равна $s \geqslant 0$.

9. Даны прямая и на ней точки A и B. Найти множество точек касания окружностей, одна из которых касается данной прямой в точке A, другая — в точке B.

10. Найти множество центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие вершины — на боковых сторонах.

11. На плоскости α даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Найти множество точек плоскости α, равноотстоящих от данных прямых.

12. Даны отрезок AB и на нем точка C. Найти множество точек M таких, что $\overset{\frown}{MCB} = 2\overset{\frown}{MAB}$.

13. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

14. Дан квадрат со стороной a. Найти множество точек, лежащих в плоскости квадрата и таких, что сумма расстояний от каждой из которых до прямых, содержащих стороны квадрата, равна $4a$.

15. Найти множество точек пространства, равноотстоящих от всех вершин равнобедренной трапеции.

16. Найти множество точек пространства, равноотстоящих от трех попарно пересекающихся плоскостей, не проходящих через одну и ту же прямую и перпендикулярных некоторой плоскости α.

17. Найти множество точек, симметричных данной точке A относительно точек данной прямой l.

18. Найти множество точек пространства, симметричных данной точке A относительно прямых, параллельных данной прямой l.

19. Найти множество точек пространства, симметричных данной точке A относительно плоскостей, проходящих через данную прямую l.

20. Найти множество точек пространства, симметричных данной точке A относительно прямых, проходящих через другую данную точку B

21. Найти множество точек пространства, симметричных данной точке A относительно плоскостей, проходящих через другую данную точку B.

22. Даны шар и прямая, не имеющие общих точек. Найти множество центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую.

23. Найти множество точек пространства, из которых к данной сфере радиуса R можно провести три попарно перпендикулярные касательные.

24. Концы отрезка длины a скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым l_1 и l_2. Какую линию описывает середина отрезка?

25. Трапецию пересечь прямой, параллельной основаниям, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами трапеции, делился диагоналями на три конгруэнтные части.

26. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный внутри окружностей, имел данную длину a.

27. Даны две точки и окружность. Провести через данные точки две секущие, хорды которых внутри данной окружности были бы конгруэнтны и пересекались бы под данным углом α.

28. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в данной точке.

29. Через две данные точки провести окружность, делящуюся данной окружностью на две конгруэнтные дуги.

30. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного треугольника.

31. Дана окружность и на ней три точки. Вписать в эту окружность треугольник так, чтобы его биссектрисы при продолжении проходили через данные точки.

32. Дана окружность и на ней три точки. Вписать в эту окружность треугольник так, чтобы продолжения высоты, биссектрисы и медианы, исходящих из одной и той же вершины треугольника, пересекали окружность в данных точках.

33. Даны центры окружностей, вневписанных в треугольник. Построить треугольник.

Указание. Окружность называется *вневписанной* в треугольник, если она касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон треугольника.

34. Даны центры вписанной, вневписанной и описанной окружностей. Построить треугольник.

35. Даны три параллельные прямые. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных прямых.

36. В данный треугольник вписать квадрат (на одной стороне треугольника должны лежать две вершины квадрата, на двух других сторонах — по одной вершине).

37. Построить квадрат по заданной вершине и двум точкам, которые лежат на двух сторонах квадрата, не проходящих через данную вершину.

38. Построить параллелограмм по заданным диагоналям d_1 и d_2 и острому углу α.

39. В данную окружность вписать трапецию, зная высоту трапеции h и разность d оснований трапеции.

40. На одной из сторон острого угла взяты две точки A и B. Найти на другой стороне угла точку C такую, чтобы величина угла ACB была наибольшей.

41. На плоскости даны три параллельные прямые. Отрезок AB перпендикулярен этим прямым, а концы его лежат на первых двух прямых. Найти на третьей прямой точку C такую, чтобы величина угла ACB была наибольшей.

42. Даны угол и внутри него точка M. Построить треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого находится в точке M, а две другие лежат на разных сторонах данного угла.

43. Даны угол и внутри него точка M. Провести через точку M прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых прямой на сторонах угла, была наименьшей.

44. Через поле идет прямая дорога. Пешеход может передвигаться по дороге со скоростью, не превышающей 6 км/ч, и по полю со скоростью, не превышающей 3 км/час. Где пешеход может оказаться через час, если в начальный момент он находится на дороге?

Глава XV
СТЕРЕОМЕТРИЯ (ЧАСТЬ I)

§ 1. Сечения многогранников

Сечения многогранников плоскостью используются при решении многих стереометрических задач. В этом параграфе разобраны некоторые способы построения сечений. Рассмотрены сечения плоскостями, проходящими через данные точку и прямую, через три данные точки, а также сечения, способ задания которых содержит условие параллельности сечения данной плоскости, данной прямой или двум данным прямым. Примеры построения сечения плоскостями, перпендикулярными данной прямой или плоскости, приведены в гл. XVI.

На рис. 208—213 изображены некоторые сечения тетраэдра и параллелепипеда. На рис. 208 сечение проведено через ребро AB и точку M ребра CD; на рис. 209 — через вершину D и точки M и N на ребрах AB и BC; на рис. 210 — через вершину C

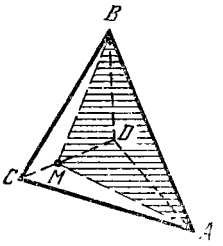


Рис. 208.

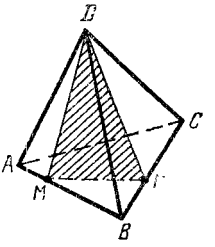


Рис. 209.

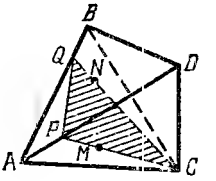


Рис. 210.

и точки M и N в гранях ACD и ACB. В каждом из этих случаев построение сечения основано на простом следствии из аксиом стереометрии:

если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является линией пересечения данных плоскостей.

Например, на рис. 210 точки $P=(CM)\cap[AD]$ и $Q=(CN)\cap[AB]$ принадлежат и плоскости сечения и грани ADB, поэтому отрезок PQ — сторона сечения.

На рис. 211 показано сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M ребра AB параллельно грани ACL. Здесь построение сечения основано на том, что

если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

Обозначим секущую плоскость α. Плоскость ABD пересекает параллельные плоскости α и ACD. Пересечение плоскостей ABD и ACD — прямая AD, значит, линия пересечения плоскостей ABD и α параллельна прямой AD. Проводим через точку M прямую, параллельную прямой AD, и в пересечении ее с ребром BD находим вершину P сечения. Отрезок MP — сторона сечения. Аналогично строим сторону MN, $[MN] \parallel [AC]$. Отрезок PN — третья сторона сечения, $[PN] \parallel [DC]$. Сечение — треугольник MNP, гомотетичный треугольнику ACD. Коэффициент гомотетии равен отношению $|BM| : |BA|$.

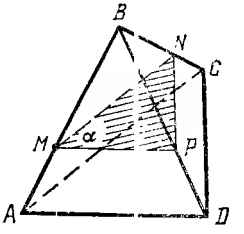


Рис. 211.

На рис. 212 представлено сечение параллелепипеда плоскостью, проведенной через точку M ребра CC_1 параллельно плоскости грани $ABCD$. Построение сечения основано на таких же рассуждениях, что и в предыдущем случае. Здесь $[MN] \parallel [CD]$, $[NP] \parallel [DA]$, $[PQ] \parallel [AB]$, $[QM] \parallel [BC]$. В то же время $[MN] \parallel [QP]$, так как эти отрезки лежат на линиях пересечения двух параллельных плоскостей AA_1B_1B и DD_1C_1C с плоскостью сечения. Аналогично $[PN] \parallel [QM]$. Сечение — параллелограмм, конгруэнтный грани $ABCD$.

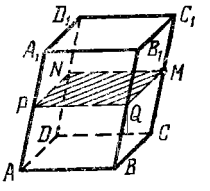


Рис. 212.

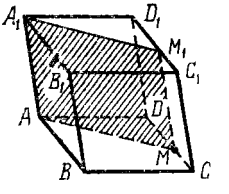


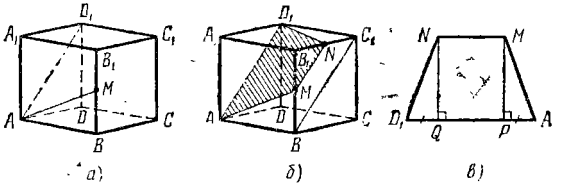
Рис. 213.

На рис. 213 изображено сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через ребро AA_1 и точку M ребра CD. Здесь $[MM_1] \parallel [AA_1]$, $[A_1M_1] \parallel [AM]$, так как параллельны плоскости граней, в которых лежат эти стороны сечения. Сечение — параллелограмм AA_1M_1M.

Задача 1. Длина ребра куба равна a (рис. 214, *а*). Найти площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1.

△ Обозначим секущую плоскость α. Отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости α и граням куба, поэтому являются сторонами сечения. Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C. Плос-

кости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1. Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, эта линия пересечения параллельна и прямой BC_1. Проводим через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой BC_1, ее пересечение с ребром B_1C_1 дает вершину сечения (см. рис. 214, *б*). Сечение — трапеция $AMND_1$, $[MN] \parallel [AD_1]$.



а) *б)* *в)*

Рис. 214.

Найдем длины сторон этой трапеции. Имеем $|AD_1| = a\sqrt{2}$, отрезок MN — средняя линия в треугольнике BB_1C_1, поэтому $|MN| = \frac{1}{2}|BC_1| = \frac{a}{\sqrt{2}}$. В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N ($|AB| = |C_1D_1| = a$, $|BM| = |NC_1| = a/2$) находим $|AM| = |D_1N| = a\sqrt{5}/2$. Значит, трапеция $AMND_1$ равнобедренная. Найдем ее высоту (рис. 214, *в*). Опускаем перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1, получаем $|PQ| = |MN| = a/\sqrt{2}$, $|D_1Q| = |PA| = \frac{1}{2}(|D_1A| - |QP|) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. В прямоугольном треугольнике D_1QN ($|D_1N| = a\sqrt{5}/2$, $|D_1Q| = a/2\sqrt{2}$) находим $|NQ| = 3a/2\sqrt{2}$. Определяем площадь сечения

$$S = \frac{1}{2}(|MN| + |D_1A|)|NQ| = \frac{9}{8}a^2.$$

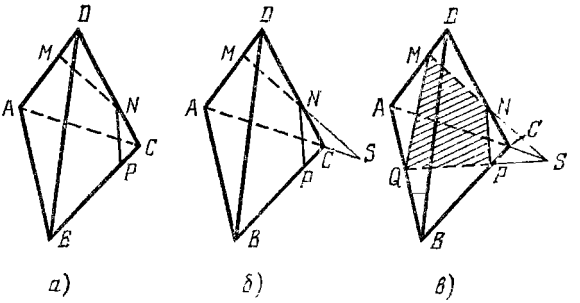
Ответ: $9a^2/8$. ▲

На рис. 215 показано построение сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, P на ребрах тетраэдра. Точки M и N заданы так, что прямые MN и AC не параллельны. Отрезки MN и NP являются сторонами сечения (рис. 215, *а*). Точка P — общая для плоскостей MNP и ABC. Вторую общую точку находим в пересечении прямых MN и AC, $S = (MN) \cap (AC)$ (рис. 215, *б*). Прямая SP — линия пересечения плоскостей MNP и ABC. Пересечение этой прямой с ребром AB дает вершину Q сечения, $Q = (SP) \cap [AB]$. Сечение — четырехугольник $MNPQ$.

Задача 2. Определить вид сечения куба плоскостью, проведенной через середины ребер AB, AA_1, A_1D_1 (рис. 216, *а*), и найти площадь сечения, если ребро куба имеет длину a.

△ Обозначим секущую плоскость α. Отрезки MN и NP принадлежат и плоскости α и граням куба, поэтому являются сторонами сечения (рис. 216, *а*).

Строим точки S_1 и S_2 пересечения прямой NP, принадлежащей плоскости α, с прямыми AD и DD_1 (рис. 216, *б*). Прямая S_1M — линия пересечения плоскостей α и $ABCD$. Находим точки пересечения прямой S_1M с ребром BC (точка S_3 на рис. 216, *в*) и с прямой CD (точка S_4). Точки S_2 и S_4 — общие для плоскостей α и CC_1D_1D, прямая S_2S_1 — линия пересечения этих плоскостей.

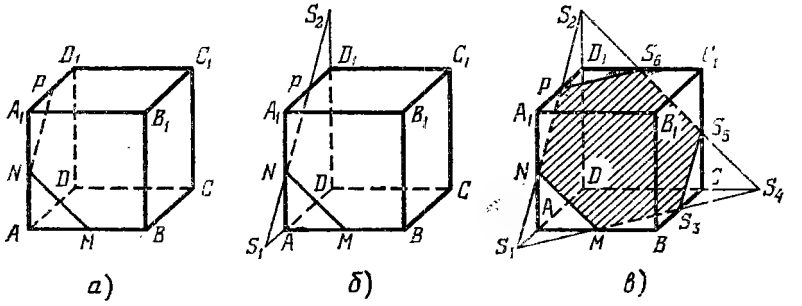


а) *б)* *в)*

Рис. 215.

Находим точки пересечения прямой S_2S_4 с ребрами CC_1 и C_1D_1 (S_5 и S_6). Сечение — шестиугольник $PNMS_3S_5S_6$.

Заметим, что противоположные стороны сечения параллельны, так как лежат на линиях пересечения плоскости α с попарно параллельными плоскостями граней.



а) *б)* *в)*

Рис. 216.

Докажем, что вершины S_3, S_5, S_6 сечения являются серединами ребер, на которых они лежат. Отрезок NP — средняя линия в треугольнике AA_1D_1, поэтому $(NP) \parallel (AD_1)$ (рис. 217). Аналогично имеем $(MN) \parallel (BA_1)$, а так как $(BA_1) \parallel (CD_1)$, то $(MN) \parallel (CD_1)$. Таким образом, плоскость α сечения параллельна плоскости AD_1C. Отсюда следует, что и линии пересечения этих плоскостей с гра-

нями куба параллельны, т. е. $[MS_3]\parallel[AC]$, $[S_5S_6]\parallel[CD_1]$. Точно так же доказываем, что $\alpha\parallel(BA_1C_1)$ ($(MN)\parallel(BA_1)$, $(NP)\parallel(AD_1)\parallel(BC_1)$), откуда получаем $[S_3S_5]\parallel[BC_1]$, $[S_6P]\parallel[C_1A_1]$. Теперь из того, что $|BM|=|MA|$, применив три раза теорему Фалеса, получим $|BS_3|=|S_3C|$, $|CS_5|=|S_5C_1|$, $C_1S_6|=|S_6D_1|$. Значит, точки S_3, S_5, S_6 — середины ребер, на которых они лежат.

Из доказанного следует, что длина каждой стороны сечения равна $a/\sqrt{2}$. Докажем еще, что каждый угол сечения имеет величину 120°. Рассмотрим треугольник S_1MN. Легко установить, что этот треугольник правильный. Действительно, из конгруэнтности треугольников S_1AN и PA_1N (по катету и острому углу) имеем $|S_1A|=|PA_1|=a/2$. Тогда $|S_1N|=\sqrt{|S_1A|^2+|AN|^2}=a/\sqrt{2}$, $|S_1M|=\sqrt{|S_1A|^2+|AM|^2}=a/\sqrt{2}$. Учитывая, что и $|MN|=a/\sqrt{2}$, видим, что треугольник S_1MN правильный, а значит, $\widehat{S_1MN}=\widehat{S_1NM}=60°$. Отсюда следует, что $\widehat{S_3M_1N}=\widehat{MNP}=120°$. Рассмотрев треугольники $S_3S_4S_5$ и S_6S_2P, получим аналогично, что и остальные углы сечения имеют величину 120°.

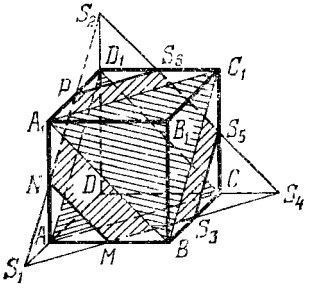


Рис. 217.

Таким образом, сечение — правильный шестиугольник со стороной $a/\sqrt{2}$. Его площадь равна $(3\sqrt{3}/4)\,a^2$.

Ответ: Сечение — правильный шестиугольник, площадь его равна $(3\sqrt{3}/4)\,a^2$. ▲

На рис. 218 показано построение сечения тетраэдра плоскостью, параллельной ребру AC и проходящей через точку M ребра CD и точку N в грани ABD. Построение основано на следующей теореме.

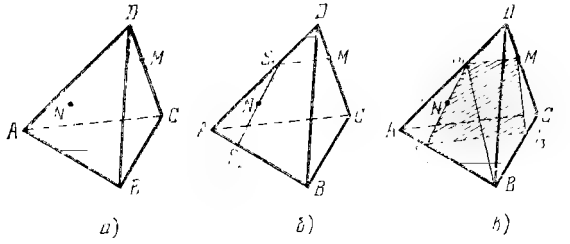


Рис. 218.

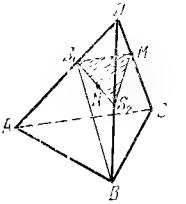


Рис. 219.

Если плоскость и проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Обозначим плоскость сечения α. Плоскость ACD имеет с плоскостью α общую точку M и содержит прямую AC, параллельную плоскости α. Следовательно, линия пересечения этих плоскостей проходит через точку M параллельно прямой AC. В соответствии с этим построена сторона MS_1 сечения (рис. 218, *б*), $[MS_1]\|[AC]$. Проведя прямую S_1N, найдем вторую сторону сечения — S_1S_2. На рис. 218 точка N дана так, что точка S_2 принадлежит ребру AB. Плоскость ABC также содержит прямую AC, параллельную плоскости сечения. Поэтому сторона сечения S_2S_3 проведена параллельно ребру AC (рис. 218, *в*). Отрезок S_3M — четвертая сторона сечения. Сечение $MS_1S_2S_3$ — трапеция ($[MS_1]\|[AC]\|[S_2S_3]$). В зависимости от расположения точки N относительно отрезка BS_1 сечение может быть и треугольником (рис. 219).

Задача 3. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 и C (рис. 220, *а*) параллельно прямой BC_1. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB.

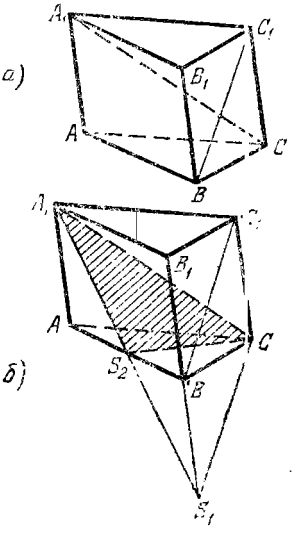


Рис. 220.

△ Плоскость сечения обозначим α. Линия пересечения плоскостей α и BB_1C_1C проходит через точку C параллельно прямой BC_1 (рис. 220, *б*), ее точку пересечения с прямой BB_1 обозначим S_1. Точка S_1 — общая для плоскостей α и AA_1B_1B. Еще одна общая точка A_1 дана в условии. Построив прямую A_1S_1, найдем вершину S_2 сечения. Сечение — треугольник A_1CS_2.

Определим отношение $|AS_2|:|S_2B|$. Из подобия треугольников A_1AS_2 и S_1BS_2 имеем $|AS_2|:|S_2B|=|AA_1|:|BS_1|$. Так как S_1BC_1C — параллелограмм ($[BS_1]\|[C_1C]$, $[BC_1]\|[S_1C]$), то $BS_1|=|C_1C|$. Учитывая, что и $|AA_1|=|C_1C|$, получаем $|AS_2|:|S_2B|=1:1$. ▲

Задача 4. На ребре AB тетраэдра расположена точка M так, что $|AM|:|AB|=\lambda$, $0<\lambda<1$ (рис. 221, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельной ребрам AD и BC. При каком λ это сечение будет ромбом, если $|AD|:|BC|=m$?

△ Секущую плоскость обозначим α. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD параллельна прямой AD ($(AD)\|\alpha$). Проводим $[MN]\|[AD]$ (рис. 221, *б*). Линии пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью α параллельны прямой BC

($(BC)\parallel\alpha$). Строим $[MQ]\parallel[BC]$ и $[NP]\parallel[BC]$. Четвертая сторона сечения PQ параллельна ребру AD. Сечение — параллелограмм $MNPQ$ ($[MN]\parallel[AD]\parallel[PQ]$, $[NP]\parallel[BC]\parallel[MQ]$).

Выразим длины сторон параллелограмма $MNPQ$ через длины ребер AD и BC. Из подобия треугольников AMQ и ABC имеем $|MQ|:|BC|=|AM|:|AB|=\lambda$, откуда $|MQ|=\lambda|BC|$. Теперь находим $|BM|=|AB|-|AM|=(1-\lambda)|AB|$, и из подобия треугольников BMN и BAD получаем $|MN|:|AD|=|BM|:|BA|=1-\lambda$, т. е. $|MN|=(1-\lambda)|AD|$. Подставляя в равенство $|MN|=|MQ|$ полученные выражения, будем иметь $(1-\lambda)|AD|=\lambda|BC|$, откуда

$$\lambda=\frac{|AD|}{|BC|+|AD|}=\frac{m}{m+1}.$$

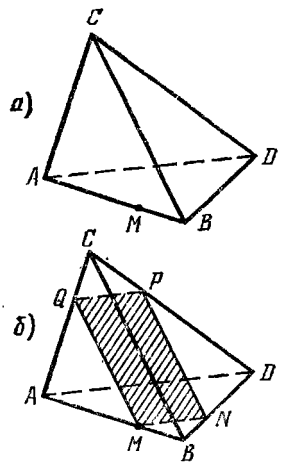


Рис. 221.

Ответ: Сечение будет ромбом при $\lambda=m/(m+1)$. ▲

Замечание. Если противоположные ребра AD и BC тетраэдра перпендикулярны, то параллельные им стороны MN и MQ сечения также перпендикулярны. В этом случае сечение — прямоугольник, а при $\lambda=m/(m+1)$ — квадрат. В частности, если тетраэдр $ABCD$ правильный, то сечение, проведенное через середину ребра AB параллельно ребрам BC и AD, квадрат (см. задачу 2 § 4 этой главы).

В рассмотренных до сих пор примерах, для того чтобы найти сечение многогранника, выполнялись построения в плоскостях

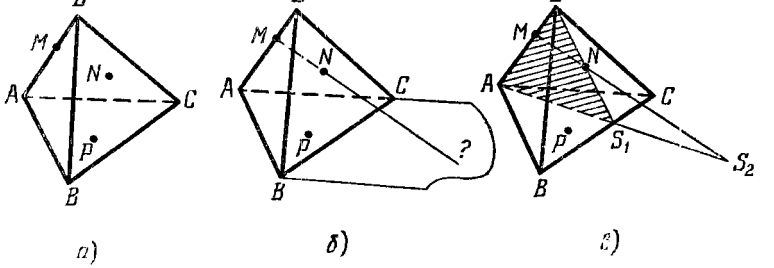


Рис. 222.

граней этого многогранника (или только в гранях). В некоторых задачах для нахождения сечения приходится ряд построений проводить вне плоскостей граней.

Разберем, например, построение сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью MNP, где точки M, N и P расположены соответственно

на ребре AD, в грани BCD и в грани ABC тетраэдра, как указано на рис. 222, *а*, причем $(MN) \nparallel (ABC)$. Здесь данные таковы, что для каждой грани тетраэдра известна только одна общая точка с плоскостью сечения MNP. Для того чтобы построить линию пересечения плоскости какой-либо грани с плоскостью MNP, необходимо найти еще одну общую точку для этих плоскостей. Рассмотрим плоскость ABC. Точка P — общая для плоскостей ABC и MNP. Второй общей точкой является точка пересечения прямой MN с плоскостью ABC ($(MN) \nparallel (ABC)$). Как построить эту точку? (рис. 222, *б*, для сравнения обратитесь к рис. 215, *б*). Рис. 222, *в* содержит ответ на этот вопрос. Через точки M, N и вершину D тетраэдра проводим плоскость, строим ее линию пересечения AS_1 с плоскостью ABC. Общая точка S_2 прямых MN и AS_1 и является точкой пересечения прямой MN с плоскостью ABC. Прямая PS_2 — линия пересечения плоскостей MNP и ABC. Дальнейшее построение сечения не вызывает затруднений. Вершины S_3 и S_4 (рис. 223) находим как точки пересечения прямой PS_2 с ребрами BC и AB, пересечение прямой S_3N с ребром CD дает вершину S_5. Сечение — четырехугольник $MS_4S_3S_5$.

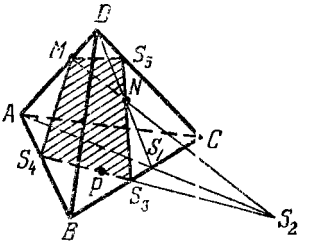


Рис. 223.

На рис. 224, *а* — *в* показано построение сечения тетраэдра по трем точкам: M — в грани ABC, N — в грани BCD и P — в грани

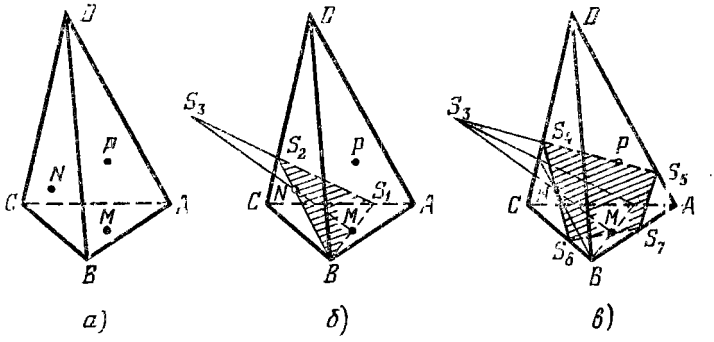


Рис. 224.

ACD ($(MN) \nparallel (ACD)$). Для нахождения точки пересечения прямой MN с плоскостью ACD проведена вспомогательная плоскость через эту прямую и вершину B тетраэдра (рис. 224, *б*). Прямая S_1S_2 — пересечение этой плоскости с плоскостью ACD. Точка $S_3 = (MN) \cap (S_1S_2)$ является точкой пересечения прямой MN с плоскостью ACD.

Дальнейшие построения (рис. 224, *в*) проводятся так же, как и в предыдущем случае.

В двух последних примерах для построения точки пересечения прямой MN с плоскостью грани тетраэдра (грани ABC на рис. 222, *в*, грани ACD на рис. 224, *б*) была проведена вспомогательная плоскость через эту прямую и одну из вершин тетраэдра ((MDN) — рис. 222, *в*, (MBN) — рис. 224, *б*). Такой же прием для нахождения точки пересечения прямой и плоскости можно использовать и в других случаях. В пирамиде, и в частности, в тетраэдре вспомогательную плоскость часто удобно проводить через данную прямую и через вершину; в призме, и в том числе, в параллелепипеде — через данную прямую параллельно боковым ребрам.

Задача 5. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины M и N ребер AD и BB_1 и точку P пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 225, *а*). Определить, в каком отношении плоскость сечения делит ребро AB.

△ Построение сечения показано на рис. 225, *б* — *г*. Обозначим секущую плоскость α, $\alpha=(MNP)$. Вначале находим точку пересечения прямой NP с плоскостью AA_1D_1D. Эта прямая лежит в плоскости BB_1D_1D, пересекающей плоскость AA_1D_1D по прямой DD_1. Точка S_1 пересечения прямых NP и DD_1 (рис. 225, *б*) — искомая. Аналогично находим точку S_2 пересечения прямой NP с плоскостью $ABCD$, $S_2=(NP)\cap(DB)$. Плоскость α пересекает плоскость AA_1D_1D по прямой S_1M, а плоскость $ABCD$ — по прямой S_2M. Находим две вершины сечения: $S_3=(S_1M)\cap[D_1A_1]$ и $S_4=(S_2M)\cap[AB]$ (рис. 225, *в*). Точка $S_5=(S_3P)\cap[B_1C_1]$ — последняя вершина сечения. Заметим, что прямые S_5N и S_2M пересекают прямую BC в одной и той же точке $S_6=(BC)\cap\alpha$. Пятиугольник $MS_3S_5NS_4$ — искомое сечение (рис. 225, *г*). Стороны S_3S_5 и MS_4, а также MS_3 и S_5N сечения параллельны, так как лежат в параллельных гранях.

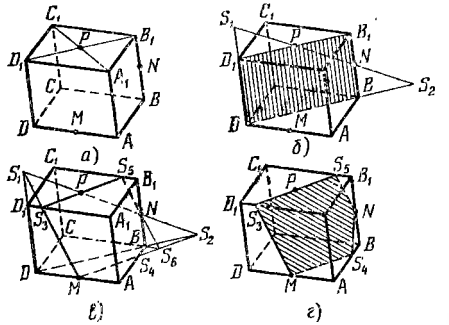


Рис. 225.

Найдем отношение $|AS_4|:|S_4B|$. Из подобия треугольников MAS_4 и S_6BS_4 (рис. 225, *в*) имеем $|AS_4|:|BS_6|=|AM|:|BS_6|$. Из конгруэнтности треугольников BS_6N и B_1S_5N (точка N — середина ребра BB_1) следует, что $|BS_6|=|B_1S_5|$. Далее, поскольку точка P — центр симметрии параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, то $|B_1S_5|=|D_1S_3|$. Таким образом, $|BS_6|=|D_1S_3|$. Учитывая еще, что $|AM|=|DM|$, получаем $|AS_4|:|BS_4|=|DM|:|D_1S_3|$. Из подобия треугольников DS_1M и $D_1S_1S_3$ имеем $|DM|:|D_1S_3|=$

$= |DS_1| : |D_1S_1|$, а из конгруэнтности треугольников S_1D_1P и NB_1P (рис. 225, *б*) (по стороне и прилежащим углам) следует, что $|D_1S_1| = |B_1N|$. Учитывая, что $|B_1N| = \frac{1}{2}|B_1B| = \frac{1}{2}|D_1D|$, получаем $|D_1S_1| = \frac{1}{2}|D_1D|$ и, значит, $|DS_1| = \frac{3}{2}|DD_1|$. Отсюда последовательно имеем $|DM| : |D_1S_2| = |DS_1| : |D_1S_1| = 3 : 1$, $|AS_4| : |BS_4| = |DM| : |D_1S_2| = 3 : 1$.

Ответ: Ребро AB разделено в отношении 3 : 1, считая от вершины A. ▲

Задача 6. На ребрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда (рис. 226, *а*) расположены соответственно точки M и N так, что $|AM| : |AA_1| = m$, $|CN| : |CC_1| = n$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали BD основания. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1.

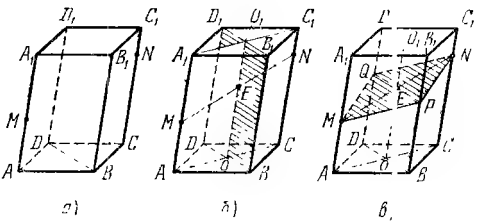


Рис. 226.

△ Ранее уже были рассмотрены примеры построения сечения, параллельного данной прямой (рис. 218—220). Данная задача отличается от этих примеров тем, что ни одна из точек M и N сечения не лежит в плоскости грани $ABCD$, где расположена прямая BD, параллельная сечению. Стороны сечения, выходящие из вершин M и N, не будут параллельны прямой BD, так как она пересекает грани, в которых лежат эти стороны.

Обозначим плоскость сечения α. Прямая BD расположена в плоскости BB_1D_1D (рис. 226, *б*), следовательно, плоскости α и BB_1D_1D пересекаются по прямой, параллельной BD. Построим точку пересечения прямой MN, лежащей в плоскости α, с плоскостью BB_1D_1D. Плоскость AA_1C_1C, содержащая прямую MN, пересекает плоскость BB_1D_1D по прямой OO_1, параллельной боковым ребрам параллелепипеда. Общая точка E прямых MN и OO_1 и есть точка пересечения прямой MN с плоскостью BB_1D_1D. Теперь через точку E в плоскости BB_1D_1D проводим прямую, параллельную прямой BD, и находим ее точки пересечения P и Q с ребрами BB_1 и DD_1 соответственно (рис. 226, *в*). Прямая PQ есть пересечение плоскостей α и BB_1D_1D, следовательно, точки P и Q являются вершинами сечения. Сечение — параллелограмм $MPNQ$, $[MQ] \parallel [PN]$, $[MP] \parallel [QN]$.

Найдем отношение $|BP| : |PB_1|$. Имеем $|BP| = |OE|$, поскольку $BOEP$ — параллелограмм, отрезок OE — средняя линия в трапеции $AMNC$, значит, $|OE| = \frac{1}{2}(|AM| + |CN|)$. Отсюда, учитывая, что

$|AM|=m|AA_1|$, $|CN|=n|CC_1|$, а $|AA_1|=|CC_1|=|BB_1|$, получаем $|BP|=|OE|=\frac{m+n}{2}|BB_1|$. Далее находим $|PB_1|=|BB_1|-|BP|=\frac{2-m-n}{2}|BB_1|$, $|BP|:|PB_1|=\frac{m+n}{2-m-n}$.

Ответ: Ребро BB_1 разделено в отношении $\frac{m+n}{2-m-n}$, считая от вершины B. ▲

Замечание. В задаче 6 вместо плоскости BB_1D_1D можно было бы взять и другую плоскость, например плоскость грани $ABCD$. Соответствующие построения показаны на рис. 227 ($S_1=(MN)\cap(AC)$, $(S_2S_3)\parallel(BD)$).

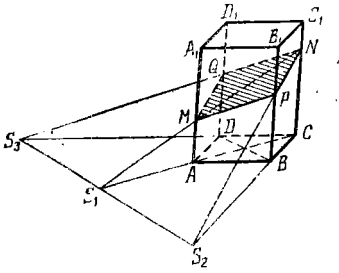


Рис. 227.

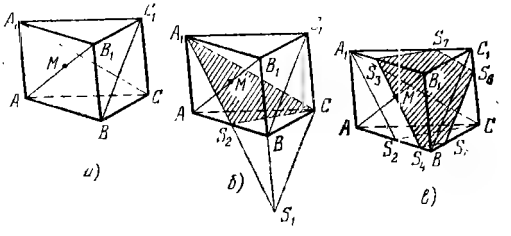


Рис. 228.

Задача 7. На диагонали AB_1 грани ABB_1B_1 треугольной призмы (рис. 228, *а*) расположена точка M так, что $|AM|:|MB_1|=5:4$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M и параллельной диагоналям A_1C и BC_1 двух других граней. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1.

△ В задаче 4 уже был рассмотрен пример построения сечения, проходящего через данную точку параллельно двум данным прямым. Эта задача отличается от задачи 4 тем, что ни одна из прямых A_1C и BC_1, параллельных сечению, не лежит в плоскости грани ABB_1A_1, где дана точка M сечения. Каждая из этих прямых пересекает плоскость ABB_1A_1. Поэтому нельзя сразу начать от точки M построение сечения, как это делалось в задаче 4. В таких случаях бывает полезно построить сначала некоторое вспомогательное сечение, параллельное данным прямым.

Проведем плоскость через прямую A_1C параллельно прямой BC_1 (рис. 228, *б*, $(CS_1)\parallel(C_1B)$, см. также задачу 3, рис. 220), треугольник A_1S_2C — сечение призмы этой плоскостью. Плоскость искомого сечения обозначим α. Эта плоскость параллельна пересекающимся прямым A_1C и CS_1 плоскости A_1CS_1, поэтому $\alpha\parallel(A_1CS_1)$. Отсюда следует, что стороны искомого сечения параллельны сторонам сечения A_1S_2C, лежащим в тех же или параллельных гранях. Теперь, исходя из этого, можно построить сечение. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой A_1S_2, и нахо-

дим ее точки пересечения S_3, S_4 с ребрами (рис. 228, *в*), затем строим стороны $[S_4S_5] \parallel [S_2C]$, $[S_5S_6] \parallel [BC_1]$ (так как $\alpha \parallel BC_1$), $[S_6S_7] \parallel [CA_1]$. Пятиугольник $S_3S_4S_5S_6S_7$ — искомое сечение (отметим, что $[S_4S_5] \parallel [S_3S_7]$).

Найдем отношение $|CS_6| : |S_6C_1|$. Рассмотрим грань AA_1B_1B (рис. 228, *в*). Из подобия треугольников AS_4M и B_1S_3M имеем $|AS_4| : |B_1S_3| = |AM| : |B_1M| = 5:4$. Обозначим $\frac{|S_2S_4|}{|AB|} = x$. Учитывая, что $|AS_2| = \frac{1}{2}|AB|$, а $|A_1S_3| = |S_2S_4|$ и $|A_1B_1| = |AB|$, имеем $|AS_4| = \left(\frac{1}{2} + x\right)|AB|$, $|B_1S_3| = (1-x)|AB|$. Получаем уравнение $\left(\frac{1}{2} + x\right)\Big/(1-x) = 5/4$, из которого находим $x = 1/3$. Значит, $|S_2S_4| = \frac{1}{3}|AB|$, откуда $|S_4B| = |S_2B| - |S_2S_4| = \frac{1}{6}|AB|$. Поскольку $[S_4S_5] \parallel [S_2C]$, то $|CS_5| : |S_5B| = |S_2S_4| : |S_4B| = 2$, а из того, что $[S_5S_6] \parallel [BC_1]$, следует, что $|CS_6| : |S_6C_1| = |CS_5| : |S_5B| = 2$.

Ответ: Ребро CC_1 разделено в отношении 2:1, считая от вершины C. ▲

Рассмотрение примеров построения сечений завершим своего рода «нотацией».

Как только плоскость сечения задана (тремя точками, двумя точками и параллельной сечению прямой и т. д.), так расположение вершин сечения на ребрах многогранника, его сторон в гранях определяется однозначно. Появиться они должны в результате обоснованного построения, размещение их «приблизительно», «на глазок» недопустимо. Практика приемных экзаменов показывает, что напомнить это, в общем-то, очевидное требование не лишне.

В заключение этого параграфа покажем на примерах, как используются сечения в задачах о параллельных прямых и плоскостях.

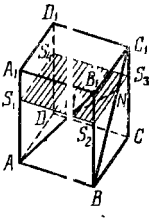


Рис. 229.

Задача 8. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M и N так, что отрезок MN параллелен грани $ABCD$. Найти отношения $|AM| : |AB_1|$ и $|BN| : |BC_1|$, если $|MN| : |AB| = \sqrt{5}/3$.

△ Пусть согласно условию $(MN) \parallel (ABCD)$. Через точку M проведем в грани AA_1B_1B прямую S_1S_2 (рис. 229), параллельную прямой AB. Плоскость, определяемая прямыми MN и S_1S_2, параллельна плоскости $ABCD$. Сечение куба этой плоскостью — квадрат $S_1S_2S_3S_4$, конгруэнтный грани $ABCD$.

Обозначим $|AM| : |AB_1| = x$, $|AB| = a$. Из подобия треугольников MB_1S_2 и AB_1B имеем $|MB_1| : |AB_1| = |MS_2| : |AB| = |B_1S_2| : |B_1B|$. Учитывая, что $|MB_1| = (1-x)|AB_1|$, получаем $|MS_2| = (1-x)|AB| = (1-x)a$, $|B_1S_2| = (1-x)|BB_1|$, а $|BS_2| = |BB_1| - |B_1S_2| = x|BB_1|$. Из подобия треугольников BS_2N

и BB_1C_1 имеем $|S_2N|:|B_1C_1|=|BN|:|BC_1|=|BS_2|:|BB_1|=x$. Отсюда следует, что $|S_2N|=xa$ и $|BN|:|BC_1|=|AM|:|AB_1|=x$.

В прямоугольном треугольнике MS_2N имеем $|MN|=\frac{\sqrt{5}}{3}a$, $|MS_2|=(1-x)a$, $|S_2M|=xa$, следовательно, по теореме Пифагора $\frac{5}{9}a^2=(1-x)^2a^2+x^2a^2$, $9x^2-9x+2=0$. Корни этого уравнения суть $x_1=2/3$, $x_2=1/3$. Таким образом, возможны два положения отрезка MN, удовлетворяющие условию задачи. Первому соответствует рис. 229, второму — рис. 230.

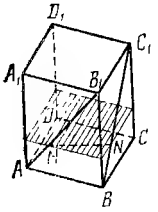


Рис. 230.

Ответ: $|AM|:|AB_1|=|BN|:|BC_1|=2/3$ или $|AM|:|AB_1|=|BN|:|BC_1|=1/3$. ▲

Замечание. При решении этой задачи через прямую MN была проведена плоскость, параллельная плоскости $ABCD$. Имеет место следующая теорема:

через прямую, параллельную данной плоскости, можно провести и притом только одну плоскость, параллельную данной.

□ Для доказательства через какую-либо точку данной прямой проведем вторую прямую, параллельную данной плоскости. Эти две прямые и определяют плоскость, параллельную данной. Единственность следует из того, что через точку можно провести только одну плоскость, параллельную данной плоскости. ■

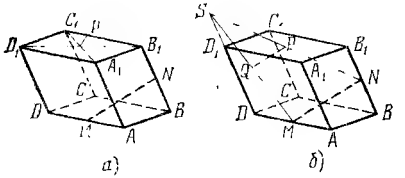


Рис. 231.

Задача 9. Точки M и N — середины ребер AD и BB_1 параллелепипеда (рис. 231, *а*), $|MN|=a$, диагонали грани $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P параллельно прямой MN, пересекает плоскость AA_1D_1D в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

Для решения этой задачи можно использовать сечение параллелепипеда плоскостью MNP. А именно, построить линию пересечения плоскостей MNP и AA_1D_1D, найти на ней точку Q, и т. д. (построения указаны на рис. 231, *б*). Иногда в подобных задачах о параллельных прямых и плоскостях удается избежать каких-либо построений. Например, для решения этой задачи воспользуемся двумя простыми теоремами:

1) *отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя различными параллельными плоскостями, имеют равные длины;*

2) *если две пересекающиеся в точке O прямые пересечены двумя параллельными плоскостями в точках A и A_1, B и B_1 соответственно, то* $|AO|/|OA_1|=|BO|/|OB_1|$. Доказательства этих теорем легко восстановить по рис. 232, 233.

Решим данную задачу.

△ Пусть R — точка пересечения прямой PQ с плоскостью BB_1C_1C. Согласно первой из указанных теорем, отрезки QR и MN параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями AA_1D_1D и BB_1C_1C, имеют равные длины, т. е. $|QR| = |MN| = a$. Отрезки QR и D_1B_1, заключенные между теми же

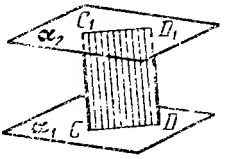


Рис. 232.

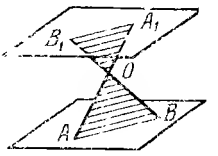


Рис. 233.

параллельными плоскостями, пересекаются в точке P, причем $|D_1P| : |PB_1| = 1$. Тогда согласно второй теореме и $|QP| : |PR| = 1$, т. е. $|QP| = |PR| = a/2$. Ответ: $a/2$. ▲

В этом решении вообще не требуется никакого рисунка.

Замечание. В дополнение к теоремам 1) и 2) укажем еще одну теорему:

если прямые a и b пересечены тремя параллельными плоскостями в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно, то $|A_1A_2| : |A_2A_3| = |B_1B_2| : |B_2B_3|$.

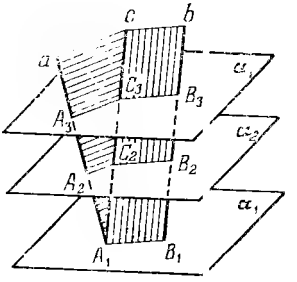


Рис. 234.

Доказательство можно найти, исходя из рис. 234. Прямые a и b могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися. Используя это утверждение, в задаче 8 (рис. 229) можно было сразу утверждать, что $|BN| : |BC_1| = |AM| : |AB_1|$.

§ 2. Применение критериев коллинеарности и компланарности векторов в решении задач

Критерии коллинеарности и компланарности (гл. VI) векторов служат основой для применения векторной алгебры в решении стереометрических задач. Они позволяют выразить в виде векторных равенств различные утверждения о расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Переход от векторных равенств к скалярным происходит на основе единственности разложения вектора по двум неколлинеарным или трем некомпланарным векторам. Проиллюстрируем это рядом примеров.

1°. *Для того чтобы три различные точки A, B, C лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ были коллинеарны, т. е. чтобы существовало число λ такое, что* $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Доказательство этого утверждения сразу вытекает из определения коллинеарных векторов и из того, что векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ отложены от одной точки A (рис. 235).

Задача 1. В параллелепипеде (рис. 236) через середину M ребра BC проведена прямая, пересекающая прямые AC_1 и DD_1 соответственно в точках N и P. Найти отношение $|MN|:|NP|$.

△ Три не компланарных вектора $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$ обозначим для краткости соответственно $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Остальные векторы будем раскладывать по этим трем.

Точка N лежит на прямой AC_1, поэтому вектор $\vec{NA}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{AC_1}$, т. е. $\vec{NA}=x\vec{AC_1}$. Для вектора $\vec{AC_1}$ имеем разложение $\vec{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, значит, $\vec{NA}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

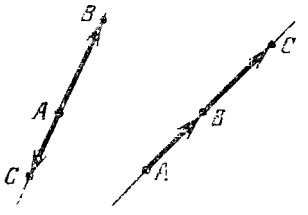


Рис. 235.

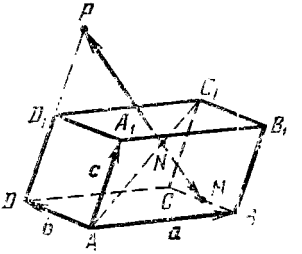


Рис. 236.

Вектор $\vec{NM}$ является суммой векторов $\vec{NA}$, $\vec{AB}$ и $\vec{BM}$: $\vec{NM}=\vec{NA}+\vec{AB}+\vec{BM}$. Подставляя сюда разложение вектора $\vec{NA}$ и учитывая, что $\vec{AB}=\boldsymbol{a}$, $\vec{BM}=\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, получаем

$$\vec{NM}=(1+x)\,\boldsymbol{a}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}.$$

Вектор $\vec{DP}$ коллинеарен вектору $\vec{DD_1}$, а $\vec{DD_1}=\boldsymbol{c}$, поэтому $\vec{DP}=y\boldsymbol{c}$. Теперь из того, что $\vec{NP}=\vec{NA}+\vec{AD}+\vec{DP}$, находим

$$\vec{NP}=x\boldsymbol{a}+(1+x)\,\boldsymbol{b}+(x+y)\,\boldsymbol{c}.$$

Согласно сформулированному выше утверждению 1°, для того чтобы точки M, N и P лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы имело место векторное равенство

$$\vec{NM}=\lambda\vec{NP}.$$

Подставляя сюда разложения векторов $\vec{NM}$ и $\vec{NP}$, получаем

$$(1+x)\,\boldsymbol{a}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}=\lambda x\boldsymbol{a}+\lambda(1+x)\,\boldsymbol{b}+\lambda(x+y)\,\boldsymbol{c}.$$

Это векторное равенство в силу единственности разложения равносильно системе трех скалярных:

$$\begin{cases} 1+x=\lambda x, \\ \frac{1}{2}+x=\lambda(1+x), \\ x=\lambda(x+y). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\lambda=-1/2$, $x=-2/3$, $y=2$. Таким образом, $\overrightarrow{NM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$, откуда $|\overrightarrow{NM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{NP}|$.

Ответ: 1 : 2. ▲

2°. Пусть A_1 и A_2 — различные точки прямой a, B_1 и B_2 — различные точки прямой b.

Для того чтобы прямые a и b были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ были коллинеарны, т. е. чтобы существовало такое число λ, что

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Доказательство этого утверждения сразу следует из определения коллинеарных векторов и из того, что отрезок A_1A_2 лежит на прямой a, а отрезок B_1B_2 — на прямой b (рис. 237).

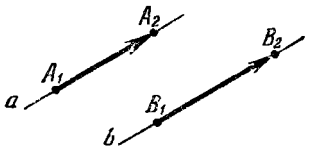


Рис. 237.

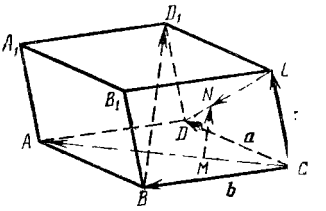


Рис. 238.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, AC и DC_1 — диагонали его граней. Доказать, что существует и притом единственная пара точек $M\in(AC)$ и $N\in(DC_1)$ такая, что $(MN)\parallel(BD_1)$. Найти отношение $|MN|:|BD_1|$.

△ Пусть M — точка прямой AC, а N — точка прямой C_1D (рис. 238). Для параллельности прямых MN и BD_1 согласно утверждению 2° необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что

$$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{BD_1}. \qquad (1)$$

Найдем разложения векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, которые обозначим соответственно $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Имеем $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}$. Здесь $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}. \qquad (2)$$

Вектор $\overrightarrow{MN}$ представим в виде суммы: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1N}$. Здесь вектор $\overrightarrow{MC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{CA}$, поэтому $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{CA}$. Но $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, значит, $\overrightarrow{MC}=x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$. Вектор $\overrightarrow{C_1N}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{C_1D}$, а $\overrightarrow{C_1D}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, значит, $\overrightarrow{C_1N}=y\overrightarrow{C_1D}=y\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{c}$. Отсюда находим

$$\overrightarrow{MN}=(x+y)\,\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+(1-y)\,\boldsymbol{c}. \qquad (3)$$

Подставляя разложения (2) и (3) в (1), получаем

$$(x+y)\,\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+(1-y)\,\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}.$$

Это векторное равенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+y=\ \ \lambda, \\ \ \ \ x=-\lambda, \\ 1-y=\ \ \lambda. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\lambda=1/3$, $x=-1/3$, $y=2/3$. Значит, существует и притом единственное положение точек M и N, при котором $(MN)\parallel(BD_1)$. Это положение задается найденными значениями x и y: $\overrightarrow{CM}=-x\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1N}=\frac{2}{3}\overrightarrow{C_1D}$. При этом $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD_1}/3$, и значит, $|MN|=|BD_1|/3$. Ответ: 1/3. ▲

В двух предыдущих задачах от векторного равенства, выражающего геометрическое содержание задачи, совершался переход к равносильной ему системе трех скалярных уравнений и решалась эта система. Подчеркнем, что векторное равенство равносильно именно системе уравнений. Если даже для ответа требуется значение лишь одного из неизвестных (в рассмотренных задачах это λ), нельзя ограничиваться нахождением только этого значения. Следует проверить, что полученная система имеет решение. Случается и так, что значение одного неизвестного может быть найдено, а система и вместе с ней задача решения не имеют.

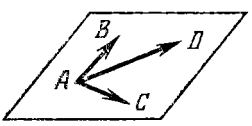


Рис. 239.

3°. *Для того чтобы различные точки A, B, C и D лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ были компланарны, т. е. чтобы существовали такие числа α и β, что*

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}.$$

Доказательство вытекает из определения компланарных векторов и из того, что векторы AB, AC и AD (а значит, и векторы $\alpha\overrightarrow{AB}$ и $\beta\overrightarrow{AC}$) отложены от одной точки A (рис. 239).

Задача 3. Через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Определить, в каком отношении она делит диагональ параллелепипеда, выходящую из той же вершины.

△ Возьмем произвольную вершину параллелепипеда, обозначим ее A, остальные вершины обозначим, как показано на рис. 240. Пусть M — точка прямой AC_1. Для того чтобы точки A_1, B, D, M лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1M}$ были компланарны, т. е. чтобы существовали числа α и β такие, что

$$\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1B} + \beta\overrightarrow{A_1D}. \qquad (4)$$

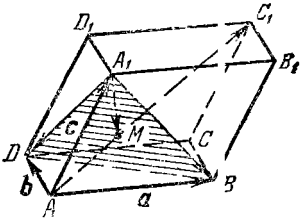


Рис. 240.

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{c}$. Разложим векторы в (4) по этим трем векторам. Имеем $\overrightarrow{A_1B} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{A_1D} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$. Далее, $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM}$. Здесь $\overrightarrow{A_1A} = -\boldsymbol{c}$, а вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AC_1}$, т. е. $\overrightarrow{AM} = x\cdot\overrightarrow{AC_1} = x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Значит, $\overrightarrow{A_1M} = x\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + (x-1)\boldsymbol{c}$. Подставляя найденные разложения в (4), получаем

$$x\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + (x-1)\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} - (\alpha+\beta)\boldsymbol{c},$$

откуда

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ x = \beta, \\ x - 1 = -\alpha - \beta. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 1/3$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/3$. Таким образом, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC_1}/3$, т. е. плоскость BDA_1 отсекает треть диагонали AC_1, считая от вершины A. Отсюда $|AM| : |MC_1| = 1 : 2$.

Ответ: 1 : 2. ▲

Из (4) получим еще $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D})$. Это означает, что M — точка пересечения медиан треугольника BA_1D. Иными словами, диагональ AC_1 пересекает треугольник BA_1D в точке пересечения его медиан.

Задачу 3 можно решить еще проще, используя сечения. Сделайте это самостоятельно.

4°. Пусть a и b различные прямые, A_1 и A_2 — точки прямой a, $A_1 \neq A_2$, B_1 и B_2 — точки прямой b, $B_1 \neq B_2$.

Для того чтобы прямые a и b пересекались, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ были компланарны, т. е. чтобы существовали такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{B_1B_2}.$$

□ Необходимость. Если прямые a и b пересекаются, то точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат в одной плоскости, и, следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ компланарны

Достаточность. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}=\alpha\overrightarrow{A_1A_2}+\beta\overrightarrow{B_1B_2}$. Отложим от точки A_1 вектор $\overrightarrow{A_1M}=\alpha\overrightarrow{A_1A_2}$. Его конец, точка M, принадлежит прямой a. От точки B_1 отложим вектор $\overrightarrow{B_1N}=-\beta\overrightarrow{B_1B_2}$, его конец, точка N, принадлежит прямой b. Из векторного равенства

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N},$$

выражая правую часть через векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$, получаем

$$\overrightarrow{MN}=-\alpha\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha\overrightarrow{A_1A_2}+\beta\overrightarrow{B_1B_2}-\beta\overrightarrow{B_1B_2}=0.$$

Из определения нулевого вектора следует, что точки M и N совпадают, т. е. прямые a и b пересекаются. ■

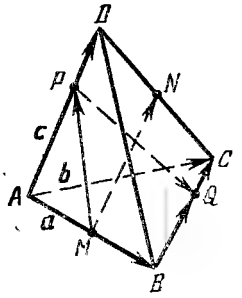


Рис. 241.

Задача 4. Точки M и N — середины ребер тетраэдра (рис. 241), точки P и Q расположены на ребрах AD и BC так, что отрезки MN и PQ пересекаются, а $|AP|:|AD|=2:3$. Найти отношение $|BQ|:|BC|$.

△ Для того чтобы прямые MN и PQ пересекались, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{MP}=\alpha\overrightarrow{MN}+\beta\overrightarrow{PQ}. \qquad (5)$$

Разложим векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$. Имеем $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$, и так как $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, то

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

Обозначим $|BQ|:|BC|=x$. Тогда $\overrightarrow{BQ}=x\overrightarrow{BC}=x(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. Учитывая, что $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$, а $\overrightarrow{PA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$, получаем

$$\overrightarrow{PQ}=(1-x)\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}.$$

Наконец, находим $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

Подставляя полученные разложения в (5), имеем

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}=\left(\beta(1-x)-\frac{\alpha}{2}\right)\boldsymbol{a}+\left(\frac{\alpha}{2}+\beta x\right)\boldsymbol{b}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{3}\beta\right)\boldsymbol{c},$$

откуда

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \beta(1-x) - \frac{\alpha}{2}, \\ 0 = \frac{\alpha}{2} + \beta x, \\ \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\beta. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\beta = -1/2$, $x = 2/3$, $\alpha = 2/3$. Следовательно, $|BQ| : |BC| = 2 : 3$.

Ответ: 2 : 3. ▲

Таким же образом, как это сделано в предыдущих примерах, можно выразить в виде векторных равенств условия параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей и т. д.

§ 3. Угол между прямыми в пространстве

Для любых двух прямых в стереометрии введено понятие угла между ними.

Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все четыре угла, образованные пересекающимися прямыми, конгруэнтны, то угол между ними равен 90° (или $\pi/2$ радиан).

Если две прямые параллельны, то угол между ними считают равным 0°.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым [1]).

В этом определении точка, через которую проводятся две пересекающиеся прямые, может быть выбрана произвольно, угол между скрещивающимися прямыми от этого не зависит. Это вытекает из следующей теоремы:

если пересекающиеся прямые a и b параллельны соответственно пересекающимся прямым a_1 и b_1, то угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1.

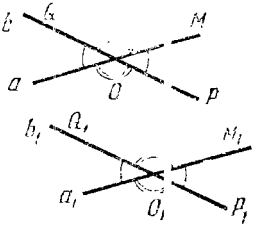


Рис. 242

□ Для доказательства выделим на каждой паре параллельных прямых сонаправленные лучи и воспользуемся тем, что два выпуклых угла с сонаправленными сторонами конгруэнтны (рис. 242): $[OM) \uparrow\uparrow [O_1M_1)$, $[OP) \uparrow\uparrow [O_1P_1)$, следовательно, $\angle POM \cong \angle P_1O_1M_1$ и т. д. ■

Из определений угла между прямыми и из указанной теоремы следует, что

[1]) Термин «угол», обозначающий в этих определениях величину, употребляется также и как название геометрической фигуры. Из текста бывает ясно, в каком смысле употребляется этот термин.

если прямые a и b параллельны соответственно прямым a_1 и b_1, то угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b_1.

Задача 1. Найти угол между прямыми, на которых лежат диагонали AB_1 и BC_1 граней куба (рис. 243, *а*).

△ Данные диагонали лежат на скрещивающихся прямых. Диагональ AD_1 грани ADD_1A_1 параллельна диагонали BC_1, поэтому угол между прямыми AD_1 и AB_1 равен углу между прямыми BC_1 и AB_1.

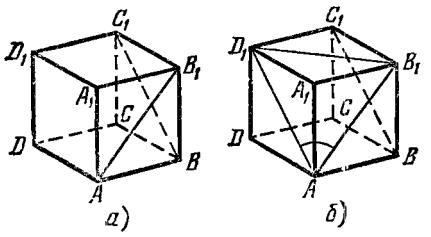


Рис. 243.

Рассмотрим треугольник AB_1D_1 (рис. 243, *б*). Каждая его сторона — диагональ грани куба. Длины этих диагоналей равны, значит, треугольник AB_1D_1 равносторонний и $\widehat{B_1AD_1} = 60°$. Мы нашли угол между лучами AB_1 и AD_1, он оказался острым, поэтому угол между прямыми AD_1 и AB_1 имеет ту же величину.

Ответ: 60°. ▲

Задача 2. В правильной треугольной призме (рис. 244) $|AA_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}|AB|$. Найти угол между прямыми AB_1 и BC_1.

△ Совершим параллельный перенос $\overrightarrow{B_1C_1}$ диагонали AB_1, образ точки A обозначим A_2 (рис. 244, *б*). Угол между прямыми AB_1

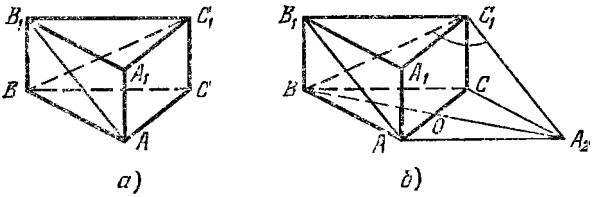


Рис. 244.

и BC_1 равен углу между прямыми BC_1 и C_1A_2. Имеем $[AA_2] \| [B_1C_1] \| [BC]$, $|AA_2| = |B_1C_1| = |BC|$. Следовательно, четырехугольник $ABCA_2$ — параллелограмм и более того, ромб, поскольку $|BC| = |AB|$. Точка O — центр этого ромба, поэтому BO — высота в треугольнике ABC. Обозначим $|AB| = a$, тогда $|BO| = a\sqrt{3}/2$, $|BA_2| = a\sqrt{3}$. Учитывая, что $|BB_1| = a/\sqrt{5}$, в треугольниках BB_1A и BB_1C_1 находим $|AB_1| = |BC_1| = \sqrt{6/5}\,a$. Отрезок A_2C_1 — образ отрезка AB_1 при параллельном переносе, поэтому $|A_2C_1| = |AB_1| = \sqrt{6/5}\,a$. Теперь в треугольнике BC_1A_2 по теореме косинусов находим

$$\cos \widehat{BC_1A_2} = \frac{|BC_1|^2 + |C_1A_2|^2 - |BA_2|^2}{2|BC_1||C_1A_2|} = -\frac{1}{4},$$

откуда $\widehat{BC_1A_2} = \arccos(-1/4)$. Угол между лучами C_1B и C_1A_2 оказался тупым ($\pi/2 < \arccos(-1/4) < \pi$), следовательно, угол между прямыми C_1B и C_1A_2 является дополнительным к этому углу: $\left(\widehat{C_1B,\ C_1A_2}\right) = \pi - \arccos(-1/4)$. Воспользовавшись тождеством $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$, $(|x| \leqslant 1)$, получим что $\left(\widehat{C_1B,\ C_1A_2}\right) = \arccos(1/4)$.

Ответ: $\arccos(1/4)$. ▲

В двух рассмотренных задачах нахождение угла между прямыми сводилось к нахождению угла между лучами с общей вершиной, параллельными данным прямым. Если α — угол между прямыми, то угол между лучами может оказаться равным или α или $\pi - \alpha$. Это обстоятельство необходимо учитывать, особенно в тех задачах, где по заданному углу между прямыми требуется найти другие параметры многогранника.

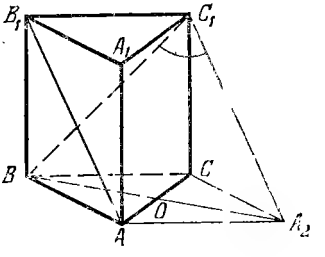


Рис. 245.

Задача 3. В правильной треугольной призме (рис. 244, *а*) угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен $\arccos(1/4)$, сторона основания имеет длину a. Найти длину бокового ребра.

△ Обозначим длину бокового ребра b. Выполним такие же построения, как и при решении задачи 2. Рассмотрим два случая: 1) $\widehat{BC_1A_2} = \arccos(1/4)$ (рис. 245); 2) $\widehat{BC_1A_2} = \pi - \arccos(1/4)$ (рис. 244, *б*).

Имеем $|C_1A_2| = |AB_1| = |BC_1| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|BA_2| = a\sqrt{3}$. В треугольнике BC_1A_2 по теореме косинусов находим в первом случае: $3a^2 = 2(a^2+b^2)\left(1 - \frac{1}{4}\right)$, аналогично во втором случае: $3a^2 = 2(a^2+b^2)\left(1 + \frac{1}{4}\right)$. Отсюда соответственно $b_1 = a$, $b_2 = a/\sqrt{5}$. Таким образом, задача имеет два решения. Второй случай соответствует данным задачи 2.

Ответ: a или $a/\sqrt{5}$. ▲

§ 4. Применение скалярного произведения векторов в решении задач

Скалярное произведение векторов можно использовать для нахождения углов между прямыми, длин отрезков, расстояния от точки до прямой и т. д.

Из формулы

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}}\right),$$

которая является определением скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, следует, что

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Применим эту формулу для нахождения угла между прямыми. Пусть A_1 и A_2 — некоторые точки прямой a, $A_1 \neq A_2$, B_1 и B_2 — точки прямой b, $B_1 \neq B_2$. Величина φ угла между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ лежит в пределах от 0 до π и определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_2}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}|}.$$

Угол α между прямыми a и b лежит в пределах от 0 до $\pi/2$. Если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, то $\alpha = \varphi$ и $\cos\alpha = \cos\varphi = |\cos\varphi|$, если же $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi$, то $\alpha = \pi - \varphi$, а $\cos\alpha = -\cos\varphi = |\cos\varphi|$. Значит,

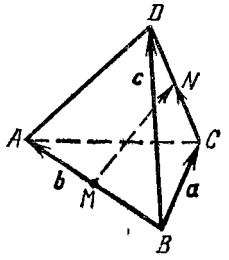


Рис. 246.

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_2}|}{A_1A_2 \cdot B_1B_2}.$$

Из этой формулы следует:

для того чтобы прямые a и b были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_2} = 0.$$

Задача 1. В правильном тетраэдре точки M и N — середины ребер AB и CD (рис. 246), $|AB| = a$. Найти:

1) длину отрезка MN;

2) угол между прямыми MN и BC.

3) Доказать, что прямая MN перпендикулярна ребрам AB и CD.

△ Обозначим $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{c}$. Имеем

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = a, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = a^2/2.$$

Раскладываем вектор $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Поскольку $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, а $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

1) Находим

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \frac{a^2}{2}.$$

Отсюда $|MN| = a/\sqrt{2}$.

2) Вычисляем $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\frac{a^2}{2}$, и учитывая, что $|\overrightarrow{MN}|=a/\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC}|=a$, получаем

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}})=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}})=\pi/4$.

3) Находим последовательно:

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2}\right)=0,$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}((\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}))=$$

$$=\frac{1}{2}(c^2-a^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\left(a^2-a^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=0.$$

Отсюда и следует, что $(MN)\perp(AB)$, $(MN)\perp(CD)$.

Ответ: 1) $a/\sqrt{2}$; 2) $\pi/4$. ▲

Задача 2. В тетраэдре $ABCD$ имеем $|AB|=|BC|$, $|AD|=|DC|$. Доказать, что ребра AC и BD перпендикулярны.

△ Выберем три некомпланарных вектора: $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}$ (рис. 247). Имеем $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. По условию $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$. Отсюда следует, что $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2$, $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2$. Учитывая, что $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, получаем $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, т. е. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=0$. Поскольку $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BD}$, то $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, т. е. $(AC)\perp(BD)$. ▲

Следствие. *В правильной треугольной пирамиде, в частности, в правильном тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны.*

В задаче 1 было доказано, что прямая, проходящая через середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, перпендикулярна этим ребрам.

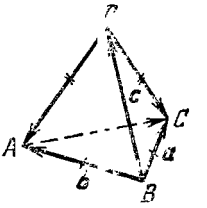


Рис. 247.

Имеет место утверждение:

для любых двух скрещивающихся прямых существует и притом единственная прямая, пересекающая обе данные прямые и перпендикулярная каждой из них.

Отрезок, имеющий концы на двух скрещивающихся прямых и перпендикулярный этим прямым, называется их *общим перпендикуляром*. Среди всех отрезков, концы которых лежат на двух скрещивающихся прямых, общий перпендикуляр имеет наименьшую длину. Поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Задача 3. Ребро куба имеет длину a. Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.

△ Рассмотрим, например, диагонали AC и A_1B граней куба (рис. 248). Пусть M — точка прямой AC, N — точка прямой A_1B. Условие перпендикулярности отрезка MN прямым AC и A_1B равносильно тому, что

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \qquad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0. \tag{1}$$

Разложим векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$. Имеем $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BA_1}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$. Далее, поскольку точка M лежит на прямой AC, а точка N — на прямой A_1B, то $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{BN}=y\overrightarrow{BA_1}$. Учитывая это, находим $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-x\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{a}+y\overrightarrow{BA_1}=(1-x-y)\,\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$.

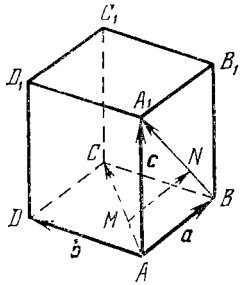


Рис. 248.

Подставляем разложения векторов в уравнения (1) и преобразуем эти уравнения:

$$\begin{cases}((1-x-y)\,\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0,\\ ((1-x-y)\,\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1-x-y)\,a^2-xa^2=0,\\ ya^2-(1-x-y)\,a^2=0,\end{cases} \quad \begin{cases}1-2x-y=0,\\ -1+x+2y=0\end{cases}$$

Отсюда находим $x=y=1/3$. Значит, точки M и N лежат на отрезках AC и BA_1 и $|AM|=|AC|/3$, $|BN|=|BA_1|/3$.

Теперь имеем $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$, значит,

$$|MN|=\sqrt{\frac{1}{9}(a^2+a^2+a^2)}=\frac{a}{\sqrt{3}}. \ ▲$$

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Доказать, что

а) отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в точке (обозначим ее O), которая делит каждый из этих отрезков в отношении 3 : 1, считая от вершины;

б) отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в той же точке O, которая является серединой каждого из них.

2. Длина каждого ребра тетраэдра $ABCD$ равна a. На ребрах DA, DC и BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $|DM|=|CN|=a/3$, $|CP|=a/5$. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP и найти длину отрезка BQ, где $Q=(MNP)\cap(AB)$.

3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Построить сечение пирамиды, проходящее через вершину A и середины M и P ребер SB и SD. Определить, в каком отношении сечение делит ребро SC.

4. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q, а на ребре CD — точки P и N так, что

$|AM|=|C_1Q|=|CP|=|DN|=a/3$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через прямую MP параллельно прямой NQ, и найти площадь этого сечения.

5. Длины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$ равны соответственно a и b, угол между прямыми AC и BD равен φ. Найти наибольшую площадь сечения тетраэдра, параллельного прямым AC и BD.

6. Даны прямая a и плоскость γ, точки A_1 и A_2 лежат на прямой a ($A_1 \neq A_2$), точки M, N и P, не лежащие на одной прямой, принадлежат плоскости γ. Доказать: для того чтобы прямая a и плоскость γ были параллельны необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$ были компланарны, т. е. чтобы существовали числа α и β такие, что

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha\overrightarrow{MN}+\beta\overrightarrow{MP}.$$

7. Точки M, N и P соответственно — середины ребер AB, CD и BC тетраэдра $ABCD$. Через точку P проведена плоскость, параллельная прямым DM и AN. В каком отношении эта плоскость разделяет ребро AD?

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершин A_1 и B опущены перпендикуляры A_1P и BQ на диагональ AC_1. Найти длину отрезка PQ, если $|AB|=a$, $|AD|=b$, $|AA_1|=c$.

9. Каждое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней призмы взяты соответственно точки M и N так, что $(MN)\perp(AB)$, $|MN|=\frac{a}{\sqrt{3}}$. В каком отношении точки M и N делят отрезки AB_1 и BC_1?

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Доказать, что если плоскость параллельна одной из двух параллельных прямых, то она параллельна и другой прямой.

2. Две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости. Следует ли отсюда, что эти плоскости параллельны?

3. Две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости. Доказать, что эти плоскости параллельны.

4. Две плоскости параллельны. Доказать, что прямая, параллельная одной из этих плоскостей, параллельна и другой плоскости.

5. Доказать, что если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

6. Как следует провести плоскость γ, чтобы она пересекала две данные плоскости α и β по параллельным прямым?

7. Доказать, что через данную прямую можно провести плоскость, параллельную другой данной прямой. При каком условии такая плоскость единственная?

8. Доказать, что через любую точку можно провести плоскость и притом только одну, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

9. Даны скрещивающиеся прямые a и b и точка M. Построить прямую, проходящую через M и пересекающую a и b. Найти множество всех точек M, для которых задача не имеет решения.

10. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Доказать, что существует прямая, пересекающая эти три данные прямые. Единственна ли такая прямая?

11. Могут ли параллельные проекции скрещивающихся прямых на плоскость: а) быть параллельными, б) совпадать?

12. Может ли параллельная проекция тетраэдра на плоскость быть: а) трапецией; б) параллелограммом; в) пятиугольником?

13. Может ли параллельная проекция параллелепипеда на плоскость быть: а) трапецией; б) пятиугольником; в) шестиугольником?

14. Доказать, что если параллельная проекция плоского четырехугольника на плоскость есть параллелограмм, то и сам четырехугольник — параллелограмм.

15*. Параллельная проекция равностороннего треугольника на плоскость оказалась также равносторонним треугольником. Доказать, что длины сторон этих треугольников равны.

16. В четырехугольной призме одна из диагоналей пересекает три другие. Доказать, что эта призма — параллелепипед.

17. Скрещивающиеся диагонали AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют равные длины. Доказать, что грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — ромбы, а остальные грани — прямоугольники.

18. На ребрах SA, SB и SC пирамиды $SABC$ расположены соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Прямые A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 пересекают соответственно прямые AB, BC и CA в точках M, N и P. Доказать, что точки M, N и P лежат на одной прямой.

19. На ребрах AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$ расположены соответственно точки M и P так, что $|AM| : |AB| = |DP| : |DC| = 1 : 3$. Найти площадь сечения тетраэдра, проведенного через точки M и P параллельно прямой AC, если ребро тетраэдра имеет длину a.

20. На ребрах AA_1, CC_1, C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $|AM| : |AA_1| = |C_1N| : |C_1C| = |C_1P| : |C_1D_1| = 1 : 2$. Построить точку Q пересечения плоскости MNP с прямой BC и найти отношение $|BQ| : |BC|$.

21. Плоскость пересекает боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно в точках M, N, P и Q, причем $|AM| : |AA_1| = m$, $|BN| : |BB_1| = n$, $|CP| : |CC_1| = p$. Найти отношение $|DQ| : |DD_1|$.

22. Через вершину C тетраэдра $ABCD$ и середины ребер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит отрезок MN, где M и N — соответственно середины ребер AB и CD.

23. На ребрах A_1B_1, AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $|A_1M| : |A_1B_1| = |BN| : |BA| = |C_1P| : |C_1C| = 1 : 2$. Построить точку Q пересечения плоскости MNP с прямой B_1C_1 и найти отношение $|C_1Q| : |B_1C_1|$.

24. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы основания ABC пересекаются в точке M, а диагонали граней AA_1C_1C и BB_1C_1C — в точках N и P соответственно. Плоскость MNP пересекает прямые B_1C_1 и CC_1 в точках K и L соответственно. Построить сечение призмы этой плоскостью, и найти отношения $|B_1K| : |B_1C_1|$ и $|C_1L| : |CC_1|$.

25. Плоскость пересекает ребра AB, AC, CC_1 и BB_1 призмы $ACA_1B_1C_1$ соответственно в точках K, L, M и N. Площади фигур AKL, CLM и $CMNB$ равны соответственно 1/6, 1/12 и 1/2 площади той грани, в которой каждая из них находится. Найти отношение площади треугольника BKN к площади грани AA_1B_1B.

26. В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD, вершину C и точку N ребра BD такую, что $|BN|:|ND|=2:1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделяет отрезок KL, где K и L — соответственно середины ребер AB и CD?

27. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. На ребре SD взята точка L так, что $|SL|:|LD|=2$, точка K — середина ребра SB. Построить сечение пирамиды плоскостью AKL и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC.

28. Основанием пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$. Отношение длин оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Построить сечение пирамиды, проходящее через вершину D и середины ребер SA и SB. Определить, в каком отношении сечение делит ребро SC.

29. Через середины M и N соответственно ребер AA_1 и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение, параллельное диагонали BD основания. Построить сечение и определить, в каком отношении оно делит диагональ A_1C параллелепипеда.

30. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 параллелепипеда. В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1?

31. Точки O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке OO_1 взята точка S так, что $|O_1S|:|OS|=1:3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найти площадь сечения, если ребро куба имеет длину a.

32. Среди всех сечений куба, проходящих через его диагональ, указать то, которое имеет наименьшую площадь. Найти эту площадь, если ребро куба имеет длину a.

33. Рассматриваются сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D$ плоскостями, параллельными скрещивающимся диагоналям AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C. Указать сечение с максимальной площадью.

34. Плоскость пересекает ребра AB, AC, DC и DB тетраэдра соответственно в точках M, N, P и Q, причем $|AM|:|MB|=m$, $|AN|:|NC|=n$, $|DP|:|PC|=p$. Найти отношение $|DQ|:|QB|$.

35. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину a, а боковое ребро — длину l. Параллельно ребру SA и диагонали BD основания проводятся сечения. Найти наибольшую площадь сечения.

36. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

1. Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $|BM|:|BC_1|=1:3$. Найти его длину.

2. Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

37. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины боковых ребер BB_1 и CC_1. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC про-

ведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 соответственно в точках P и Q. Найти отношение $|PQ| : |QQ_1|$.

38. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ADB, и на этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что $(EF) \parallel (BC)$. Найти отношение $|EF| : |BC|$.

39. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1. Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $|CA_1| = a$.

40. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Через середину отрезка SO проведена прямая, параллельная медиане BM грани SAB. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если $|BM| = a$.

41. На ребрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $|AM| : |AD| = |BN| : |BD| = m$. Найти расстояние между точками пересечения медиан треугольников ANC и BMC, если $|AB| = a$.

42. Ребро правильного тетраэдра имеет длину a. Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Доказать, что периметр p сечения удовлетворяет неравенствам $2a < p \leqslant 3a$.

43. Даны точки A, B, C, D. Точки M и N — середины отрезков AB и CD, точка O — середина отрезка MN (если отрезок вырождается в точку, то его середину считаем совпадающей с этой точкой).

Доказать, что для любой точки S

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

44. Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что существует и притом только одна точка M такая, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}.$$

45. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AB и A_1D_1. Плоскость CMN пересекает прямые B_1C_1 и DB_1 соответственно в точках P и Q. Найти разложения векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{c}$.

46. Даны четыре различные точки A, B, C, D. На отрезках AC и BD взяты соответственно точки M и N так, что $|AM| = \lambda |AC|$, $|BN| = \lambda |BD|$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$ компланарны, и найти разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

47. Даны четыре различные точки A, B, C, D. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Доказать, что если $|MN| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$, то $(AB) \perp (CD)$.

48. Даны скрещивающиеся прямые a и b и на них соответственно точки A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 (A_2 между A_1 и A_3, B_2 между B_1 и B_3). Известно, что $|A_1A_2| : |A_2A_3| = |B_1B_2| : |B_2B_3|$. Доказать, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 лежат на одной прямой.

49. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Проведена прямая, пересекающая прямые AA_1, BC и C_1D_1 соответственно в точках M, N и P так, что $|MN| : |MP| = 2$. Найти отношение $|BN| : |BC|$ (найти все решения).

50. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые DA_1, AB_1 и D_1M параллельны одной плоскости. Найти длину отрезка D_1M.

51. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $|AM|:|AD|=1:5$. Найти отношение $|CN|:|CA_1|$.

52. Даны четыре точки A, B, C, O, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что для того чтобы точка M лежала в плоскости ABC, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа x, y, z, удовлетворяющие двум условиям:

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC},\quad x+y+z=1.$$

53. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость пересекает ребра SA, SB, SC и SD соответственно в точках M, N, P и Q. Пусть $|SA|:|SM|=m$, $|SB|:|SN|=n$, $|SC|:|SP|=p$, $|SD|:|SQ|=q$. Доказать, что

$$m+p=n+q.$$

54. Центр нижнего основания куба соединен прямыми с четырьмя вершинами верхнего основания. Определить углы между этими прямыми.

55. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми а) BK и BC_1; б) BK и AD_1; в) BK и A_1C_1.

56. Точка M — середина ребра CD правильного тетраэдра $ABCD$. Найти угол между прямыми AM и BC.

57. Точки M и N — середины ребер BC и AD тетраэдра $ABCD$, в котором $|AC|=|BD|$, а угол между прямыми AC и BD равен α. Найти угол между прямыми MN и AC (найти все решения).

58. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют одинаковую длину. Найти угол между прямыми: а) AM и BN, где M и N — середины ребер SB и SC соответственно; б) SP и BN, где P — середина ребра AB.

59. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $|AC|=|BD|$ и $(AC)\perp(BD)$. На ребрах AD и CB взяты соответственно точки M и N так, что $|AM|:|AD|=|CN|:|CB|$ и $(\widehat{MN, AC})=\frac{1}{2}(\widehat{MN, BD})$. Найти отношение $|AM|:|AD|$.

60. Ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны и $|AB|=|CD|=a$. На ребре AB взяты точки M и N, а на ребре CD — точки P и Q так, что $|AM|=|NB|=|CP|=|QD|=\lambda a$ $(\lambda<1/2)$. Найти расстояние между серединами отрезков MP и NQ.

61. Даны три некомпланарных вектора. Существует ли четвертый вектор, перпендикулярный трем данным?

62. Даны три попарно перпендикулярные прямые. Четвертая прямая образует с данными прямыми соответственно углы α_1, α_2, α_3. Доказать, что $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$.

63. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что

$$|AA_1|^2\leqslant\frac{1}{4}(|AB_1|^2+|BC_1|^2+|CD_1|^2+|DA_1|^2).$$

64. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}=\pi/2$, $(\widehat{AB, CD})=\alpha$, $2|AD|=|CD|=|BC|$. Найти угол между прямыми AD и BC.

65. Точка M — середина ребра A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точка N — центр грани ABB_1A_1. Найти угол между прямыми MD и CN.

66. Два ребра тетраэдра перпендикулярны скрещивающимся с ними ребрам. Доказать, что и два других скрещивающихся ребра тетраэдра перпендикулярны.

67. Отрезок AB является общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым l_1 и l_2 ($A\in l_1$, $B\in l_2$). На прямых l_1 и l_2 взяты соответственно точки C и D так, что $AC=BD=AB=\frac{1}{2}CD$. Найти угол между прямыми l_1 и l_2.

68. Угол между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равен α, отрезок AB является их общим перпендикуляром ($A\in l_1$, $B\in l_2$). На прямых l_1 и l_2 взяты соответственно точки C и D так, что $AC=BD=a$, $CD=b$. Найти $|AB|$ (найти все решения). При каком соотношении между a и b задача имеет решение при любом α?

69. Сторона основания правильной треугольной призмы имеет длину a, две непересекающиеся диагонали боковых граней призмы перпендикулярны. Найти длину бокового ребра призмы.

70. На диагоналях граней D_1A, A_1B, B_1C, C_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M, N, P, Q так, что $D_1M:D_1A=BN:BA_1=|B_1P|:|B_1C=DQ:|DC_1=\lambda$, а прямые MN и PQ перпендикулярны. Найти λ.

71. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на прямых AB_1 и BC_1, перпендикулярные прямой AC_1. Найти наименьшую длину таких отрезков.

72. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях D_1A и A_1B взяты соответственно точки M и N так, что $D_1M:D_1A=NB:|A_1B=1:3$. Найти расстояние от вершины C до прямой MN.

73. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые D_1M, DA_1, AB_1 параллельны одной плоскости. Найти: а) расстояние от точки M до прямой AB_1; б) площадь сечения куба плоскостью MD_1B_1.

74. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно что, $|AD|:|DC|=n$. В каком отношении общий перпендикуляр прямых AA_1 и B_1D делит отрезки AA_1 и B_1D?

75. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены высоты DE и BF граней ABD и BDC. В каком отношении разделены отрезки DE и BF основаниями их общего перпендикуляра?

76. Длина каждого ребра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a, все плоские углы при вершине A имеют величину $\pi/3$. Определить расстояние между прямыми AC и DB_1.

77. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

78. Длины ребер AB и BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно a и $2a$. Известно, что существует прямая, пересекающая прямые AA_1, BC и C_1D_1 и образующая с ними равные углы. Найти длину ребра AA_1 (найти все решения).

79. Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N — середины ребер AC и A_1B_1 соответственно, точки M_1 и N_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямую BC_1. Найти длину бокового ребра призмы, если $M_1N_1 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

80. Пусть S — площадь треугольника ABC. Доказать, что

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2 \cdot |AC|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}.$$

81. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. На ребрах AD и BD взяты соответственно точки E и F так, что $|DE| : |EA| = |BF| : |FD| = 2$. Найти площадь треугольника CEF.

82. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, но попарно не коллинеарны, вектор $\boldsymbol{d}$ не компланарен с векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Известно, что $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = (\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}}) = \pi/3$, $(\widehat{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}}) = \alpha$, $(\widehat{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}}) = \beta$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{c}$.

83. Четыре луча, выходящие из одной вершины, образуют попарно углы равной величины. Найти эту величину.

84. Длина ребра куба равна a. Найти сумму скалярных произведений векторов, начала которых находятся в центре куба, а концы в его вершинах.

85. Даны точки A, B, C, O, причем точки A, B и C не лежат на одной прямой. Известно, что для любых точек M величина $y(M) = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - 3|MO|^2$ имеет одно и то же значение. Доказать, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

86*. В пространстве даны различные точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой. Пусть S — произвольная точка пространства, обозначим

$$y(S) = |SA|^2 + |SC|^2 - |SB|^2 - |SD|^2.$$

Доказать, что

а) $y(S)$ имеет одно и то же значение для всех точек пространства тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма;

б) если существуют четыре такие точки S_1, S_2, S_3, S_4, не лежащие в одной плоскости, что $y(S_1) = y(S_2) = y(S_3) = y(S_4) = 0$, то A, B, C, D — вершины прямоугольника.

Для данной величины y_0 найти множество точек S пространства, для которых $y(S) = y_0$.

87. Основание пирамиды — правильный восьмиугольник со стороной длины a, вершина пирамиды удалена от центра основания на расстояние b. Найти сумму квадратов длин боковых ребер.

88. Даны точки A, B, C и D. Найти точку M такую, что величина $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2$ имеет наименьшее значение.

89. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C, D

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(|AD|^2+|BC|^2-|AC|^2-|BD|^2\right).$$

90. В пространстве даны четыре точки A, B, C и D ($A\neq C$, $B\neq D$), точки P и Q соответственно — середины отрезков AC и BD. Доказать, что

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|AD|^2=|AC|^2+|BD|^2+4|PQ|^2.$$

91. Даны точки A, B, C, D ($A\neq B$, $C\neq D$). Доказать: для того чтобы прямые AB и CD были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$2|AB|\cdot|CD|=||AD|^2+|BC|^2-|AC|^2-|BD|^2|.$$

Глава XVI
СТЕРЕОМЕТРИЯ (ЧАСТЬ II)

В этой главе рассмотрим различные задачи, связанные с перпендикулярностью прямых и плоскостей, задачи о вычислении угла между прямой и плоскостью, между плоскостями, о нахождении объемов многогранников и их частей, задачи на комбинации многогранников.

§ 1. Перпендикулярные прямые и плоскости

Прямая и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости — таково определение перпендикулярных прямой и плоскости.

Задача 1. Основание пирамиды — правильный треугольник ABC (рис. 249), боковые ребра SA, SB, SC имеют равные длины. Доказать, что пирамида $SABC$ правильная.

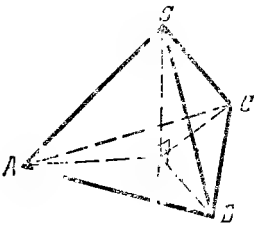


Рис. 249.

△ Пусть SO — высота пирамиды, тогда из определения перпендикулярных прямой и плоскости следует, что углы SOA, SOB, SOC прямые. Обозначим $|SA|=|SB|=|SC|=l$, $|SO|=h$. Из прямоугольных треугольников SOA, SOB и SOC находим, что $|AO|=|BO|=|CO|=\sqrt{l^2-h^2}$. Значит, точка O — центр окружности, описанной около правильного треугольника ABC, а потому является центром этого треугольника. Таким образом вершина S данной пирамиды проектируется в центр основания (правильного треугольника ABC), т. е. пирамида правильная. ▲

Совершенно аналогично доказывается, что пирамида, основание которой правильный многоугольник, а боковые ребра имеют равные длины, правильная. В частности, правильный тетраэдр, т. е. тетраэдр, все ребра которого имеют равные длины, — правильная пирамида. За основание можно принять любую грань правильного тетраэдра.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости состоит в следующем:

если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эти прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Задача 2. Доказать, что диагональ AC основания правильной четырехугольной призмы (рис. 250) перпендикулярна плоскости BB_1D_1D.

△ Достаточно доказать, что прямая AC перпендикулярна каким-либо двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости BB_1D_1D. Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $(AC) \perp (BD)$. Докажем, что $(AC) \perp (BB_1)$. Данная призма — правильная, поэтому $(BB_1) \perp (ABCD)$. Отсюда согласно определению перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $(BB_1) \perp (AC)$. Таким образом, прямая AC перпендикулярна пересекающимся прямым BD и BB_1 плоскости BB_1D_1D. Это согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости означает, что $(AC) \perp (BB_1D_1D)$. ▲

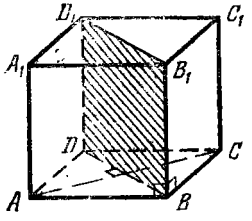


Рис. 250.

При установлении перпендикулярности прямых часто используется *теорема о трех перпендикулярах:*

для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Следует тетко различать и соответственно использовать достаточное и необходимое условия, выраженные в этой теореме. Достаточное условие состоит в том, что

если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.

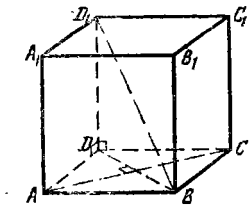


Рис 251.

Задача 3. Доказать, что диагональ BD_1 куба (рис. 251) перпендикулярна диагонали AC грани $ABCD$.

△ Прямая BD является проекцией наклонной BD_1 на плоскость $ABCD$, поскольку $(D_1D) \perp (ABCD)$. Грань $ABCD$ — квадрат, значит, $(AC) \perp (BD)$. Отсюда в силу достаточного условия теоремы о трех перпендикулярах следует, что $(AC) \perp (BD_1)$. ▲

Из доказанного утверждения вытекает полезное

Следствие. *Диагональ куба, выходящая из некоторой его вершины, перпендикулярна плоскости, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из этой же вершины.*

□ Рассмотрим, например, диагональ BD_1 (рис. 252). Доказано, что $(BD_1) \perp (AC)$. Совершенно аналогично устанавливается, что $(BD_1) \perp (AB_1)$. Отсюда следует, что $(BD) \perp (AB_1C)$. Из свойств симметрии куба ясно, что аналогичный факт имеет место и для любой другой диагонали куба. ■

Необходимое условие сформулированной выше теоремы о трех перпендикулярах заключается в следующем:

если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

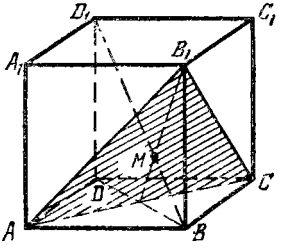


Рис. 252.

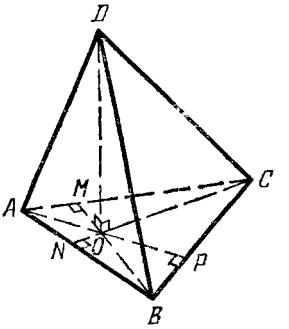


Рис. 253.

Задача 4. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD, а ребро AC — ребру BD. Доказать, что основание высоты DO тетраэдра является точкой пересечения высот (или их продолжений) треугольника ABC.

△ Рассмотрим сначала случай, когда ни одно из ребер BD и CD не перпендикулярно плоскости ABC, т. е. каждое из этих ребер лежит на прямой, наклонной к плоскости ABC. Поскольку $(DO) \perp (ABC)$ (рис. 253), то прямая BO — проекция прямой BD на плоскость ABC. Прямая AC, лежащая в плоскости ABC, перпендикулярна по условию наклонной BD. Отсюда согласно необходимому условию теоремы о трех перпендикулярах следует, что $(AC) \perp (BO)$. Совершенно аналогично доказывается, что $(CO) \perp (AB)$. Таким образом, точка O — это точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника ABC.

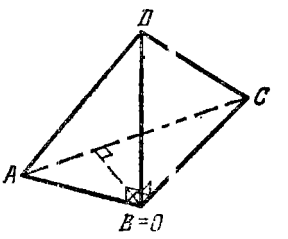


Рис. 254.

Теперь обратимся к случаю, когда одно из ребер, пусть это будет, например, ребро BD, перпендикулярно плоскости ABC (рис. 254). В этом случае точка O совпадает с точкой B, прямая CD является наклонной к плоскости ABC, и ее проекцией на эту плоскость является прямая (BC). Согласно необходимому условию теоремы о трех перпендикулярах, из того, что $(AB) \perp (CD)$, следует, что $(AB) \perp (BC)$. Значит, треугольник ABC прямоугольный, и точка B является точкой пересечения его высот. ▲

Рассмотрим задачу, которую легко решить, применив признак перпендикулярности двух плоскостей:

если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Задача 5. Доказать, что в правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости AD_1C и BB_1D_1D перпендикулярны.

△ В задаче 2 было доказано, что $(AC) \perp (BB_1D_1D)$ (рис. 255). Отсюда согласно признаку перпендикулярности плоскостей и следует, что $(AD_1C) \perp (BB_1D_1D)$. ▲

Укажем еще две теоремы, полезные при установлении перпендикулярности прямой и плоскости. Первая из них состоит в том, что

если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения этих плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

Задача 6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины B_1 на плоскость AD_1C, если $|AB| = a$, $|AA_1| = b$.

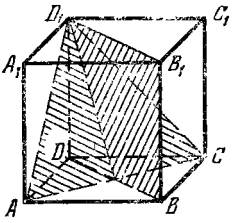


Рис. 255.

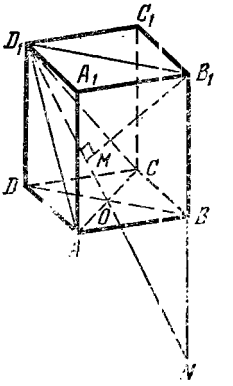


Рис. 256.

△ В задаче 5 доказано, что плоскости AD_1C и BB_1D_1D перпендикулярны. Линией пересечения этих плоскостей является прямая DO (рис. 256). Пусть B_1M — перпендикуляр, проведенный в плоскости BB_1D_1D к прямой DO. Тогда по указанной выше теореме $(B_1M) \perp (AD_1C)$. Пусть $N = (D_1O) \cap (BB_1)$. В прямоугольном треугольнике NB_1D_1 ($\widehat{NB_1D_1} = 90°$) имеем $|B_1D_1| = a\sqrt{2}$ и, очевидно, $|NB_1| = 2b$. Следовательно,

$$|ND_1| = \sqrt{|NB_1|^2 + |B_1D_1|^2} = \sqrt{4b^2 + 2a^2}.$$

Отрезок B_1M является высотой в треугольнике NB_1D_1. Тогда для площади этого треугольника имеем, с одной стороны, $S = \frac{1}{2}|NB_1| \cdot |B_1D_1|$, а с другой — $S = \frac{1}{2}|ND_1| \cdot |B_1M|$. Отсюда $|B_1M| \cdot |ND_1| = |B_1D_1| \cdot |NB_1|$, т. е.

$$|B_1M| = \frac{|B_1D_1| \cdot |NB_1|}{|ND_1|} = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}. \blacktriangle$$

Вторая теорема гласит:

если две пересекающиеся плоскости α *и* β *перпендикулярны плоскости* γ, *то и линия пересечения плоскостей* α *и* β *перпендикулярна плоскости* γ.

Попытайтесь самостоятельно доказать эту теорему (см. задачу 1 из I раздела этой главы).

§ 2. Об изображении на рисунках перпендикулярных прямых и плоскостей. Построение сечений, перпендикулярных прямой или плоскости

В стереометрии основой для выполнения рисунков пространственных фигур служит параллельное проектирование на плоскость чертежа. Параллельные проекции обладают, как известно, рядом простых свойств. Например, при параллельном проектировании сохраняются параллельность прямых, отношение длин параллельных отрезков. Но в то же время при параллельном проектировании, вообще говоря, не сохраняются величины углов. На рис. 257 даны изображения куба в параллельной проекции. Грань AA_1B_1B расположена параллельно плоскости чертежа, и поэтому ее проекция — квадрат, конгруэнтный самой грани. Грань $ABCD$ не параллельна плоскости чертежа. Ее изображение — параллелограмм, который уже не конгруэнтен самой грани. Проекцией прямого угла ABC в зависимости от его расположения и от направления проектирования может быть как острый, так и тупой угол. И в общем случае, перпендикуляр,

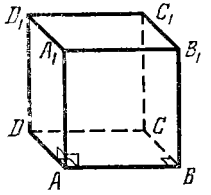
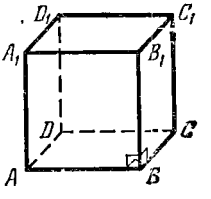


Рис. 257.



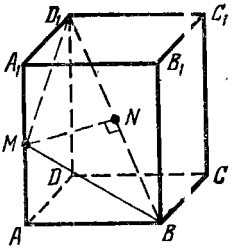


Рис. 258.

проведенный в пространстве из данной точки к данной прямой, на рисунке изображается прямой, вообще говоря, не перпендикулярной изображению данной прямой. Для того чтобы правильно показать на рисунке такой перпендикуляр, определяют обычно положение его основания относительно каких-либо заданных на рисунке точек данной прямой.

Задача 1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 258) имеет длину a. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из середины M ребра AA_1 к прямой BD_1, и найти длину этого перпендикуляра.

△ Рассмотрим треугольник MBD_1. Перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую BD_1, является высотой этого треугольника. Обозначим $|AA_1| = b$, тогда $|AM| = |MA_1| = b/2$. В прямоугольных треугольниках MAB и MA_1D_1 находим $|MB| = |MD_1| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$. Значит, треугольник MBD_1 равнобедренный, а его высота из вершины M является и медианой, т. е. основание этой высоты — середина отрезка BD_1. Соединив точку M и середину N диагонали BD_1, получим изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую BD_1.

Теперь, учитывая, что $|BD_1| = \sqrt{2a^2 + b^2}$, $BN = \frac{1}{2}|BD_1|$, из прямоугольного треугольника MNB находим $|MN| = \sqrt{|MB|^2 - |BN|^2} = a\sqrt{2}$. ▲

Для того чтобы изобразить на рисунке перпендикуляр, проведенный в пространстве из данной точки на данную плоскость, обычно определяют положение его основания относительно заданных на рисунке точек этой плоскости.

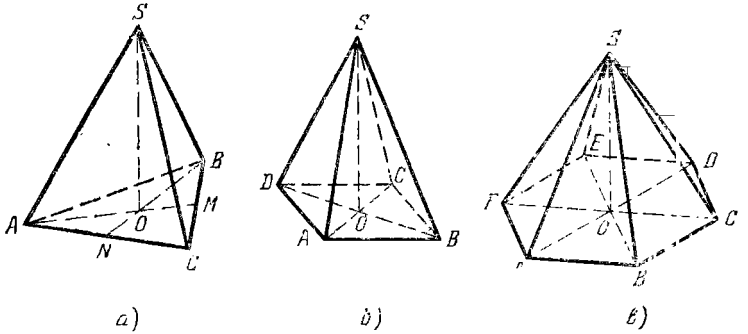


Рис. 259.

Построим, например, на рисунке правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 259, *а*) ее высоту SO ($\triangle ABC$ — основание пирамиды). Основанием высоты правильной пирамиды согласно определению является центр основания этой пирамиды. Центр правильного треугольника ABC совпадает с точкой пересечения его медиан. В соответствии с этим на рис. 259, *а* построены медианы AM и BN. Точка O их пересечения будет изображением основания высоты.

Основание высоты правильной четырехугольной пирамиды (рис. 259, *б*) находим как точку пересечения диагоналей параллелограмма, изображающего основание этой пирамиды — квадрат $ABCD$. Аналогично находится на рисунке правильной шестиугольной пирамиды (рис. 259, *в*) основание ее высоты.

Построение перпендикуляра к прямой или к плоскости часто используется при построении сечения фигуры плоскостью, перпендикулярной данной прямой или плоскости.

На рис. 260 *а*, *б* показано построение сечения правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через середину M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды. Секущую плоскость обозначим α. Поскольку $(CN) \perp \alpha$, то и $(ABC) \perp \alpha$. Отсюда следует, что перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC, принадлежит плоскости α. Этот перпендикуляр параллелен высоте пирамиды из вершины S. На основании этого анализа делаем следующие построения: строим высоту SO пирамиды и проводим $[MS_1] \parallel [SO]$ (рис. 260, *а*). Сторона сечения, лежащая в грани ABC, перпендикулярна прямой CN, а значит, параллельна ребру AB. Через точку S_1 проводим $[PQ] \parallel [AB]$ (рис. 260, *б*). Из параллельности PQ и AB следует, что и сторона сечения, лежащая в грани ASB, параллельна ребру AB. Строим $[MR] \parallel [AB]$. Сечение — трапеция $PMRQ$

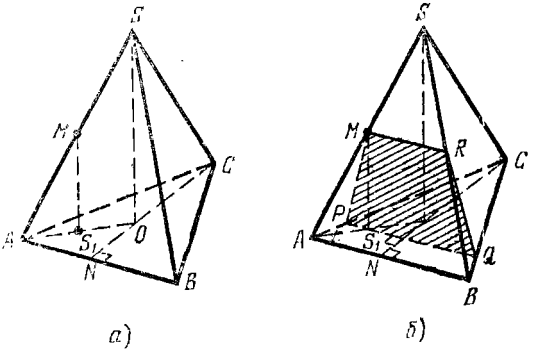


Рис. 260.

Рассмотрим еще один пример построения сечения, перпендикулярного прямой.

Задача 2. Построить сечение куба, проходящее через середину M ребра AA_1 (рис. 261, *а*) перпендикулярно диагонали B_1D куба, и определить, в каком отношении оно делит эту диагональ.

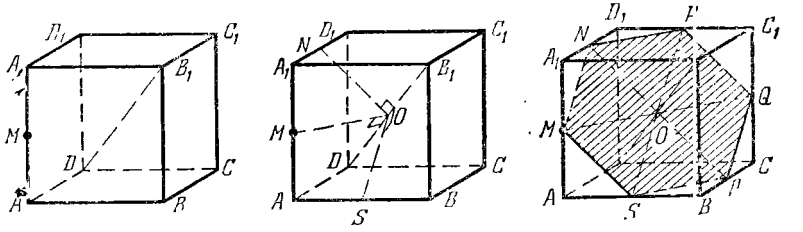
△ Как и в задаче 1 этого параграфа легко доказать, что перпендикуляр из точки M на прямую B_1D проходит через середину O отрезка B_1D. Точно также и перпендикуляр из середины N ребра A_1D_1 на прямую B_1D проходит через точку O (рис. 261, б). Значит, плоскость сечения проходит через точки M, N и O и, в частности, делит диагональ B_1D пополам. Построим само сечение. Для этого докажем, что плоскость сечения проходит через середину S ребра AB. Прямая SO, как и прямая MO, перпендикулярна прямой B_1D. Поэтому и плоскость MOS, как и плоскость MON, перпендикулярна прямой B_1D. Но тогда эти плоскости совпадают, т. е. $S \in (MON)$. Теперь можно воспользоваться результатом задачи 2 из § 1 главы XV. Там было доказано, что сечение куба плоскостью MNS — правильный шестиугольник

(рис. 261, *в*) с вершинами в серединах ребер, не пересекающих диагональ B_1D.

Ответ: 1 : 1. ▲

Рассмотрим пример построения сечения, перпендикулярного данной плоскости.

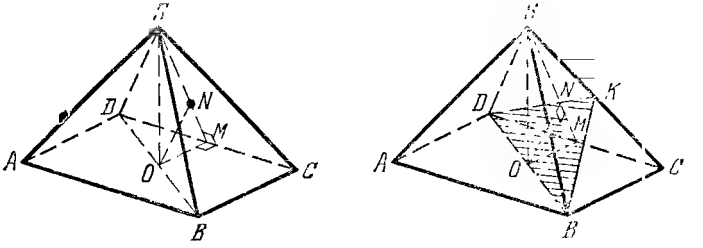
Задача 3. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеет длину a. Построить сечение, проходящее через диагональ BD основания (рис. 262, *а*) перпендикулярно грани SCD, и найти его площадь.



а) *б)* *в)*

Рис. 261.

△ Сначала построим перпендикуляр из какой-либо точки прямой BD к плоскости CSD. Этот перпендикуляр принадлежит плоскости сечения и вместе с прямой BD полностью определяет ее. Построение удобно выполнить из центра O основания $ABCD$. Действительно, плоскость SOM, где M — середина ребра CD (рис. 262, *а*), перпендикулярна плоскости CSD ($(CD) \perp (SOM)$, $(CD) \subset (CSD)$). Поэтому высота треугольника SOM, проведенная из вершины O, будет перпендикуляром к плоскости CSD. Опре-



а) *б)*

Рис. 262.

делим, в каком отношении основание N этой высоты делит сторону SM. В прямоугольном треугольнике SOM ($\widehat{SOM} = 90°$) имеем $|OM| = a/2$, $|SM| = a\sqrt{3}/2$. По свойству прямоугольного треугольника $|OM|^2 = |MN| \cdot |SM|$, откуда $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. Значит, $|MN| =$

$= \frac{1}{3}|SM|$ и точка N — центр правильного треугольника CSD. Проводим медиану DK треугольника CSD (рис. 262, *б*), $N = (DK) \cap (SM)$), получаем сечение — треугольник DKB.

Найдем площадь сечения. Высота h треугольника DKB из вершины B вдвое больше длины перпендикуляра ON, поскольку точка O — середина отрезка BD. В прямоугольном треугольнике SOM имеем $|ON| = \sqrt{|MN| \cdot |SN|} = a/\sqrt{6}$. Следовательно, $h = 2a/\sqrt{6}$ и площадь треугольника DKB равна $\frac{1}{2} h |DK| = a^2/2\sqrt{2}$. ▲

§ 3. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой, наклонной к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°, если прямая и плоскость параллельны, то угол между ними равен 0°.

Задача 1. Найти угол между ребром правильного тетраэдра и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

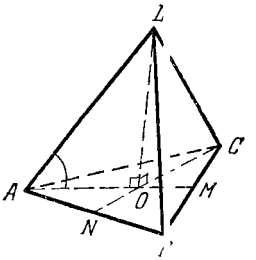


Рис. 263

△ Найдем угол между ребром AD и плоскостью ABC (рис. 263). Длину ребра тетраэдра обозначим a. Опустим перпендикуляр DO на плоскость ABC. Точка O — центр треугольника ABC (задача 1 § 1), поэтому $|AO| = a\sqrt{3}/3$. Прямая AO является проекцией прямой AD на плоскость ABC, значит, угол между прямой AD и этой плоскостью равен $\widehat{DAO}$. Имеем $\cos \widehat{DAO} = |AO|/|AD| = \sqrt{3}/3$, $\widehat{DAO} = \arccos(1/\sqrt{3})$. Легко видеть, что любое ребро правильного тетраэдра составляет с плоскостью любой грани, не содержащей это ребро, угол такой же величины. Ответ: $\arccos(1/\sqrt{3})$. ▲

При определении угла между прямой и плоскостью часто возникают ошибки из-за неправильного нахождения ортогональной проекции прямой на плоскость.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $|AA_1| = |AB|$. Найти угол между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

△ Построим проекцию прямой AB_1 на плоскость AA_1C_1C. Плоскости $A_1B_1C_1$ и AA_1C_1C перпендикулярны, поэтому перпендикуляр B_1M (рис. 264) к прямой A_1C_1 будет и перпендикуляром к плоскости AA_1C_1C. Прямая AM является ортогональной проекцией прямой AB_1 на плоскость AA_1C_1C. Угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C равен $\widehat{B_1AM}$. Обозначим $|AB| = a$, тогда

и $|AA_1|=a$, а $|AB_1|=a\sqrt{2}$. Высота B_1M правильного треугольника $A_1B_1C_1$ равна $a\sqrt{3}/2$. В прямоугольном треугольнике B_1AM имеем

$$\sin\widehat{B_1AM}=|B_1M|/|AB_1|=\sqrt{6}/4, \quad \widehat{B_1AM}=\arcsin(\sqrt{6}/4).$$

Ответ: $\arcsin(\sqrt{6}/4)$. ▲

Замечание. Неверно было бы принять за угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C угол B_1AA_1 (рис. 264). Прямая AA_1 не является ортогональной проекцией прямой AB_1 на плоскость AA_1C_1C, а угол B_1AA_1, равный $\pi/4$, вовсе не является углом между этими прямой и плоскостью.

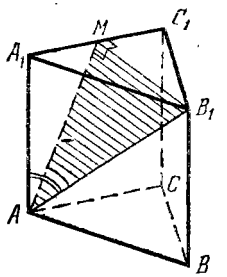


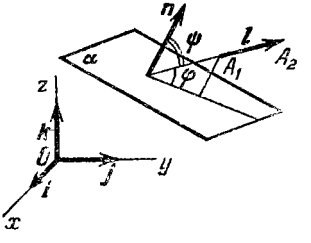
Рис. 264.

Для нахождения угла между прямой и плоскостью можно использовать и координатный метод.

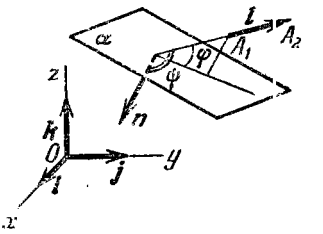
Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат, пусть плоскость α задана уравнением (см. гл. VII, § 8)

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (1)$$

и пусть на прямой a заданы две точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Угол между прямой a и плоскостью α обозначим φ.



а)



б)

Рис. 265.

Рассмотрим два вектора

$$\boldsymbol{n}=(a;\ b;\ c) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{l}=\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Угол φ определяется следующей формулой:

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{l}|}. \qquad (2)$$

Действительно, вектор $\boldsymbol{n}=(a;\ b;\ c)$ перпендикулярен плоскости α, заданной уравнением (1), поэтому, обозначив $\psi=(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l}})$, будем иметь:

если $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$ (рис. 265, *а*);

если $\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \pi$, то $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ (рис. 265, *б*).

В обоих случаях имеем $\sin\varphi = |\cos\psi|$. Отсюда и из того, что $\cos\psi = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{l}|}$ следует формула (2).

В задачах при выводе уравнения плоскости часто используется то, что

уравнение всякой плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$, можно записать в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Задача 3. В правильной четырехугольной призме отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найти угол между диагональю BD_1 призмы (рис. 266) и плоскостью BC_1D.

△ Введем систему координат, как показано на рис. 266 [1]). Длину стороны основания призмы обозначим s, тогда длина бокового ребра равна $2s$. Находим координаты точек B, C_1, D и D_1: $B(s; s; 0)$, $C_1(0; s; 2s)$, $D(0; 0; 0)$, $D_1(0; 0; 2s)$. Плоскость BC_1D проходит через точку $D(0; 0; 0)$, поэтому согласно (3) ее уравнение имеет вид $ax + by + cz = 0$. Подставляя сюда координаты точек B и C_1, получаем систему

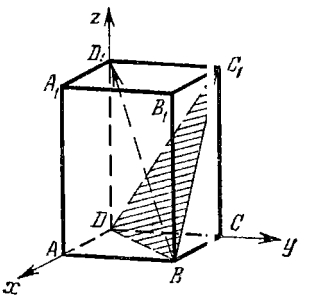


Рис. 266.

$$\begin{cases} as + bs = 0, \\ bs + 2cs = 0, \end{cases}$$

откуда находим, что $a = 2c$, $b = -2c$. Значит, уравнение плоскости BC_1D имеет вид

$$2cx - 2cy + cz = 0.$$

Учитывая, что $c \neq 0$ (иначе все три коэффициента обращаются в нуль), и сокращая, получаем уравнение

$$2x - 2y + z = 0.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{n}$, перпендикулярный плоскости BC_1D, имеет координаты $(2; -2; 1)$. Находим координаты $(p; q; r)$ вектора $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{BD_1}$: $p = 0 - s = -s$, $q = 0 - s = -s$, $r = 2s - 0 = 2s$. Вычисляем:

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = (-s)\cdot 2 + (-s)\cdot(-2) + 2s\cdot 1 = 2s,$$
$$|\boldsymbol{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3, \quad |\boldsymbol{l}| = \sqrt{s^2+s^2+4s^2} = \sqrt{6}\,s.$$

---

[1]) Для простоты на рисунке прямоугольной системы координат не всегда будем изображать базис $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k})$, указывая лишь положительное направление осей.

Обозначим через φ угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D. Находим по формуле (2)

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{l}|} = \frac{2s}{3\cdot\sqrt{6}\cdot s} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

$$\varphi = \arcsin(\sqrt{6}/9). \blacktriangle$$

§ 4. Расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми и плоскостями

Напомним определение расстояния между фигурами: наименьшее среди расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре Φ_1, а другая — фигуре Φ_2, называется *расстоянием между фигурами* Φ_1 *и* Φ_2.

Если точка не принадлежит плоскости, то расстояние от этой точки до плоскости, как известно, равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то расстояние между ними равно нулю. Ранее в этой главе уже встречалась задача о нахождении расстояния от точки до плоскости (задача 6 § 1). Укажем другие способы нахождения этого расстояния.

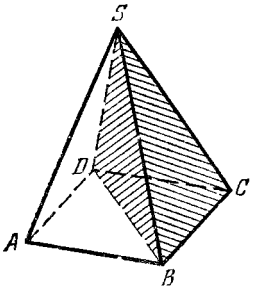


Рис. 267.

Если известен объем V пирамиды и площадь Q ее основания, то высота H пирамиды определяется по формуле

$$H = 3V/Q.$$

Эта высота есть не что иное как расстояние от вершины пирамиды до плоскости ее основания.

Задача 1. Площадь боковой поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды равны соответственно S и V. Найти расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину.

△ Найдем расстояние от вершины B до плоскости SCD (рис. 267). Рассмотрим пирамиду $SBCD$. Она имеет общую с пирамидой $SABCD$ высоту из вершины S, а площадь ее основания BCD вдвое меньше площади квадрата $ABCD$. Значит, если обозначить объем этой пирамиды V_1, то $V_1 = V/2$.

Примем за основание пирамиды $SBCD$ грань SCD. Площадь этой грани, очевидно, равна $S/4$. Высота пирамиды $SBCD$, опущенная из вершины B, равна расстоянию от точки B до плоскости SCD, обозначим эту высоту d. Имеем: $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S\cdot d = \frac{1}{12}S\cdot d$. Учитывая, что $V_1 = \frac{1}{2}V$, находим $d = 6V/S$. Результат,

очевидно, не зависит от выбора вершины основания и плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину.

Ответ: $6V/S$. ▲

Для того чтобы найти расстояние от точки до плоскости, можно использовать и координатный метод, а именно,

расстояние ρ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, находится по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (1)$$

(задача 7 из раздела I этой главы).

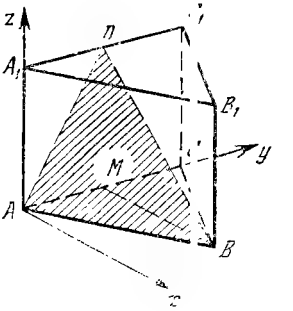


Рис. 268.

Задача 2. В правильной треугольной призме (рис. 268) $|AB|=4$ см, $|AA_1|=3$ см. Найти расстояние от вершины C_1 до плоскости ADB, где D — середина ребра A_1C_1.

△ Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 268. Ось x этой системы и медиана BM треугольника ABC лежат в плоскости основания и перпендикулярны прямой AC, поэтому ось x параллельна прямой BM. Заметим, что заштрихованная часть плоскости ADB не является сечением призмы. Находим координаты точек A, B, D и C_1: $A(0; 0; 0)$, $B(2\sqrt{3}; 2; 0)$, $D(0; 2; 3)$, $C_1(0; 4; 3)$. По известным координатам точек A, B, D найдем уравнение плоскости ADB так же, как это сделано в задаче 3 § 3, получим

$$\sqrt{3}x-3y+2z=0.$$

Расстояние ρ от точки $C_1(0; 4; 3)$ до этой плоскости находим по формуле (1):

$$\rho = \frac{|\sqrt{3}\cdot 0-3\cdot 4+2\cdot 3|}{\sqrt{3+9+4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 3/2 см. ▲

Задачи о нахождении расстояний между прямой и параллельной ей плоскостью, между параллельными плоскостями сводятся к нахождению расстояния от точки до плоскости. Это вытекает из следующих двух утверждений:

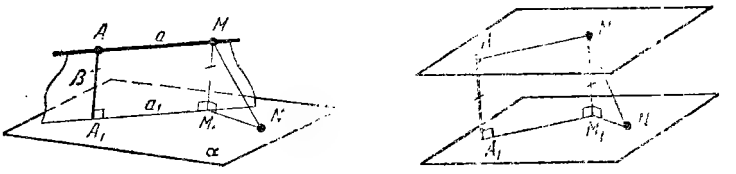
расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от произвольной точки прямой до данной плоскости;

расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости.

Докажем первое из этих утверждений (рис. 269, *а*), второе доказывается совершенно аналогично (рис. 269, *б*).

□ Пусть $a \parallel \alpha$, $a \not\subset \alpha$ (если $a \subset \alpha$, то расстояние между ними, очевидно, равно нулю). Пусть A — произвольная точка прямой a,

$[AA_1] \perp \alpha$ (рис. 269, *а*). Нужно доказать, что расстояние между a и α равно $|AA_1|$. Через прямую a и точку A_1 проведем плоскость β, тогда $\beta \perp \alpha$. Пусть $a_1 = \beta \cap \alpha$, тогда $a_1 \| a$. Возьмем произвольные точки $M \in a$, $N \in \alpha$. В плоскости β проведем перпендикуляр MM_1 к прямой a_1, тогда, очевидно, $|MM_1| = |AA_1|$.



а) *б)*

Рис. 269.

Кроме того, $[MM_1] \perp \alpha$ (поскольку $\beta \perp \alpha$), а значит, $|MN| \geqslant |MM_1|$. Отсюда и следует, что $|MN| \geqslant |AA_1|$. Таким образом, $|AA_1|$ — наименьшее среди расстояний между точками прямой a и плоскости α, т. е. $|AA_1|$ — расстояние между этими фигурами. ■

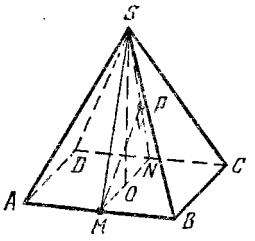


Рис. 270.

Задача 3. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и сторона ее основания равны a. Найти расстояние между прямой AB и плоскостью SCD.

△ Проведем плоскость через вершину S пирамиды и середины M и N ребер AB и CD (рис. 270). Эта плоскость перпендикулярна плоскости SCD. Перпендикуляр MP на прямую SN является также перпендикуляром к плоскости SCD. Его длина и равна расстоянию между прямой AB и плоскостью SCD. Высота SO пирамиды и отрезок MP являются высотами треугольника SMN. В этом треугольнике имеем: $|MN| = a$, $|SO| = a$, $|SN| = \sqrt{|SO|^2 + |ON|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} a$. Площадь треугольника SMN равна, с одной стороны, $\frac{1}{2} |MN| \cdot |SO|$, а с другой, $\frac{1}{2} |SN| \cdot |MP|$. Отсюда находим $|MP| = \frac{|MN| \cdot |SO|}{|SN|} = \frac{2}{\sqrt{5}} a$.

Ответ: $2a/\sqrt{5}$. ▲

Задача 4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1, если $|AB| = a$.

Диагональ A_1C (рис. 271) куба перпендикулярна плоскостям AB_1D_1 и BDC_1 (следствие из задачи 3 § 1 этой главы). Из результата задачи 3 § 2 гл. XV следует, что плоскости AB_1D и BDC_1 делят диагональ A_1C на три конгруэнтных отрезка, т. е., если M

и N — точки пересечения диагонали A_1C с этими плоскостями, то $|A_1M| = |MN| = |NC| = \frac{1}{3}|A_1C|$. Длина отрезка MN равна расстоянию между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Поскольку $|A_1C| = \sqrt{3}\,a$, то $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

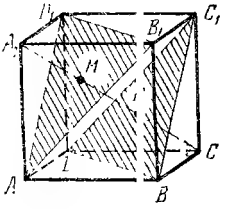


Рис. 271.

Ответ: $a\sqrt{3}/3$. ▲

Расстояние между скрещивающимися прямыми, как известно, равно длине их общего перпендикуляра.

Задача 5. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD имеют длину a, остальные ребра — длину b. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

△ Пусть M и N — середины ребер AB и CD (рис. 272). В равнобедренных треугольниках ABC и ABD находим $|CM| = |DM| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Треугольник CMD равнобедренный, поэтому $[MN] \perp (CD)$. Аналогично устанавливаем, что треугольник ANB равнобедренный ($|AN| = |NB|$), поэтому $[MN] \perp (AB)$. Значит, MN — общий перпендикуляр прямых AB и CD. Из треугольника CMN находим $|MN| = \sqrt{|CM|^2 - |CN|^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

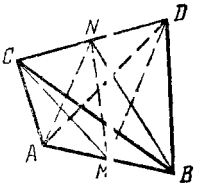


Рис. 272.

Ответ: $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$. ▲

Следствие. *В правильном тетраэдре с ребром a отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер, являются общими перпендикулярами к этим ребрам, и длина каждого из этих отрезков равна $a/\sqrt{2}$.*

Для того чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, не обязательно строить их общий перпендикуляр. Две скрещивающиеся прямые всегда можно заключить в две параллельные плоскости. Схема построения одной из этих плоскостей (через прямую b) показана на рис. 273: B — произвольная точка прямой b, $a_1 \parallel a$, $a_1 \cap b = B$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \alpha$. Расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от любой точки прямой a до плоскости α. Через прямую a также можно провести плоскость β, параллельную плоскости α. Расстояние между плоскостями α и β равно расстоянию между прямыми a и b.

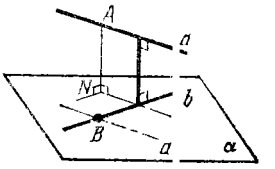
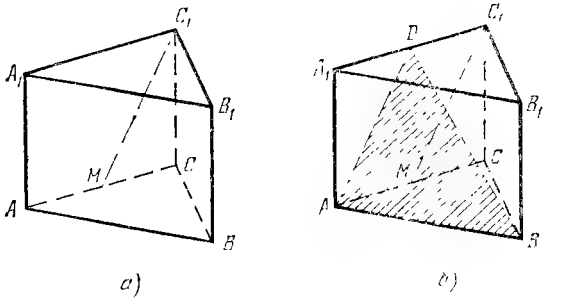


Рис. 273.

Задача 6. В правильной треугольной призме (рис. 274, *а*) $|AB| = 4$ см, $|AA_1| = 3$ см. Найти расстояние между прямыми AB и C_1M, где M — середина ребра AC.

△ Через точку A в плоскости AA_1C_1C проведем прямую, параллельную прямой C_1M. Ясно, что она пройдет через середину D ребра A_1C_1 (рис. 274, *б*). Плоскость ADB проходит через прямую AB и параллельна прямой C_1M. Расстояние между прямыми



а) *б)*

Рис. 274.

AB и C_1M равно расстоянию от какой-либо точки прямой C_1M до плоскости ADB. В задаче 2 этого параграфа было найдено расстояние от точки C_1 до плоскости ADB, оно равно 3/2 см.

Ответ: 3/2 см. ▲

§ 5. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Биссектор. Трехгранный угол

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. *Линейный угол* — это сечение двугранного угла какой-либо плоскостью, перпендикулярной ребру. Стороны линейного угла перпендикулярны ребру двугранного угла. Для нахождения величины двугранного угла можно построить его линейный угол и найти его величину.

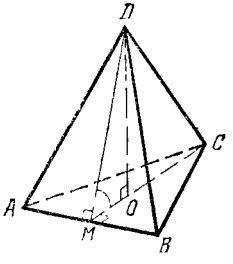


Рис. 275.

Задача 1. Найти величину двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

△ Найдем величину двугранного угла при ребре AB (рис. 275). Пусть DO — высота тетраэдра, DM — высота грани ABD, тогда MO — проекция DM на плоскость ABC, а потому и $[MO] \perp [AB]$. Значит, $\angle DMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре AB. Длину ребра тетраэдра обозначим a, тогда $|DM| = a\sqrt{3}/2$. Точка O — центр грани ABC, поэтому $|MO| = a\sqrt{3}/6$. Из прямоугольного треугольника DMO находим $\cos \widehat{DMO} = |MO|/|DM| = 1/3$. Значит, двугранный угол при ребре AB имеет величину $\arccos(1/3)$. Такую же величину имеют двугранные углы и при других ребрах правильного тетраэдра.

Ответ: $\arccos(1/3)$. ▲

Задача 2. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют одинаковую длину. Найти величину двугранного угла между гранями SBC и SAD.

△ Плоскость SBC проходит через прямую BC, параллельную плоскости SAD ($(BC)\parallel(AD)$, рис. 276). Поэтому линия пересечения плоскостей SBC и SAD — прямая l, проходит через точку S параллельно прямой BC. Прямая l является ребром двугранного угла, величину которого нужно найти. Пусть M и N — середины ребер AD и BC соответственно. Плоскость SMN перпендикулярна ребру l. Действительно, $(BC)\perp(MN)$ и $(BC)\perp(SN)$, значит, $(BC)\perp(SMN)$. Но $l\parallel(BC)$, поэтому и $l\perp(SMN)$. Отсюда следует, что $\angle MSN$ — линейный угол двугранного угла между гранями SBC и SAD. Длину ребра пирамиды обозначим a. Пусть SO — высота пирамиды. Обозначим еще $\widehat{MSN}=\alpha$. В равнобедренном треугольнике MSN имеем $|MN|=a$, $|MS|=|NS|=a\sqrt{3}/2$, $|ON|=a/2$. Отсюда $\sin(\alpha/2)=|ON|/|SN|=1/\sqrt{3}$. Теперь находим $\cos\alpha=1-2\sin^2(\alpha/2)=1/3$, $\alpha=\arccos(1/3)$.

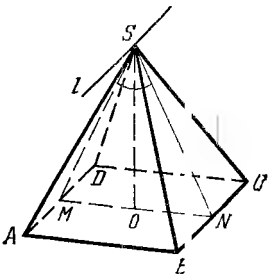


Рис. 276.

Ответ: $\arccos(1/3)$. ▲

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла. Если эти углы конгруэнтны, то плоскости называются перпендикулярными, угол между ними равен $\pi/2$. Если же плоскости не перпендикулярны, то *углом между ними называется меньшая из величин* двугранных углов, образованных ими. Таким образом, угол между плоскостями лежит в пределах от 0 до $\pi/2$.

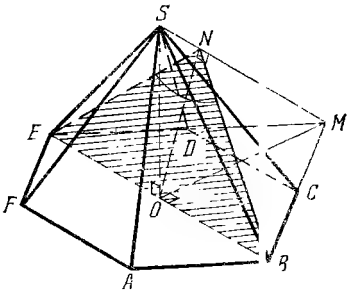


Рис. 277.

Задача 3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ отношение высоты к длине стороны основания равно $\sqrt{6}:4$. Найти угол между плоскостями SBC и SDE.

△ Построим линию пересечения плоскостей SBC и SDE — прямую SM (рис. 277, $M=(BC)\cap(ED)$). Будем искать величину двугранного угла с гранями BSM и ESM, для чего построим сначала его линейный угол.

Пусть O — центр основания пирамиды. Точка O — середина диагонали BE, а поскольку треугольник BME правильный, то $(MO)\perp(BE)$. Прямая MO — проекция прямой SM на плоскость основания (SO — перпендикуляр к этой плоскости), поэтому и $(SM)\perp(BE)$. Пусть ON — высота в треугольнике SOM, тогда из

того, что $(SM) \perp (ON)$ и $(SM) \perp (BE)$, следует, что $(SM) \perp (BNE)$, т. е. $\widehat{BNE}$ — линейный угол двугранного угла $BSME$. Найдем величину угла BNE.

Длину стороны основания пирамиды обозначим a. Тогда $|BE| = |BM| = |EM| = 2a$, и, значит, $|MO| = a\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника SOM находим $|SM| = \sqrt{|SO|^2 + |OM|^2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}a$. Далее находим $|ON| = \frac{|SO| \cdot |OM|}{|SM|} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из симметрии относительно плоскости SOM ясно, что если $\widehat{BNE} = \varphi$, то $\widehat{BNO} = \varphi/2$. Из треугольника BON находим $\operatorname{tg}(\varphi/2) = |BO|/|ON| = \sqrt{3}$, откуда $\varphi = 2\pi/3$. Это и есть величина двугранного угла $BSME$. Поскольку $\varphi > \pi/2$, то угол между плоскостями BSC и ESD равен $\pi - \varphi = \pi/3$.

Ответ: $\pi/3$. ▲

Для нахождения угла между плоскостями можно использовать и координатный метод.

Пусть плоскости заданы уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Угол между этими плоскостями обозначим φ. Тогда (гл. VII, § 8)

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|},$$

где $\boldsymbol{n}_1 = (a_1;\ b_1;\ c_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (a_2;\ b_2;\ c_2)$.

Задача 4. В кубе (рис. 278) точки E, F, M — середины ребер AA_1, AB, CC_1 соответственно. Найти угол между плоскостями EFD и A_1D_1M.

△ Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 278. Длину ребра куба обозначим a и найдем координаты точек: $D(0;\ 0;\ 0)$, $E(a;\ 0;\ a/2)$, $F(a;\ a/2;\ 0)$, $A_1(a;\ 0;\ a)$, $D_1(0;\ 0;\ a)$, $M(0;\ a;\ a/2)$. По известным координатам этих точек найдем уравнение плоскости EFD:

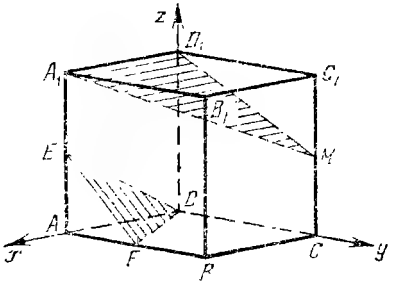


Рис. 278.

$$x - 2y - 2z = 0,$$

и уравнение плоскости A_1D_1M:

$$y + 2z - 2a = 0$$

(заштрихованная на рис. 278 часть плоскости A_1D_1M не является сечением куба). Вектор $\boldsymbol{n}_1 = (1;\ -2;\ -2)$ перпендикулярен плоскости EFD, а вектор $\boldsymbol{n}_2 = (0;\ 1;\ 2)$ — плоскости A_1D_1M. Находим угол φ между этими

плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\varphi = \arccos(2/\sqrt{5}). \blacktriangle$$

Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, разделяющая его на два двугранных угла равной величины.

Границей биссектора является ребро двугранного угла.

Биссектор существует для любого двугранного угла. Построить его можно следующим образом: строим какой-либо линейный угол данного двугранного угла (рис. 279); строим биссектрису этого линейного угла; полуплоскость, определяемая ребром двугранного угла и этой биссектрисой, и является биссектором данного двугранного угла. Докажем это.

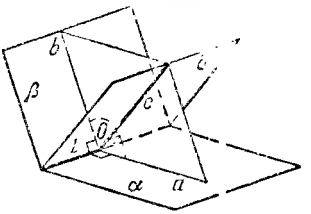


Рис. 279.

□ Плоскость линейного угла aOb (рис. 279) перпендикулярна общему ребру l двугранных углов $\alpha l \delta$ и $\delta l \beta$. Значит, углы aOc и cOb — линейные углы этих двугранных углов. Но c — биссектриса угла aOb, поэтому $\widehat{aOc} = \widehat{cOb}$. Значит, двугранные углы $\alpha l \delta$ и $\delta l \beta$ равны по величине, т. е. δ — биссектор двугранного угла $\alpha l \beta$. ■

Легко также видеть, что биссектор пересекает каждый линейный угол двугранного угла по его биссектрисе. Иначе это можно выразить так:

биссектриса каждого линейного угла принадлежит биссектору данного двугранного угла.

Биссектор двугранного угла обладает рядом свойств, аналогичных свойствам биссектрисы плоского угла.

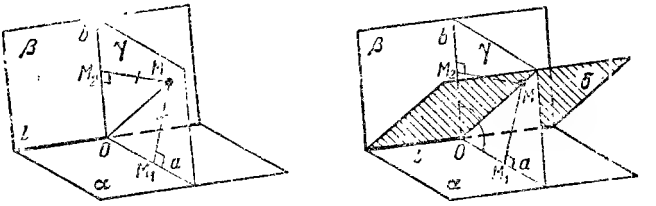
Задача 5. Доказать, что биссектор двугранного угла есть множество точек этого угла, равноудаленных от плоскостей его граней.

□ Множество точек двугранного угла равноудаленных от плоскостей его граней, обозначим X, биссектор — δ.

Докажем, что каждая точка множества X принадлежит биссектору, т. е. что $X \subset \delta$. Отметим сначала, что ребро l двугранного угла (рис. 280 *а*) принадлежит и множеству X и биссектору δ. Вне ребра l в гранях угла нет, очевидно, точек, принадлежащих множеству X. Рассмотрим теперь внутренние точки двугранного угла. Пусть $M \in X$. Проведем через точку M плоскость γ перпендикулярно ребру l (рис. 280, *а*). Сечением двугранного угла будет его линейный угол aOb. Пусть MM_1 и MM_2 — перпендикуляры на прямые, содержащие лучи a и b. Тогда MM_1 и MM_2 будут перпендикулярами к плоскостям граней угла, а значит, $|MM_1| = |MM_2|$, так как $M \in X$. Значит, точка M угла aOb

равноудалена от прямых, на которых лежат его стороны. Из планиметрии известно, что в этом случае точка принадлежит биссектрисе угла aOb. Но тогда вместе с биссектрисой она принадлежит биссектору δ. Тем самым доказано, что $X \subset \delta$.

Замечание. Линейный угол двугранного угла меньше развернутого угла. Как доказано, OM — биссектриса линейного угла aOb, поэтому луч OM составляет с лучами a и b острые углы. Отсюда следует, что основания перпендикуляров MM_1 и MM_2 лежат на лучах a и b соответственно. С учетом этого и сделан рис. 280, *а*.



а) *б)*

Рис. 280.

Докажем, что каждая точка биссектора принадлежит множеству X, т. е. $\delta \subset X$. Точки ребра l, как уже отмечалось, принадлежат и биссектору и множеству X. Пусть M — произвольная точка биссектора, не принадлежащая ребру. Проведем через точку M плоскость γ перпендикулярно ребру l, в сечении получим линейный угол aOb (рис. 280, *б*). Биссектор, как установлено выше, пересекает этот линейный угол по биссектрисе. Значит, точка M принадлежит биссектрисе угла aOb, а потому равноудалена от прямых, на которых лежат его стороны, т. е $|MM_1| = |MM_2|$. Перпендикуляры MM_1 и MM_2 к сторонам угла являются и перпендикулярами к плоскостям граней двугранного угла, поскольку плоскость γ перпендикулярна этим плоскостям. Поэтому точка M равноудалена и от плоскостей граней, т. е. $M \in X$. Отсюда следует, что $\delta \subset X$.

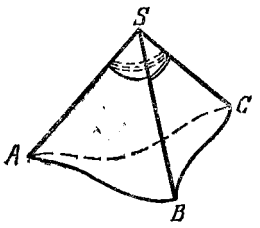


Рис. 281.

Таким образом, доказано, что $X \subset \delta$ и $\delta \subset X$. Это означает, что $\delta = X$, что и требовалось. ■

Простейшим из многогранных углов является трехгранный угол. Для описания трехгранного угла чаще других используются следующие величины: величины трех его плоских углов — граней (рис. 281) ASB, BSC и CSA и величины трех его двугранных углов при ребрах SA, SB и SC. Эти шесть величин связаны между собой. Например, по известным величинам плоских углов можно найти величины двугранных углов.

Напомним, что для существования трехгранного угла с плоскими углами α, β и γ *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялись два условия:

$$\alpha+\beta+\gamma<360^\circ, \quad |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то трехгранного угла с данными плоскими углами не существует (см. гл. II, задача 6 раздела 1).

Задача 6. В трехгранном угле $SABC$ плоские углы ASB, ASC и двугранный угол при ребре SA имеют величину 60°. Найти величину угла BSC.

△ На ребре SA возьмем точку $M \neq S$ и проведем $[MN] \perp [SA]$, $[MP] \perp [SA]$ (рис. 282). Обозначим $|SM|=a$. Из прямоугольных треугольников SMN и SMP находим: $|MN|=|MP|=a\sqrt{3}$, $|SN|=|SP|=2a$. Угол NMP — линейный угол двугранного угла при ребре SA, значит, $\widehat{NMP}=60^\circ$. Теперь в треугольнике MNP находим, что $|NP|=a\sqrt{3}$. Из теоремы косинусов в треугольнике SNP имеем

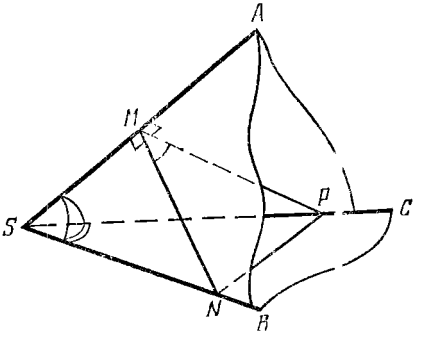


Рис. 282.

$$\cos\widehat{NSP}=\frac{|SN|^2+|SP|^2-|NP|^2}{2\,|SN|\cdot|SP|}=\frac{5}{8},$$

откуда $\widehat{NSP}=\arccos(5/8)$. ▲

Задача 7. Доказать, что биссекторы двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одному лучу.

□ Рассмотрим два биссектора, например β_1 и β_3 (рис. 283). Их пересечение есть луч с вершиной S; обозначим его l. Пусть A — произвольная точка луча l, $A \neq S$. Опустим перпендикуляры AA_1, AA_2, AA_3 на плоскости граней угла. Так как $A \in \beta_1$, то $|AA_2|=|AA_1|$, кроме того, $|AA_3|=|AA_1|$, поскольку $A \in \beta_3$. Значит, $|AA_2|=|AA_3|$, т. е. точка A равноудалена от плоскостей граней NSP и MSP. Отсюда следует, что точка A принадлежит биссектору двугранного угла при ребре SP. Поскольку A — произвольная точка луча l, то и весь луч принадлежит биссектору. Таким образом, все три биссектора пересекаются внутри трехгранного угла по одному лучу. ■

Из планиметрии известно, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке. Биссекторы двугранных углов тетраэдра обладают аналогичным свойством.

Задача 8. Доказать, что биссекторы двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке внутри тетраэдра.

□ Пусть l — луч, по которому пересекаются биссекторы трехгранного угла при вершине A, а M — точка пересечения этого

луча с гранью BCD (рис. 284). Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок AM. Точку пересечения обозначим O.

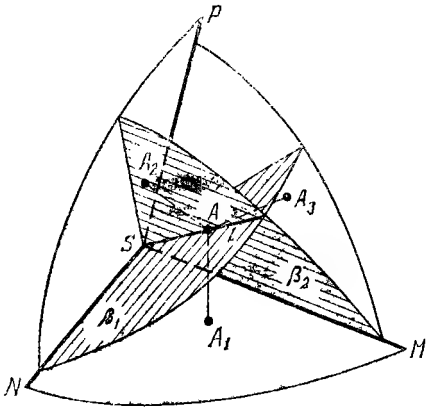


Рис. 283.

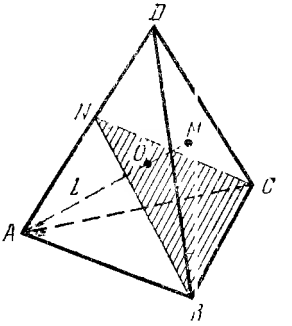


Рис. 284.

Точка O принадлежит лучу l, поэтому она равноудалена от плоскостей ABC, ABD и ACD. В то же время расстояния от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, так как эта точка принадлежит биссектору двугранного угла при ребре BC. Таким образом, точка O равноудалена от плоскостей всех граней, т. е. принадлежит биссекторам всех двугранных углов тетраэдра. ■

§ 6. О вычислении объемов многогранников и их частей

Задача 1. В треугольной пирамиде $SABC$ проведено сечение $A_1B_1C_1$, параллельное основанию пирамиды, так, что $|SA_1|:|SA|=k$. Доказать, что если V_1 и V соответственно объемы пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$, то

$$V_1=k^3V.$$

□ Рассмотрим гомотетию с центром S и коэффициентом k. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 285) является образом треугольника ABC при этой гомотетии, так как $|SB_1|:|SB|=|SC_1|:|SC|=|SA_1|:|SA|=k$. Следовательно, $S_{A_1B_1C_1}=k^2S_{ABC}$. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, $O_1=[SO]\cap(A_1B_1C_1)$, тогда SO_1 — высота пирамиды $SA_1B_1C_1$ и $|SO_1|=k|SO|$. Отсюда следует, что

$$V_1=\frac{1}{3}|SO_1|\,S_{A_1B_1C_1}=k^3\cdot\frac{1}{3}|SO|\cdot S_{ABC}=k^3V,$$

что и требовалось. ■

Замечание. 1) Аналогичный результат, очевидно, имеет место и для произвольной многоугольной пирамиды, поскольку ее можно представить как объединение нескольких треугольных пирамид (рис. 286).

2) Используя полученный в задаче 1 результат, нетрудно вывести формулу для объема усеченной пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2),$$

где H — высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади ее оснований.

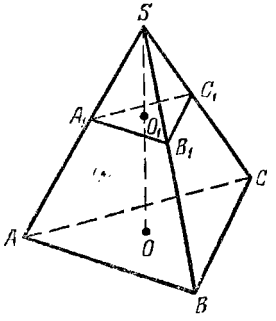


Рис. 285.

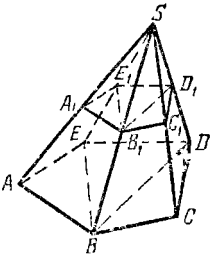


Рис. 286

При вычислении объема призмы наряду с формулой $V=H\cdot Q$, где H — высота призмы, а Q — площадь основания, бывает полезна и формула $V=l\cdot S$, где l — длина бокового ребра, а S — площадь перпендикулярного сечения призмы.

Задача 2. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. На ребрах BB_1 и CC_1 расположены соответственные точки M и N так, что $|BM|:|BB_1|=m$, $|CN|:|CC_1|=n$. Найти объем многогранника $ABCA_1MN$ (усеченной призмы).

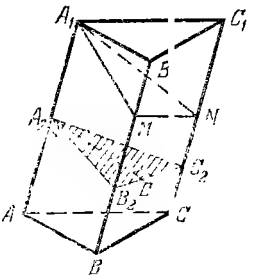


Рис. 287.

△ Пусть $A_2B_2C_2$ — перпендикулярное сечение призмы (рис. 287), A_2D — высота этого сечения. Обозначим $|AA_1|=l$, $|B_2C_2|=a$, $|A_2D|=h$. Имеем $|BM|=ml$, $|CN|=nl$, $|B_1M|=(1-m)l$, $C_1N=(1-n)l$. Найдем объем пирамиды $A_1B_1C_1NM$. Ее основание — трапеция B_1C_1NM. Высота этой трапеции, очевидно, равна B_2C_2, т. е. a. Находим площадь трапеции:

$$S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}(|B_1M|+|C_1N|)\cdot a=\frac{2-m-n}{2}al.$$

Заметим, что отрезок A_2D перпендикулярен плоскости BB_1C_1C, поэтому высота пирамиды $A_1B_1C_1NM$ из вершины A_1 равна

$|A_2D| = h$. Отсюда, если V_1 — объем пирамиды, то $V_1 = \frac{1}{3} hS_{тр} = \frac{1}{6}(2-m-n)lah$.

Находим площадь перпендикулярного сечения призмы: $S = \frac{1}{2} ah$. Значит, объем всей призмы выражается формулой $V = \frac{1}{2} lah$. Сравнивая выражения для V_1 и V, видим, что $V_1 = \frac{1}{3}(2-m-n)V$. Находим объем V_2 многогранника $ABCA_1MN$: $V_2 = V - V_1 = \frac{1+m+n}{3} V$. ▲

Для нахождения объема многогранника часто используется дополнение этого многогранника до пирамиды или призмы или разбиение на такие фигуры.

Задача 3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину A и середины ребер BB_1 и B_1C_1. Найти отношение объемов частей, на которые сечение разделило призму.

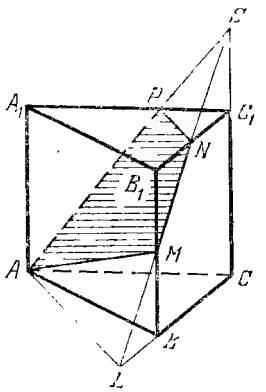


Рис. 288.

Строим сечение. Пусть M и N — середины ребер BB_1 и B_1C_1 (рис. 288). Находим точки $S = (MN) \cap (CC_1)$ и $P = (SA) \cap (A_1C_1)$. Сечение — четырехугольник $AMNP$.

Объем призмы обозначим V, а объем части, содержащей ребро CC_1, — V_1. Сам способ построения сечения подсказывает, как можно выразить V_1 через V. Построим точку $L = (MN) \cap (BC)$. Для того чтобы найти V_1, нужно из объема пирамиды $SALC$ вычесть объемы пирамид $SPNC_1$ и $MALB$. А эти объемы легко выразить через объем призмы.

Высоту призмы обозначим h, площадь основания — Q, объемы пирамид $SALC$, $SPNC_1$ и $MALB$ соответственно V_2, V_3, V_4.

Поскольку M и N — середины ребер, то $|BL| = \frac{1}{2} |BC|$, а $|CL| = \frac{3}{2} |BC|$. Отсюда следует, что $S_{ALC} = \frac{3}{2} Q$. Далее, имеем $|SC_1| = \frac{1}{2} |CC_1|$, $|SC| = \frac{3}{2} |CC_1|$. Значит, высота пирамиды $SALC$ равна $\frac{3}{2} H$. Находим $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} H \cdot S_{ALC} = \frac{3}{4} HQ$, т. е. $V_2 = \frac{3}{4} V$. Пирамида $SPNC_1$ гомотетична пирамиде $SALC$ с коэффициентом $k = 1/3$ ($|SC_1| : |SC| = 1 : 3$), отсюда следует, что $V_3 = k^3 V_2 = \frac{1}{36} V$. Поскольку M — середина ребра BB_1, то высота пирамиды $MALB$ равна $\frac{1}{2} H$, а из того, что $|BL| = \frac{1}{2} |BC|$, следует, что $S_{ALB} = \frac{1}{2} Q$.

Значит, $V_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot\frac{1}{2}Q=\frac{1}{12}H\cdot Q=\frac{1}{12}V$. Теперь находим $V_1=V_2-V_3-V_4=\frac{23}{36}V$. Объем отсеченной части призмы, содержащей ребро AA_1, равен $V-V_1=13/36$, а отношение объемов частей равно $13:23$. ▲

§ 7. Задачи на комбинации многогранников

Задача 1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды имеет длину a, высота пирамиды равна h. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат основанию пирамиды, четыре других лежат в боковых гранях, а четыре ребра куба параллельны диагонали основания пирамиды. Найти длину ребра куба.

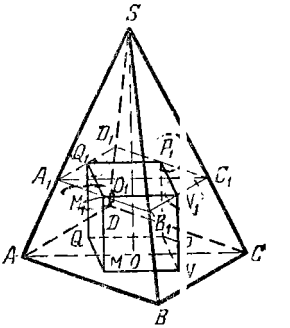


Рис. 289

△ Пусть четыре ребра куба параллельны диагонали AC (рис. 289) основания пирамиды, обозначим эти ребра MN, PQ, M_1N_1 и P_1Q_1. Искомую длину ребра куба обозначим b.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью верхнего основания куба ($A_1B_1C_1D_1$ на рис. 289). Это квадрат, ребра M_1N_1 и P_1Q_1 куба параллельны его диагонали A_1C_1. Следовательно, $\widehat{N_1M_1B_1}=\pi/4$, а отсюда заключаем, что и $\widehat{Q_1M_1A_1}=\pi/4$, т. е. прямоугольный треугольник $M_1A_1Q_1$ равнобедренный. Более того, треугольники $M_1B_1N_1$ и $M_1A_1Q_1$ конгруэнтны, так как конгруэнтны их гипотенузы, $|M_1N_1|=|M_1Q_1|=b$. Значит, $|B_1M_1|=|A_1M_1|$. Отсюда следует, что $b=|M_1N_1|=|A_1C_1|/2$.

Теперь воспользуемся тем, что расстояние между плоскостями $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ равно b. Пусть SO — высота пирамиды, $O_1=[SO]\cap(A_1B_1C_1D_1)$. Имеем $|OO_1|=b$, $|SO_1|=h-b$, $|SO_1|:|SO|=(h-b):h$. Отсюда следует, что и $|A_1C_1|:|AC|=(h-b):h$. Учитывая, что $|A_1C_1|=2b$, $|AC|=a\sqrt{2}$, получаем $2b/a\sqrt{2}=(h-b)/h$, откуда находим, что $b=ha/(a+\sqrt{2}h)$.

Заметим, что рассуждения и расчеты мы провели, предполагая, что указанное в условии расположение пирамиды и куба возможно. Из решения следует, что в данную пирамиду можно вписать куб так, как требуется. Действительно, проведем сечение пирамиды, параллельное ее основанию, через точку A_1 ребра SA такую, что $\frac{|SA_1|}{|SA|}=\frac{\sqrt{2}h}{a+\sqrt{2}h}$. Легко показать, что середины сторон сечения и основания перпендикуляров, опущенных из них на плоскость основания пирамиды, являются вершинами куба,

удовлетворяющего условиям задачи. Из приведенного решения следует также, что существует только один такой куб.

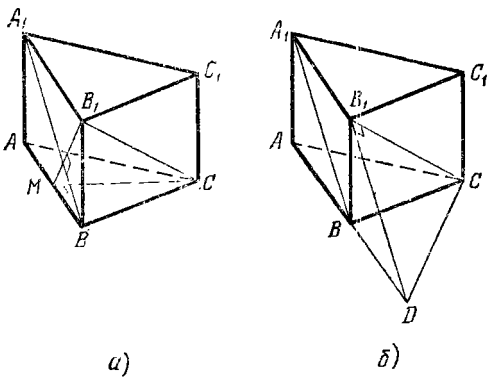
Ответ: $ah/(a+\sqrt{2}h)$. ▲

В решении этой задачи было использовано сечение одного из данных многогранников плоскостью грани другого. Рассмотрение таких сечений бывает полезно в некоторых задачах, где один из многогранников вписан в другой. Рассмотрим теперь задачу, где такие сечения вряд ли помогут делу.

Задача 2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Два ребра правильного тетраэдра расположены на прямых A_1B и B_1C. Найти длину ребра этого тетраэдра.

△ На прямых A_1B и B_1C очевидно, лежат скрещивающиеся ребра тетраэдра. Но в правильном тетраэдре такие ребра перпендикулярны (задача 2 § 4 главы XV), следовательно, и прямые A_1B и B_1C должны быть перпендикулярны. Из этого условия найдем далее длину l бокового ребра призмы.

Известно также, что общий перпендикуляр скрещивающихся ребер правильного тетраэдра имеет длину $b/\sqrt{2}$, где b — длина ребра тетраэдра (следствие задачи 5 § 4). Значит, если d — расстояние между прямыми A_1B и B_1C, то $b=d\sqrt{2}$.



а) б)

Рис. 290.

Найдем длину l бокового ребра призмы из указанного выше условия. Спроектируем диагональ B_1C на плоскость AA_1B_1B, ее проекцией будет прямая B_1M (рис. 290, а), где M — середина ребра AB. Из того, что $(B_1C)\perp(A_1B)$, следует, что $(B_1M)\perp(A_1B)$. Тогда прямоугольные треугольники MB_1B и A_1BA подобны, и потому $|BB_1|:|AB|=|MB|:|AA_1|$, откуда $l^2=a^2/2$, $l=a/\sqrt{2}$.

Определим расстояние d между прямыми A_1B и B_1C. Проведем $[B_1D]\parallel[A_1B]$ (рис. 290, б). Искомое расстояние равно расстоянию от точки B до плоскости DB_1C, т. е. высоте пирамиды BDB_1C из вершины B. Найдем объем этой пирамиды, приняв за основание грань DBC, получим, что $V=a^3/4\sqrt{6}$. Теперь примем за основание грань DB_1C. Имеем

$$|DB_1|=|BA_1|=|B_1C|=\sqrt{a^2+\frac{1}{2}a^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Треугольник DB_1C прямоугольный, так как $(DB_1)\parallel(A_1B)$, а

$(A_1B) \perp (B_1C)$. Значит,

$$S_{DB_1C} = \frac{1}{2} |DB_1| \cdot |B_1C| = \frac{3a^2}{4}.$$

Подставляя в формулу $V = \frac{1}{3} d \cdot S_{DB_1C}$ значения V и S_{DB_1C}, получим, что $d = a/\sqrt{6}$. Наконец, находим $b = d/\sqrt{2} = a/\sqrt{3}$.

Легко понять, что если призма имеет такое боковое ребро, как найдено, то можно расположить правильный тетраэдр указанным в условии образом. Диагонали A_1B и B_1C будут перпендикулярны. Отложив на каждой из прямых A_1B и B_1C от оснований их общего перпендикуляра отрезки длины $b/2 = a/2\sqrt{3}$, получим четыре точки, которые и будут вершинами правильного тетраэдра.

Ответ. $a/\sqrt{3}$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Доказать, что плоскость, перпендикулярная каждой из двух пересекающихся плоскостей, перпендикулярна и их линии пересечения.

2. Доказать равносильность следующих утверждений:

а) боковые ребра пирамиды имеют равные длины;

б) боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания;

в) около основания пирамиды можно описать окружность, а высота пирамиды проходит через ее центр.

3. Доказать, что плоскости, перпендикулярные ребрам тетраэдра и проходящие через их середины, пересекаются в одной точке.

4. Сторона основания правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину l. Построить сечение пирамиды, перпендикулярное боковому ребру SC и проходящее через его середину, и найти площадь сечения, если:

а) $l = \sqrt{\frac{3}{2}}\, a$; б) $l = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D, перпендикулярное плоскости BC_1D. Найти отношение объемов частей куба, на которые он разделен сечением.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SB образует с плоскостью основания угол $\pi/4$. Найти угол между этим ребром и плоскостью SCD.

7. Доказать, что расстояние ρ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

8. Даны координаты вершин основания правильной пирамиды $SABC$: $A(5; 1; -1)$, $B(5; -2; 2)$, $C(2; -2; -1)$. Вершина S пирамиды лежит в координатной плоскости Oyz. Найти расстояние между прямыми SB и AC.

9. Прямая пересекает грани γ_1 и γ_2 двугранного угла соответственно в точках A и B и составляет с плоскостью грани γ_1 угол $\pi/6$, а с плоскостью

грани γ_2 — угол $\arcsin 0{,}7$. Величина двугранного угла равна $\pi/3$. Найти угол между прямой AB и ребром двугранного угла.

10. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$, проведено сечение через ребро AB и середину M ребра SC. Найти отношение объемов частей, на которые сечение разделило пирамиду.

11. Объем тетраэдра равен V. Все вершины параллелепипеда лежат на поверхности тетраэдра, причем три грани параллелепипеда принадлежат трем граням тетраэдра. Найти наибольший возможный объем такого параллелепипеда.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. В координатном пространстве даны точки $M(-1; 3; 2)$, $N(1; 1; 3)$ и $A(-1; 2; 3)$. На прямой MN взяты точки B и C так, что $\widehat{BAC}=90°$, $\widehat{ABC}=30°$. Найти координаты этих точек.

2. Доказать, что прямая и плоскость, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

3. Доказать, что если длины диагоналей параллелепипеда равны, то этот параллелепипед прямоугольный.

4. В прямоугольном параллелепипеде одна из его диагоналей перпендикулярна плоскости, проведенной через концы трех ребер, выходящих из той же вершины, что и эта диагональ. Доказать, что этот параллелепипед — куб.

5. Доказать, что высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке — центре тетраэдра.

6. Найти величины углов между прямыми, соединяющими центр правильного тетраэдра с его вершинами.

7. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом величины α. Длина стороны основания и трех боковых ребер равна a. Найти длину четвертого бокового ребра пирамиды, если известно, что она меньше a.

8. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины a. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, высоты граней SAC и SBC из вершины S равны соответственно $\sqrt{5}a$ и $\sqrt{2}a$. Найти высоту пирамиды.

9. В пирамиде $SABC$ углы ABC, SAB и SCB прямые, SH — высота пирамиды. Выразить вектор $\overrightarrow{SH}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

10. Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $|AB|=|BC|=a$, $AD=2a$. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найти высоту пирамиды, если высота грани SAD из вершины S равна $2a$.

11. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

а) высоты (или их продолжения) тетраэдра пересекаются в одной точке;

б) каждые два скрещивающихся ребра тетраэдра перпендикулярны;

в) основание одной из высот тетраэдра есть точка пересечения высот грани;

г) основание каждой высоты тетраэдра есть точка пересечения высот грани, на которую опущена эта высота.

12. Доказать: для того чтобы ортогональной проекцией прямого угла на плоскость был прямой угол, необходимо и достаточно, чтобы одна из сторон данного угла была параллельна плоскости проекции, а другая не перпендикулярна этой плоскости.

13. Площадь правильного треугольника равна S. Его ортогональной проекцией на плоскость является равнобедренный треугольник с углом при вершине величины α. Найти площадь этой проекции, если: а) $\alpha > \pi/3$; б) $\alpha < \pi/3$.

14. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

15. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M, N и P соответственно середины сторон AB, BC и CA основания ABC. Отрезки MC_1, NA_1, PB_1 попарно перпендикулярны и длина каждого равна a. Найти объем призмы.

16. Плоские углы при вершине пирамиды прямые, S_0 — площадь основания, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней. Доказать, что $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

17. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ имеет длину a. Найти площадь ортогональной проекции тетраэдра на плоскость, проходящую через середины ребер AB, BD и DC.

18. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC, длина стороны которого равна $2a$. Ортогональной проекцией призмы на плоскость основания ABC является трапеция с боковой стороной AB и площадью в два раза большей площади основания. Найти высоту призмы, если $|A_1B_1| = a$. (Найти все решения.)

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер A_1D_1 и C_1D_1 соответственно. Построить перпендикуляр из точки F на плоскость EBD и найти его длину, если ребро куба имеет длину a.

20. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания имеет длину a. Через точку C_1 проведена прямая, перпендикулярная плоскости BA_1D. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если длина бокового ребра равна: а) $a\sqrt{2}$, б) $a/2\sqrt{2}$.

21. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Прямая, перпендикулярная плоскости BA_1C, пересекает прямые BC_1 и AB_1 соответственно в точках M и N. Найти длину отрезка MN. (Указание. Выразить векторно условие перпендикулярности отрезка MN плоскости BA_1C.)

22. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна a, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен: а) 60°, б) 120°.

23. Рассматриваются сечения куба плоскостями, перпендикулярными одной из его диагоналей. Определить наибольшую возможную площадь сечения, если ребро куба имеет длину a.

24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершину B_1 проведено сечение, перпендикулярное диагонали CA_1 боковой грани AA_1C_1C. Найти площадь сечения, если: а) $|AB| = |AA_1| = a$; б) $|AB| = 2a$, $|AA_1| = a$.

25. Основанием пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$ со стороной длины a и острым углом величины α. Основанием высоты пирамиды является

центр ромба $ABCD$. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны. Найти объем пирамиды

26. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ угол между апофемой боковой грани и ее проекцией на плоскость основания равен $\pi/3$. Построить сечение пирамиды, проходящее через ребро AB перпендикулярно грани SCD и определить, в каком отношении оно разделит высоту пирамиды.

27. Три непересекающиеся диагонали боковых граней треугольной призмы перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Найти объем призмы.

28. Точка M — середина бокового ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые BD, MD_1 и A_1C попарно перпендикулярны. Найти высоту параллелепипеда, если $|BD|=2a$, $|BC|=\frac{3}{2}a$, $A_1C=4a$

29. Три плоскости попарно перпендикулярны, прямая составляет с ними углы φ_1, φ_2 и φ_3. Доказать, что $\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2+\sin^2\varphi_3=1$.

30. Из точки A плоскости проведены по разные ее стороны отрезки AM и AN. Каждый из отрезков имеет длину a и образует с плоскостью угол α. Угол между проекциями этих отрезков на плоскость равен β. Определить длину отрезка MN.

31. В плоскости расположен отрезок AB длины a. Из точек A и B проведены перпендикуляр AM и наклонная BN к плоскости (по одну ее сторону), причем $|AM|=|BN|=\frac{3}{2}a$, $|MN|=2a$, $\widehat{ABN}=90°$. Найти угол между прямой MN и плоскостью.

32. Найти углы между линией пересечения плоскостей

$$2x-y-z=0 \quad \text{и} \quad x-2y+z=0$$

и а) координатными осями; б) координатной плоскостью Oxy.

33. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Точка D — середина ребра AB, точка E лежит на ребре A_1C_1. Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C соответственно. Найти высоту призмы.

34. В правильной треугольной пирамиде сторона основания имеет длину a, угол между апофемой и боковой гранью равен $\pi/4$. Определить высоту пирамиды.

35. В правильном тетраэдре $ABCD$ через вершину B проведена плоскость, параллельная ребру CD и составляющая с ребром AD угол, равный: а) $\pi/3$; б) $\arcsin\frac{5}{6}$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD?

36. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

37. Плоскость пересекает отрезок. Доказать, что она делит его в отношении равном отношению расстояний от его концов до этой плоскости.

38. Сколько имеется плоскостей равноудаленных от четырех точек, не лежащих в одной плоскости?

39. Вычислить расстояние от точки $M(3;\ 1;\ -1)$ до плоскости $22x-4y-20z-45=0$; и от точки $N(4;\ 3;\ -2)$ до плоскости $3x-y+5z+1=0$.

40. На оси z найти точки равноудаленные от плоскостей $x+4y-3z-2=0$ и $5x+z+8=0$.

41. Известны координаты четырех вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(1; 1; 1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(3; 5; 0)$, $C_1(3; 7; 2)$. Найти координаты остальных вершин и расстояние от вершины A до плоскости CDD_1C_1.

42. В пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $|AC| = |CB|$, $|AS| = |AB| = a$. Через середину ребра AC проведена плоскость, перпендикулярная ребру SB. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

43. Сторона основания ABC правильной пирамиды $SABC$ имеет длину a, боковое ребро — длину b. На каком расстоянии от прямой BC следует провести сечение пирамиды, параллельное ребрам BC и SA, чтобы площадь его была наибольшей из возможных?

44. Грань AA_1B_1B призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярна ее основанию ABC. Высота призмы равна H, площадь грани AA_1B_1B равна площади основания призмы. Найти расстояние от точки B до плоскости CA_1B_1.

45. В правильной пирамиде $SABCD$ длина общего перпендикуляра ребер SA и BC равна a, а его основание делит отрезок BC в отношении $1 : 3$. Определить объем пирамиды.

46. Даны вершины $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 5)$, $A_1(3; 3; 4)$ и $C_1(4; 4; 5)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти расстояние между прямыми AD_1 и BC.

47*. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5 см^3. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, отстоящая от вершины A на расстоянии 1 см и пересекающее ребро CD в точке M так, что $|DM| : |MC| = 2 : 3$. Вычислить площадь сечения тетраэдра этой плоскостью.

48*. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной длины a и острым углом $\widehat{BAD} = 60°$. Высота пирамиды равна $\frac{3}{2}a$ и $\widehat{SBA} + \widehat{SBC} = 180°$. На ребре SC взята точка M так, что $CS| = 3|CM|$. Найти расстояние между прямыми DM и AC.

49*. В пирамиде $SABC$ общий перпендикуляр прямых AC и SB проходит через середину ребра SB. Площади граней ASB и BSC равны, площадь грани ASC вдвое больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до плоскостей всех граней пирамиды. Найти $|MB|$, если $|AC| = \sqrt{6}$ см, $|SB| = 1$ см.

50. Ребро правильного октаэдра имеет длину a. Определить кратчайшее расстояние по поверхности октаэдра между серединами двух параллельных ребер.

51*. Сторона основания правильной треугольной призмы имеет длину a, боковое ребро — длину l. Определить кратчайшее расстояние по поверхности призмы между вершиной одного основания и серединой противоположной стороны другого основания.

52. Плоскость равнобедренного треугольника образует с плоскостью α, проходящей через его основание, угол φ. Угол при вершине треугольника равен ψ. Найти угол между боковой стороной и плоскостью α.

53. Дан прямоугольник, длины сторон которого равны 1 см и 2 см. Через меньшую сторону прямоугольника проведена плоскость α, составляющая с

диагональю прямоугольника угол φ. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью прямоугольника.

54. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между смежными боковыми гранями имеет величину α. Найти величину двугранного угла при основании пирамиды.

55. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями: а) A_1DM и A_1B_1CD; б) A_1DM и C_1DN, где M и N — середины ребер AB и BC соответственно; в) EDC_1 и EB_1C; г) AA_1D_1D и EFO, где E и F соответственно — середины ребер AA_1 и CD, а O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

56. Через вершину A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали BD_1 куба и диагонали, B_1C его грани. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью $ABCD$.

57. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны. Определить углы между плоскостями: а) SAB и SDE; б) SAB и SBC.

58. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a, a, b. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом величины α. Найти: а) площадь боковой поверхности пирамиды; б) объем пирамиды для случая, когда $a=5$ см, $b=6$ см, $\alpha=45°$.

59. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в разных гранях двугранного угла и составляют с его ребром острые углы величины φ и ψ соответственно. Найти величину двугранного угла.

60. Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях α и β острого двугранного угла величины φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол ψ. Определить угол между плоскостью ABC и гранью β.

61. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB, AC и BD прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, имеет длину a, а другой — длину $a\sqrt{6}$. Найти длину наибольшего ребра тетраэдра.

62. В гранях двугранного угла расположены точки A и B. Доказать, что биссектор делит отрезок AB в отношении, равном отношению расстояний от точек A и B до ребра двугранного угла.

63. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды имеет длину a, двугранный угол при основании — величину α. Проведен биссектор одного из двугранных углов при основании пирамиды. Найти площадь получившегося сечения.

64. В пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC, $SA=a$, $BC=2a$. Двугранные углы при ребрах SB и SC каждый имеют величину 60°. Найти объем пирамиды.

65. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$, высота параллелепипеда равна a. Плоскость AB_1M, где M — середина ребра BC, образует углы в 60° с плоскостями AA_1C_1C и BB_1D_1D. Определить объем параллелепипеда.

66. Линейные углы ASB, BSC, CSA трехгранного угла имеют соответственно величины $\pi/3$, $\pi/6$, $\arccos(1/\sqrt{3})$. Найти величину двугранного угла при ребре SB.

67. Доказать, что, если в трехгранном угле $SABC$ двугранные углы при ребрах SB и SC имеют равные величины, то равны и величины противоположных им плоских углов ASC и ASB.

68. Каждый двугранный угол трехгранного угла имеет величину α. Найти величину плоских углов, и указать все возможные значения α.

69. Каждый плоский угол трехгранного угла имеет величину $\pi/3$. Внутри угла расположена точка, удаленная от двух граней угла на расстояние a, а от третьей — на расстояние $3a$. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

70. Каждый двугранный угол трехгранного угла имеет величину α. Внутри угла на расстоянии a от его вершины расположена точка, удаленная от плоскости каждой грани на одно и то же расстояние. Найти это расстояние.

71. Каждый плоский угол четырехгранного угла имеет величину α, все двугранные углы при ребрах данного четырехгранного угла имеют одинаковую величину. Определить величину этих двугранных углов.

72. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, α — величина плоского угла при вершине пирамиды, β — величина двугранного угла между боковой гранью и основанием, γ — угол между боковым ребром и основанием, δ — величина двугранного угла между боковыми гранями. Найти объем пирамиды в каждом из следующих четырех случаев: а) $\cos\alpha = 1/4$; б) $\operatorname{tg}\beta = 2$; в) $\operatorname{tg}\gamma = 1$; г) $\cos\delta = 1/5$.

73. Гранями треугольной пирамиды являются равнобедренные треугольники. Основание каждого из этих треугольников имеет длину a, а противолежащий ему угол — величину α. Найти объем пирамиды.

74. Длина стороны меньшего основания правильной усеченной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол пирамиды при ребре меньшего основания имеет величину 120°, высота пирамиды равна $a/2$. Найти объем пирамиды.

75. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания пирамиды угол в 30° и имеет длину b. Найти объем пирамиды.

76. В пирамиде $SABC$ каждые два скрещивающихся ребра перпендикулярны, $|AB| = |AC| = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$, двугранный угол пирамиды при ребре BC имеет величину φ. Найти объем пирамиды.

77. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом величины α и площадью S. Каждая боковая грань составляет с основанием угол величины β. Найти объем пирамиды.

78. Основание пирамиды — выпуклый многоугольник, площади боковых граней равны. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания до плоскостей боковых граней пирамиды — величина постоянная.

79. Скрещивающиеся диагонали двух параллельных граней параллелепипеда служат ребрам тетраэдра. Определить отношение объемов параллелепипеда и тетраэдра.

80. Если поверхность тетраэдра разрезать вдоль ребер AD, BD, CD, то ее разверткой на плоскость ABC будет квадрат со стороной длины a. Найти объем тетраэдра.

81. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды соответственно в точках M, N и P так, что $|SM| : |SA| = m$, $|SN| : |SB| = n$, $|SP| : |SC| = p$. Найти отношение объемов пирамид $SMNP$ и $SABC$.

82. Найти отношение объемов частей, на которые призма $ABCA_1B_1C_1$ разделена плоскостью, проходящей:

а) через вершину B_1 и середины ребер AA_1 и AC;

б) через середины ребер AB, AC и BB_1;

в) через точку пересечения медиан основания ABC, середину ребра A_1C_1 и точку пересечения диагоналей грани BB_1C_1C.

83. Доказать, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две части равного объема.

84. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, рассекает его на две части, равные по объему.

85. Основаниями усеченной четырехугольной пирамиды служат параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, отношение длин сторон которых равно 2. Через ребро B_1C_1 проведено сечение, параллельное грани AA_1D_1D. Найти отношение объемов частей, на которые это сечение разделило пирамиду.

86. Отношение длин двух скрещивающихся ребер тетраэдра равно q. Параллельно этим ребрам проведена плоскость так, что в сечении получился ромб. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила тетраэдр.

87. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB=2a$, $|AD|=|BD|=b$, $|AC|=|BC|=c$ $(a<b<c)$. Прямые DM и BN, где M и N — середины ребер AB и CD перпендикулярны. Найти объем тетраэдра.

88. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC — правильный треугольник, грань DBC перпендикулярна ей, $\widehat{DAC}=\pi/3$, $AD=6$ см, угол между прямыми AD и BC равен $\arccos(1/4)$. Найти объем тетраэдра (найти все решения).

89. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ объема V. Найти объем части призмы, ограниченной ее основанием $A_1B_1C_1$, боковыми гранями и плоскостями ABC_1, BCA_1, CAB_1.

90. В координатном пространстве фигура Φ задана как множество всех тех и только тех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x|+|y|+z\leqslant a$. Найти объем фигуры Φ.

91. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом φ. Одно основание правильной треугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины другого лежат на боковых ребрах пирамиды. Все ребра призмы имеют длину a. Найти объем пирамиды. При каком значении φ этот объем будет наименьшим?

92. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырехугольной пирамиды, а ребро CD параллельно плоскости ее основания и концы его лежат на боковых ребрах пирамиды. Определить наименьший возможный объем пирамиды, если объем тетраэдра равен V.

93. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Каждая из его вершин A, B, C, D симметрично отражена относительно плоскости противоположной ей грани, в результате получены соответственно точки A_1, B_1, C_1, D_1. Найти отношение объемов тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$.

94. В тетраэдре отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в точке O. Второй тетраэдр симметричен исходному относительно точки O. Найти объем общей части этих тетраэдров, если объем исходного тетраэдра равен V.

95. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен V. Высота SP пирамиды является ребром правильного тетраэдра $SPQR$, плоскость грани PQR которого перпендикулярна ребру SC. Найти объем общей части пирамиды и тетраэдра.

96. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD перпендикулярны, $|AB|=a$, $|CD|=b$. Отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD перпендикулярен им и длина его равна c. Вершины правильного тетраэдра лежат на поверхности тетраэдра $ABCD$, одно из его ребер параллельно ребру AB, другое — ребру CD. Найти длину ребра этого правильного тетраэдра (найти все решения).

97. Все вершины правильной пирамиды $SABCD$ расположены на ребрах правильной пирамиды $QMNP$ с основанием MNP. Известно, что плоскость $ABCD$ перпендикулярна плоскости боковой грани QMN пирамиды $QMNP$. Найти отношение объемов этих пирамид.

98. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. Проведены четыре плоскости: первая — через вершину C параллельно плоскости ABC_1, вторая — через вершину C_1 параллельно плоскости A_1B_1C, третья — через ребро BB_1 параллельно ребру AC, четвертая — через ребро AA_1 параллельно ребру BC. Найти объем тетраэдра, ограниченного этими четырьмя плоскостями.

99. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Проведены три плоскости: первая — через вершину A перпендикулярно прямой AB_1, вторая — через вершину B перпендикулярно прямой BC_1, третья — через вершину C перпендикулярно прямой CA_1. Найти объем тетраэдра, ограниченного этими тремя плоскостями и плоскостью $A_1B_1C_1$.

100. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка E — середина ребра AD. Одно ребро правильного тетраэдра лежит на прямой ED, другое на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R. Найти: а) $|BR|$; б) длину ребра тетраэдра.

101. Два правильных тетраэдра $ABCD$ и $MNPQ$ расположены так, что плоскости BCD и NPQ совпадают, вершина M лежит на высоте AO первого тетраэдра, а плоскость MNP проходит через центр грани ABC и середину ребра BD. Найти отношение длин ребер тетраэдров.

102. Сторона основания правильной треугольной пирамиды имеет длину $2\sqrt{6}$ см, а высота пирамиды равна 3 см. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найти длину ребра куба.

Глава XVII
ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Цилиндр

Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону (рис. 291). Круги, полученные вращением сторон прямоугольника, перпендикулярных оси (OA и O_1A_1 на рис. 291), называются *основаниями* цилиндра. Радиус основания называют также *радиусом* цилиндра.

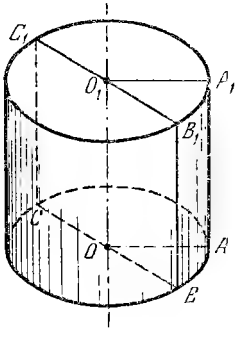


Рис. 291.

Фигура, полученная вращением стороны прямоугольника, параллельной оси, (AA_1 на рис. 291) называется *боковой поверхностью* цилиндра. Все точки боковой поверхности удалены от оси цилиндра на расстояние, равное его радиусу.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, (*осевое сечение*) есть прямоугольник (BB_1C_1C на рис. 291). Его стороны, параллельные оси (BB_1, CC_1), называют *образующими* боковой поверхности цилиндра. Каждая образующая перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра, длина образующей равна расстоянию между этими плоскостями, т. е. высоте цилиндра.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, есть круг, конгруэнтный основаниям цилиндра.

Ортогональной проекцией цилиндра на плоскость, перпендикулярную его оси, является круг радиуса, равного радиусу цилиндра, проекцией оси является центр этого круга. Проекцией боковой поверхности является окружность, ограничивающая этот круг.

Задача 1. Вершины A, B и D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого параллельна прямой DC_1. Найти радиус цилиндра, если ребро куба имеет длину a.

△ Плоскость BA_1D_1C перпендикулярна прямой DC_1 (рис. 292), а значит, и оси цилиндра. Проекции точек B и D_1 на плоскость BA_1D_1C совпадают с самими этими точками. Проекцией точки A является середина A_2 отрезка BA_1. Проекцией боковой поверхности цилиндра на плоскость BA_1D_1C служит окружность, про-

ходящая через точки B, A_2, D_1. Радиус этой окружности равен радиусу цилиндра. Этот радиус найдем по формуле $R=\frac{a_1a_2a_3}{4S}$, где a_1, a_2, a_3 — длины сторон BA_2, A_2D_1, BD_1 треугольника BA_2D_1, а S — площадь этого треугольника. Имеем $a_1=|A_2B|=a\sqrt{2}$, $a_3=|BD_1|=a\sqrt{3}$, а из треугольника $A_2A_1D_1$ находим $a_2=|A_2D_1|=a\sqrt{3/2}$. Далее, $S=\frac{1}{2}|A_2B|\cdot|A_1D_1|=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$. Теперь находим $R=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$. ▲

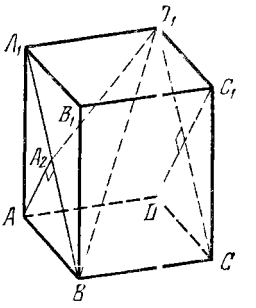


Рис. 292

Призма называется *вписанной в цилиндр* (а цилиндр — *описанным* около призмы), если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Очевидно,

для того чтобы около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и около ее основания можно было описать окружность.

В частности, около любой прямой треугольной призмы и около любой правильной призмы можно описать цилиндр. Каждое боковое ребро вписанной в цилиндр призмы является образующей боковой поверхности цилиндра.

Задача 2. Рассматриваются всевозможные правильные треугольные призмы заданного объема V. Около каждой из этих призм описан цилиндр. Найти наименьшую площадь поверхности такого цилиндра.

△ Высоту призмы обозначим H, длину стороны основания a, радиус описанного цилиндра R (рис. 293). Этот радиус равен радиусу окружности, описанной около основания призмы, а поскольку основание — правильный треугольник, то $R=a/\sqrt{3}$.

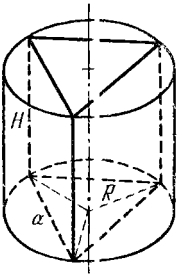


Рис. 293.

По условию имеем $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H=V$, откуда $H=\frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. Учитывая это, находим площадь поверхности цилиндра: $S=2\pi R^2+2\pi RH=\frac{2\pi}{3}\left(a^2+\frac{4V}{a}\right)$. Площадь S является функцией переменной $a\in]0;+\infty[$. Находим критическую точку этой функции: $S'=\frac{2\pi}{3}\left(2a-\frac{4V}{a^2}\right)=0, a_0=\sqrt[3]{2V}$. Легко видеть, что функция S имеет при $a=a_0$ наименьшее значение и оно равно $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$.

Ответ: $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$. ▲

Пусть плоскость α параллельна оси цилиндра, d — расстояние между этой плоскостью и осью, R — радиус цилиндра. Если $d>R$,

то плоскость α не имеет с цилиндром общих точек. Если $0 \leqslant d < R$, то сечение цилиндра плоскостью α есть прямоугольник (рис. 294). Если $d = R$, то плоскость α имеет с боковой поверхностью цилиндра одну общую образующую (KK_1 на рис. 294), эта образующая лежит на ортогональной проекции оси цилиндра на плоскость α. В этом случае плоскость α называется *касательной* к боковой поверхности цилиндра.

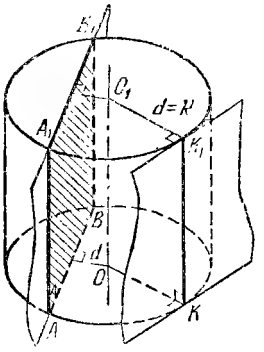


Рис. 294.

Цилиндр называется *вписанным* в призму (а призма — *описанной* около цилиндра), если основания цилиндра вписаны в основания призмы. Легко видеть, что

для того чтобы в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и в основание ее можно было вписать окружность.

Каждая боковая грань описанной около цилиндра призмы касается его боковой поверхности по образующей. Эта образующая проходит через точки касания соответствующих сторон основания призмы с окружностями оснований цилиндра.

В любую прямую треугольную призму и в любую правильную призму можно вписать цилиндр.

Задача 3. Радиус цилиндра равен r, а высота его равна $5r$. Около цилиндра описан параллелепипед, отношение объема которого к объему цилиндра равно $5 : \pi$. Найти длину отрезка большей диагонали параллелепипеда, лежащего внутри цилиндра.

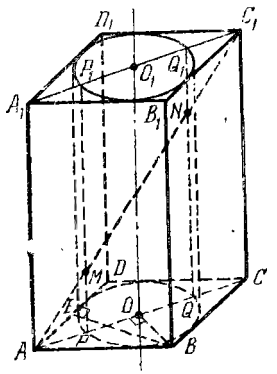


Рис. 295.

△ Грани параллелепипеда, описанные около оснований цилиндра обозначим $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 295) так, что $\widehat{BAD} = \alpha < \pi/2$. Параллелограмм, описанный около окружности, является ромбом, поэтому $ABCD$ — ромб. Пусть BE — высота этого ромба, тогда $|BE| = 2r$ и из треугольника ABE находим $|AB| = 2r/\sin\alpha$. Площадь ромба $ABCD$ равна $4r^2/\sin\alpha$. Поскольку высота параллелепипеда равна высоте цилиндра, то $V_п = 20r^3/\sin\alpha$. Учитывая, что $V_ц = 5\pi r^3$, из условия $V_п : V_ц = 5 : \pi$ находим $\sin\alpha = 4/5$. Отсюда следует, что $\cos(\alpha/2) = 2/\sqrt{5}$. Из треугольника AOB находим $|AO| = |AB|\cos(\alpha/2) = \sqrt{5}\,r$, откуда $|AC| = 2|AO| = 2\sqrt{5}\,r$.

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью AA_1C_1C (AC_1 и A_1C — большие диагонали параллелепипеда, $|AC_1| = |A_1C|$). Это сечение — прямоугольник PP_1Q_1Q. Пересечение диагонали AC_1 с этим

прямоугольником — отрезок MN — и есть отрезок этой диагонали, лежащий внутри цилиндра. Найдем его длину.

Из прямоугольного треугольника ACC_1 имеем $|AC_1| = \sqrt{|AC|^2+|CC_1|^2} = 3\sqrt{5}\,r$. Из пропорции $|MN| : |AC_1| = |PQ| : |AC|$, учитывая, что $|PQ| = 2r$, находим

$$|MN| = |AC_1| \cdot |PQ| : |AC| = 3r.$$

Ответ: $3r$. ▲

Кроме рассмотренных случаев расположения цилиндра и многогранника возможны и другие.

Задача 4. Дана правильная треугольная пирамида объема V. В эту пирамиду вписан цилиндр так, что одно из его оснований принадлежит основанию пирамиды, а другое основание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Найти наибольший возможный объем такого цилиндра.

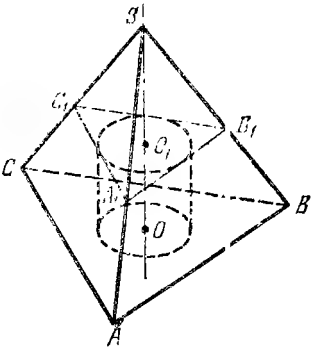


Рис. 296.

△ Высоту пирамиды обозначим H, длину стороны основания — a, высоту цилиндра — h, радиус цилиндра — r. Рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ (рис. 296) пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра. Это правильный треугольник, гомотетичный основанию ABC с коэффициентом гомотетии, равным $(H-h)/H$. Следовательно, его сторона имеет длину $a(H-h)/H$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}\,a(H-h)/6H$. Это и есть радиус цилиндра, т. е. $r = \sqrt{3}\,a(H-h)/6H$. Находим объем цилиндра как функцию h:

$$V_{\text{ц}} = \frac{\pi a^2}{12H^2}(H-h)^2 h, \quad h \in]0;\ H[.$$

Затем ищем критическую точку найденной функции: $V'_{\text{ц}} = \frac{\pi a^2}{12H^2}(H-h)(H-3h)$, $h_0 = \frac{H}{3}$. Очевидно, что при $h = h_0$ функция $V_{\text{ц}}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{81}a^2H$. Учитывая, что по условию $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2H = V$, получаем, что наибольший возможный объем рассматриваемых цилиндров равен $\frac{4\sqrt{3}\pi}{81}V$. ▲

§ 2. Конус

Конусом называется фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. Другой катет треугольника, вращаясь вокруг этой оси, дает круг,

называемый *основанием* конуса. Фигура, образованная вращением гипотенузы, называется *боковой поверхностью* конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания, называют *образующими* боковой поверхности конуса (говорят также короче — образующими конуса; SA и SB на рис. 297). Все образующие имеют одинаковую длину и составляют с осью острые углы одной и той же величины.

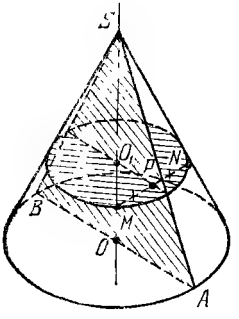


Рис. 297.

Всякое сечение конуса плоскостью, проходящей через ось (*осевое* сечение), — равнобедренный треугольник ($\triangle ASB$ на рис. 297, $|SA| = |SB|$). Величина угла при вершине этого треугольника называется *углом раствора* конуса. Если угол раствора равен φ, то угол между образующей и осью равен $\varphi/2$.

Всякое сечение боковой поверхности конуса плоскостью, перпендикулярной его оси и не проходящей через вершину, есть окружность. Все точки этой окружности удалены от вершины конуса на одинаковое расстояние, равное $\sqrt{r^2+h^2}$, где r — радиус окружности, а h — расстояние от вершины конуса до плоскости сечения. Верно и обратное: точки боковой поверхности конуса, равноудаленные от его вершины, лежат на одной окружности — сечении боковой поверхности плоскостью, перпендикулярной оси. Если точки M и N боковой поверхности конуса равноудалены от его вершины, то ось конуса лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка MN и перпендикулярной ему (на рис. 297 $|MP| = |PN|$, $(SAB) \perp [MN]$).

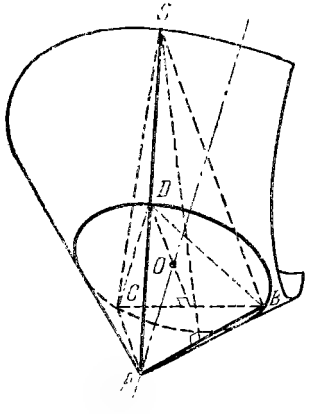


Рис. 298.

Задача 1. В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Точки S, B и C лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке A. Найти угол раствора этого конуса.

$\triangle$ На луче AS (рис. 298) возьмем точку D, так, что $|AD| = a$. Тогда $|AD| = |AB| = |AC|$, следовательно, точки B, C и D, принадлежащие поверхности конуса, лежат в одной плоскости, перпендикулярной его оси. Сечение боковой поверхности конуса этой плоскостью есть окружность, описанная около треугольника BCD. Определим радиус этой окружности, для чего найдем длины сторон BD и CD. В треугольнике SAB имеем $\cos \angle SAB =$

$= |AB| : 2|AS| = 0{,}25$ и по теореме косинусов находим $|BD| = \sqrt{3/2}\,a$. Очевидно, $|CD| = |BD|$. Теперь в треугольнике BCD имеем $\cos \widehat{DBC} = |BC| : 2|BD| = 1/\sqrt{6}$, откуда $\sin \widehat{DBC} = \sqrt{5/6}$. Радиус окружности, описанной около треугольника BCD находим по формуле $R = |CD| : 2\sin \widehat{DBC} = 3a/2\sqrt{5}$. Обозначим угол раствора конуса φ, имеем $\sin(\varphi/2) = R : |AD| = 3/2\sqrt{5}$, откуда $\varphi = 2\arcsin(3/2\sqrt{5})$.

Ответ: $2\arcsin(3/2\sqrt{5})$. ▲

Пирамида называется *вписанной* в конус (а конус — *описанным* около пирамиды), если ее вершина совпадает с вершиной конуса, а основание вписано в основание конуса (рис. 299).

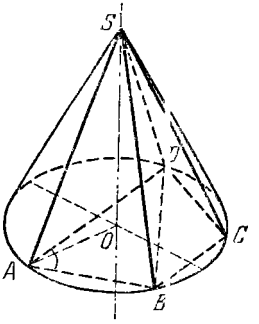


Рис. 299.

Каждое боковое ребро вписанной в конус пирамиды является образующей конуса, высота конуса совпадает с высотой пирамиды. Легко видеть, что

для того чтобы около пирамиды можно было описать конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды имели равные длины.

Задача 2. В конус вписана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция $ABCD$. Известно, что $\widehat{BAD} = 60°$, $|BC| = 3a$, $|AD| = 8a$ (BC и AD — основания трапеции), длина высоты SO пирамиды равна $7a$. Найти площадь боковой поверхности конуса.

△ Основание пирамиды — трапеция $ABCD$ (рис. 299) — вписана в основание конуса, значит, эта трапеция равнобедренная. Учитывая это, находим $|AB| = (|AD| - |BC|) : 2\cos 60° = 5a$. Из треугольника ABD, применив теорему косинусов, получим $|BD| = 7a$. Находим радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, по формуле $R = |BD| : 2\sin 60° = 7a/\sqrt{3}$. Затем находим длину образующей конуса $l = |AS| = \sqrt{|AO|^2 + |SO|^2} = 11a/\sqrt{3}$, и площадь его боковой поверхности $S = \pi Rl = 98\pi a^2/3$.

Ответ: $98\pi a^2/3$. ▲

Пусть плоскость α проходит через вершину S конуса и составляет с его осью l угол ψ. Пусть φ — угол между образующей и осью конуса. Напомним, что ψ — это величина угла между осью l и ее ортогональной проекцией l' на плоскость α. Поэтому любая прямая в плоскости α, проходящая через вершину S и не совпадающая с l', составляет с осью l угол, больший ψ. Отсюда следует, что если $\psi > \varphi$, то плоскость α не имеет с конусом других общих точек кроме вершины S.

Если $0 \leqslant \psi < \varphi$, то сечение конуса плоскостью α есть равнобедренный треугольник ($\triangle SAB$ на рис. 300, $|SA| = |SB|$). При

$0<\psi<\varphi$ плоскость, проходящая через ось конуса и середину отрезка AB, перпендикулярна секущей плоскости α. При $\psi=0$ имеем осевое сечение конуса.

Если $\psi=\varphi$, то плоскость α имеет с боковой поверхностью конуса лишь одну общую образующую (SK, рис. 300), лежащую на ортогональной проекции оси l на плоскость α. В этом случае плоскость α называется *касательной* к боковой поверхности конуса. Плоскость, проходящая через ось конуса и образующую, по которой плоскость α касается боковой поверхности (плоскость SOK на рис. 300), перпендикулярна касательной плоскости. Касательная плоскость пересекает плоскость основания конуса по прямой, касающейся окружности основания конуса (прямая k на рис. 300). Отметим, что прямая k и образующая SK перпендикулярны.

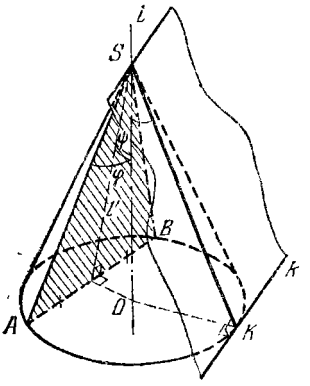


Рис. 300.

Задача 3. Грани двугранного угла, имеющего величину α, касаются боковой поверхности конуса. Угол между ребром двугранного угла и осью конуса равен β. Найти угол раствора конуса.

△ Очевидно, вершина S конуса принадлежит ребру данного двугранного угла. Пусть O — центр основания конуса. Обозначим $|SO|=a$, φ — угол раствора конуса. Пусть OM_0 — перпендикуляр к ребру двугранного угла, а OM_1 и OM_2 — перпендикуляры к плоскостям его граней (рис. 301). Тогда SN_1 и SN_2 — образующие, по которым грани угла касаются боковой поверхности конуса, и $\widehat{OSM_1}=\widehat{OSM_2}=\varphi/2$. Далее, угол $M_1M_0M_2$ — линейный угол двугранного угла, значит, $\widehat{M_1M_0M_2}=\alpha$. По условию дано еще, что $\widehat{OSM_0}=\beta$.

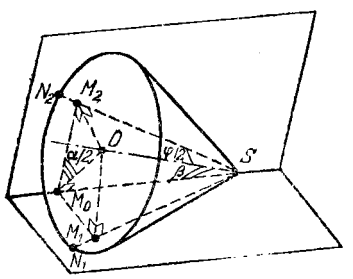


Рис. 301.

Из треугольников OSM_1 и OSM_2 имеем $|OM_1|=|OM_2|=a\sin(\varphi/2)$. Отсюда следует, что M_0O — биссектриса угла $M_1M_0M_2$ (т. е. ось конуса принадлежит биссектору данного двугранного угла). Учитывая это, из треугольника OM_0M_1 находим $|OM_0|=|OM_1|:\sin\frac{\alpha}{2}=a\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}$. С другой стороны, из треугольника OSM_0 имеем $|OM_0|=a\sin\beta$. Таким образом, $\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}=\sin\beta$, откуда $\sin(\varphi/2)=\sin\beta\cdot\sin(\alpha/2)$.

Ответ: $2\arcsin(\sin\beta\sin(\alpha/2))$. ▲

Пирамида называется *описанной* около конуса (а конус — *вписанным* в пирамиду), если вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса, а основание пирамиды описано около основания конуса. Очевидно,

для того чтобы в пирамиду можно было вписать конус необходимо и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, а основание высоты пирамиды было центром этой окружности.

В частности, в любую правильную пирамиду можно вписать конус.

Каждая боковая грань пирамиды, описанной около конуса, касается его боковой поверхности по образующей, которая в то же время является высотой этой боковой грани и проходит через точку касания соответствующей стороны основания пирамиды с окружностью основания конуса (рис. 302, SK_1 — высота грани SA_1A_2 и т. д.). Отметим еще, что в пирамиде, описанной около конуса, двугранные углы при основании имеют одну и ту же величину. Она равна углу наклона образующей конуса к плоскости его основания ($\widehat{SK_1O}$ и т. д., на рис. 302).

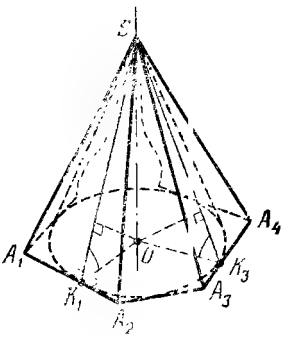


Рис. 302.

Задача 4. Около конуса описана пирамида. Доказать, что отношение объемов пирамиды и конуса равно отношению площадей их боковых поверхностей.

△ Обозначим радиус основания конуса r, его высоту H, длину образующей l, периметр основания пирамиды P (на рис. 302 $|OK_1|=r$, $|SO|=H$, $|SK_1|=l$). Поскольку основание пирамиды описано около окружности основания конуса, то площадь основания пирамиды равна $\frac{1}{2}rP$. Следовательно, объем пирамиды выражается по формуле $V_п=\frac{1}{6}rPH$. Объем конуса находим по формуле $V_к=\frac{1}{3}\pi r^2H$. Отсюда имеем $V_п:V_к=P:2\pi r$. Для площадей боковых поверхностей пирамиды и конуса имеем соответственно выражения: $S_п=\frac{1}{2}lP$, $S_к=\pi rl$. Отсюда $S_п:S_к=P:2\pi r$. Видно, что отношения $V_п:V_к$ и $S_п:S_к$ равны. ▲

§ 3. Сфера

Сфера радиуса R есть множество точек пространства, удаленных от данной точки на положительное расстояние R. В координатном пространстве сфера с центром $O(a;\ b;\ c)$ и радиусом R

задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Сфера является фигурой вращения. При вращении полуокружности радиуса R вокруг ее диаметра получается сфера радиуса R.

Сечение сферы радиуса R плоскостью, отстоящей от ее центра на расстоянии d, $0\leqslant d<R$, есть окружность радиуса $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Сечения, равноудаленные от центра сферы, имеют равные радиусы.

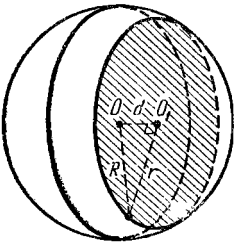


Рис. 303.

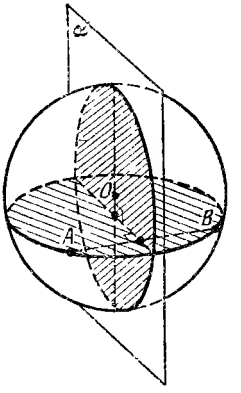


Рис. 304.

Сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр ($d=0$), называется *большой окружностью*. Если центр сферы не лежит в плоскости сечения ($0<d<R$), то прямая, проходящая через центр сферы и центр окружности сечения, перпендикулярна плоскости сечения (рис. 303).

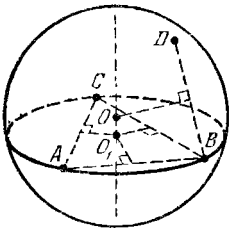


Рис. 305.

Если точки A и B принадлежат сфере, то ее центр как точка, равноудаленная от A и B, лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину (плоскость α на рис. 304).

Задача 1. Доказать, что через любые четыре точки, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну.

△ Центр сферы, проходящей через данные точки, должен принадлежать каждой из плоскостей, проведенных через середины отрезков с концами в данных точках перпендикулярно этим отрезкам. Известно (гл. XVI, задача 3 раздела I), что эти плоскости пересекаются в *одной* точке, обозначим ее O (рис. 305). Эта точка равноудалена от всех данных точек. Расстояние между точкой O и какой-либо из данных точек обозначим R. Сфера с центром O и радиусом R проходит

через все данные точки. Из проведенного рассуждения видно, что такая сфера может быть только одна. ▲

Многогранник называется *вписанным* в сферу (а сфера — *описанной* около многогранника), если все вершины многогранника лежат на сфере.

Из результата задачи 1 следует, что около любого тетраэдра можно описать сферу. В правильном тетраэдре его центр удален от каждой вершины на расстояние, равное $3H/4$, где H — высота тетраэдра. Значит, центр правильного тетраэдра является центром описанной сферы. Радиус этой сферы равен $3H/4 = a\sqrt{6}/4$, где a — длина ребра тетраэдра.

Центр куба удален от каждой его вершины на расстояние $a\sqrt{3}/2$, где a — длина ребра куба. Значит, центр сферы, описанной около куба совпадает с центром куба, а радиус этой сферы равен $a\sqrt{3}/2$.

Задача 2. Все плоские углы при вершине S пирамиды $SABC$ прямые, $|SA| = a$, $|SB| = b$, $|SC| = c$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

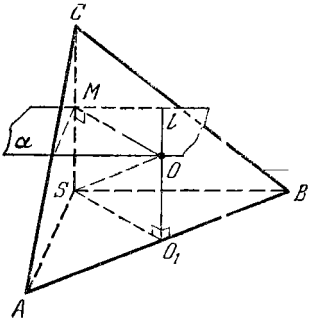


Рис. 306.

△ Центр окружности, описанной около треугольника SAB, — середина O_1 гипотенузы AB (рис. 306). Через точку O_1 проведем прямую $l \perp (SAB)$. Заметим, что $l \parallel (SC)$, поскольку прямые l и SC перпендикулярны плоскости SAB. Через середину M отрезка SC перпендикулярно ему проведем плоскость α. Точка O пересечения плоскости α и прямой l равноудалена от всех вершин пирамиды, а следовательно, является центром сферы, описанной около пирамиды. В прямоугольном треугольнике SOO_1 имеем $|OO_1| = |MS| = \frac{1}{2}c$, $|SO_1| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, следовательно, радиус описанной сферы равен $|SO| = \sqrt{|OO_1|^2 + |SO_1|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. ▲

Для пирамиды и призмы имеют место следующие утверждения:

а) *Для того чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность* (рис. 307).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству того, что около всякого тетраэдра можно описать сферу (задача 1 этого параграфа, задача 3 раздела I гл. XVI).

б) *Для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы*

около ее основания можно было описать окружность (рис. 308, см. задачу 9 раздела I).

Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружности, описанной около основания. Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

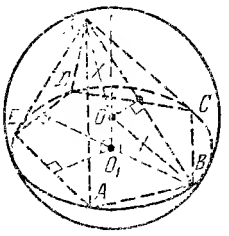


Рис. 307.

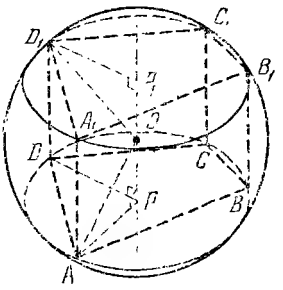


Рис. 308.

Из указанных утверждений следует, что *около любой правильной пирамиды и около любой правильной призмы можно описать сферу.*

Рассмотрим понятие касательной плоскости к сфере. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы ($d = R$), то сфера и плоскость имеют одну общую точку. Такая плоскость называется *касательной* к сфере. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.

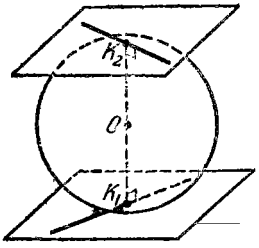


Рис. 309.

Если сфера касается двух плоскостей, то ее центр удален от каждой плоскости на расстояние, равное радиусу сферы. Если касательные плоскости параллельны, то точки касания являются концами одного диаметра сферы, перпендикулярного обеим плоскостям (рис. 309). Если касательные плоскости пересекаются, то центр сферы принадлежит биссектору двугранного угла между плоскостями (рис. 310). Точки касания сферы с плоскостями принадлежат граням этого угла.

Сфера называется *вписанной* в многогранный угол, если она касается каждой его грани.

Задача 3. Доказать, что в любой трехгранный угол можно вписать сферу.

△ Центр сферы, вписанной в трехгранный угол, должен принадлежать биссекторам его двугранных углов. Известно (гл. XVI, § 3, задача 7), что эти биссекторы пересекаются внутри трехгран-

ного угла по лучу (луч l на рис 311). Пусть O — точка этого луча, не совпадающая с вершиной угла, R — расстояние от этой точки до плоскостей граней. Сфера с центром O и радиусом R касается всех граней угла, т. е. вписана в данный трехгранный угол ▲

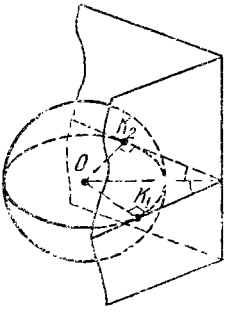


Рис. 310.

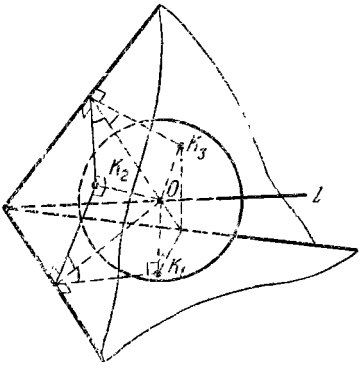


Рис. 311.

Заметим, что луч l, не считая его начала, есть множество центров сфер, вписанных в данный трехгранный угол.

Сфера называется *вписанной* в многогранник (а многогранник — *описанным* около сферы), если она касается всех его граней.

Центр вписанной сферы является общей точкой биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранника. Отсюда следует, что если вписанная сфера существует, то только одна.

Известно (гл. XVI, § 5, задача 8), что биссекторы двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке. Сфера с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра. Значит,

в любой тетраэдр можно вписать сферу.

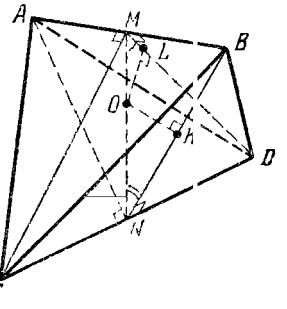


Рис. 312.

Задача 4. В тетраэдре $ABCD$ $|AB| = 4$ см, $|CD| = 12$ см, $|AC| = |BC| = |AD| = |BD| = 3\sqrt{6}$ см. Найти радиус сферы, вписанной в этот тетраэдр.

△ Пусть M и N — середины ребер AB и CD (рис. 312). Поскольку треугольники ACB и ADB равнобедренные, то $[CM] \perp [AB]$ и $[DM] \perp [AB]$. Это означает, что угол CMD — линейный угол двугранного угла при ребре AB. Из прямоугольных треугольников AMC и AMD находим, что $|CM| = |DM| = 5\sqrt{2}$ см. Видно, что треугольник CMD равнобедренный, поэтому MN — биссектриса угла CMD. Но тогда полуплоскость ANB (с гра-

ницей AB) — биссектор двугранного угла при ребре AB. Аналогично устанавливаем, что полуплоскость CMD (с границей CD) является биссектором двугранного угла при ребре CD. Центр вписанной в тетраэдр сферы лежит на отрезке MN — пересечении этих двух биссекторов.

Из прямоугольного треугольника BND находим, что $|BN| = 3\sqrt{2}$ см, а из прямоугольного треугольника NMB находим $|MN| = \sqrt{14}$ см.

Пусть O — центр вписанной сферы, r — ее радиус. Проведем перпендикуляры OK и OL к граням BCD и ABD, тогда $|OK| = |OL| = r$. Обозначим еще $\widehat{BNM} = \alpha$, $\widehat{DMN} = \beta$. Из прямоугольных треугольников NMB и NMD находим соответственно $\sin\alpha = \sqrt{2}/3$ и $\sin\beta = 3\sqrt{2}/5$. Из прямоугольного треугольника OKN имеем $|ON| = \dfrac{|OK|}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}r$. Тогда $|OM| = |MN| - |ON| = \sqrt{14} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}r$, и теперь из прямоугольного треугольника OLM получаем уравнение $\left(\sqrt{14} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}r\right)\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{5} = r$. Отсюда находим, что $r = 3/\sqrt{7}$ см. ▲

В правильном тетраэдре его центр удален от каждой грани на расстояние, равное $H/4$, где H — высота тетраэдра. Следовательно, центр вписанной в правильный тетраэдр сферы совпадает с центром тетраэдра. Радиус этой сферы вычисляется по формуле $r = \dfrac{1}{4}H = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$, где a — длина ребра тетраэдра.

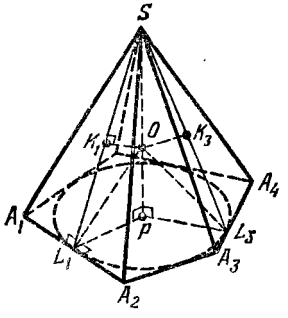


Рис. 313.

В кубе центр вписанной сферы совпадает с центром куба. Радиус этой сферы равен $a/2$, где a — длина ребра куба.

Не в каждом многограннике биссекторы двугранных углов пересекаются в одной точке, значит, не в каждый многогранник можно вписать сферу.

Задача 5. Доказать, что если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу.

△ Пусть L_1, L_2, ... — точки касания вписанной в основание пирамиды окружности с его сторонами, P — центр вписанной окружности (рис. 313). Прямоугольные треугольники SPL_1, SPL_2, ... конгруэнтны и имеют общий катет SP. Следовательно, биссектрисы углов при вершинах L_1, L_2, ... пересекают этот катет в одной и той же точке O. Из точки O опустим перпендикуляры OK_1, OK_2, ... на гипотенузы SL_1, SL_2, ... Плоскость SL_1P пе-

пендикулярна плоскости грани SA_1A_2, поэтому $(OK_1) \perp (SA_1A_2)$. Аналогично имеем $(OK_2) \perp (SA_2A_3)$, $(OK_3) \perp (SA_3A_4)$ и т. д. Учитывая, что $|OP| = |OK_1| = |OK_2| = \ldots$, видим, что точка O равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды. Значит, сфера с центром O и радиусом $r = |OP|$ касается всех граней, т. е. вписана в данную пирамиду. ▲

Из доказанного утверждения следует, что

в любую правильную пирамиду можно вписать сферу.

Сфера может быть вписана и в пирамиды, не удовлетворяющие условия утверждения задачи 5.

Задача 6. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания; $|AB| = 3$ см, $|SA| = 4$ см. Доказать, что в пирамиду можно вписать сферу, и найти радиус этой сферы.

△ Вначале получим некоторые необходимые условия, которые должны выполняться для расположения центра сферы и ее радиуса. Для этого предположим, что вписанная в пирамиду сфера существует, и пусть O — ее центр, r — радиус. Через центр O проведем плоскость, перпендикулярную прямой AD (плоскость KLM на рис. 314). Пусть l — линия пересечения плоскостей SAD и SBC. Поскольку $(BC) \parallel (AD)$, то и $l \parallel (AD)$. Проведенная плоскость перпендикулярна каждой из прямых AD, BC и l, поэтому углы LKM, KML и KLM соответственно — линейные углы двугранных углов при ребрах AD, BC и l (последний есть двугранный угол между гранями SBC и SAD). Поскольку сфера касается граней каждого из этих двугранных углов, то ее сечение плоскостью KLM (*большая* окружность) должна быть вписана в треугольник KLM. Радиус этой окружности легко найти. Действительно, плоскости KLM и ASB параллельны, а отсюда следует, что треугольники KLM и ASB конгруэнтны и $|KL| = |AS| = 4$ см, $|KM| = |AB| = 3$ см. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник KLM, найдем по формуле $r = 2S/P$, где S и P соответственно — площадь и периметр этого треугольника, получим $r = 1$ см. Это и есть радиус вписанной сферы. Точно такой же результат будет получен, если рассмотреть сечение пирамиды и сферы плоскостью, проведенной через центр O перпендикулярно ребру AB (плоскость PQR на рис 314). Треугольник PQR конгруэнтен треугольнику KLM ($|PQ| = 4$ см, $|PR| = 3$ см), и радиус вписанной в него окружности (большой окружности сферы) равен 1 см.

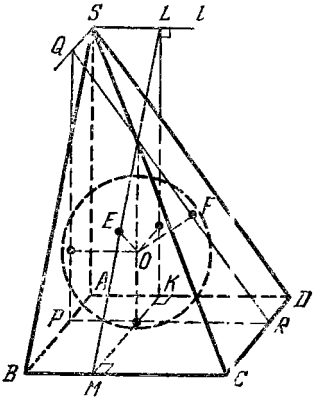


Рис. 314.

Теперь докажем, что вписанная сфера действительно существует. Внутри трехгранного угла $ASBD$ (с вершиной A) возьмем

точку O, отстоящую от каждой грани угла на расстоянии 1 см. Сфера с центром O и радиусом 1 см касается граней SAD, SAB и $ABCD$ пирамиды. Рассмотрим опять сечение KLM, проведенное через центр сферы. Точка O отстоит от сторон KL и KM треугольника KLM на расстояние 1 см, а значит, совпадает с центром вписанной в этот треугольник окружности. Поэтому, если $[OE] \perp [LM]$, то $|OE| = 1$ см. Из того, что $(KLM) \perp (SBC)$, следует, что $[OE] \perp (SBC)$. Значит, точка O отстоит от плоскости SBC на расстояние 1 см, а сфера с центром O и радиусом 1 см. касается этой плоскости. Аналогично доказывается, что сфера касается и грани SCD. Таким образом, вписанная сфера существует и ее радиус равен 1 см.

Ответ: 1 см. ▲

Для призмы имеет место следующее утверждение:

Для того чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности (см. задачу 45 раздела II).

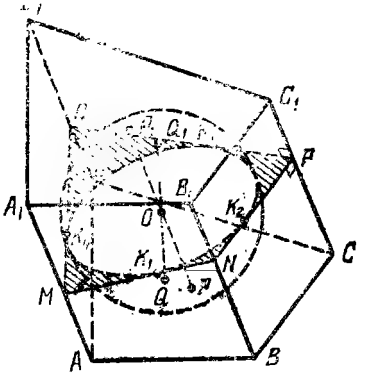


Рис. 315.

Диаметр сферы, вписанной в призму, равен диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы (сечение $MNPQ$ на рис. 315). Центр сферы лежит на прямой (PP_1 на рис. 315), проведенной параллельно боковым ребрам через центр окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, и является серединой отрезка, отсекаемого на этой прямой основаниями призмы (рис. 315, центр O — середина отрезка PP_1, высота QQ_1 призмы равна диаметру сферы.) Точки касания сферы с боковыми гранями призмы принадлежат перпендикулярному сечению, проведенному через центр сферы.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

Задача 7. Около сферы описан прямой параллелепипед с диагоналями длины $\sqrt{10}$ см и 4 см. Найти радиус сферы.

△ Высота данного параллелепипеда равна диаметру вписанной сферы. Обозначим радиус сферы R, тогда $H = 2R$.

Пусть AC и BD соответственно большая и меньшая диагонали основания параллелепипеда (рис. 316), обозначим $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$. Поскольку параллелепипед прямой, AC_1 и BD_1 будут тогда его большей и меньшей диагоналями, т. е. $|AC_1| = 4$ см, $|BD_1| = \sqrt{10}$ см. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и BDD_1

получаем

$$d_1^2 + 4R^2 = 16, \quad d_2^2 + 4R^2 = 10. \qquad (1)$$

Рассмотрим перпендикулярное сечение параллелепипеда, проходящее через центр O сферы. Это параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$ конгруэнтный основанию, и в частности, $|A_2O| = \frac{1}{2}d_1$, $|B_2O| = \frac{1}{2}d_2$. Поскольку этот параллелограмм описан около окружности, он является ромбом, и, значит, $\widehat{A_2OB_2} = 90°$. Пусть $[OK] \perp [A_2B_2]$, тогда $|OK| = R$, и из прямоугольного треугольника A_2OB_2 имеем, что $|OK| \cdot |A_2B_2| = |A_2O| \cdot |B_2O|$, следовательно, $2R\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = d_1d_2$. Из этого уравнения, используя (1), получаем уравнение $3R^4 - 13R^2 + 10 = 0$, откуда $R_1^2 = 10/3$, $R_2^2 = 1$. Значение $R_1^2 = 10/3$ является, очевидно, посторонним ($d_2^2 + 4R_1^2 > 10$), значит, $R^2 = 1$, $R = 1$ см. ▲

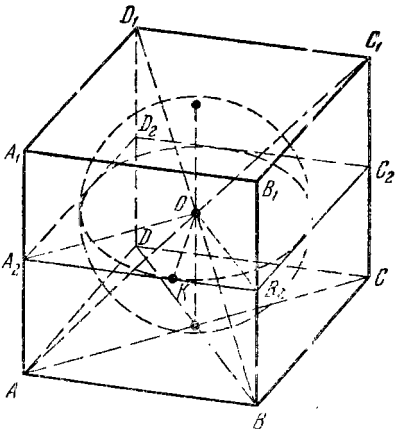


Рис. 316.

Задача 8. Около сферы радиуса R описан многогранник объема V и с площадью поверхности S. Доказать, что $R = 3V/S$.

△ Представим описанный многогранник как объединение пирамид, вершинами которых является центр сферы, а основаниями — грани многогранника (заметим, что описанный многогранник является выпуклым). Обозначим площади граней многогранника S_1, S_2, ..., S_n, по условию $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S$. Радиус, проведенный в точку касания j-й грани (площади S_j) со сферой, является высотой пирамиды, для которой эта грань служит основанием. Значит, объем j-й пирамиды равен $R \cdot S_j/3$. Сумма объемов всех этих пирамид равна объему многогранника:

$$\frac{1}{3}RS_1 + \frac{1}{3}RS_2 + \ldots + \frac{1}{3}RS_n = V.$$

Отсюда получаем, что $RS/3 = V$, т. е. $R = 3V/S$. ▲

Прямая имеет со сферой общие точки тогда и только тогда, когда расстояние d от центра сферы до этой прямой не превосходит радиуса R сферы.

Если $0 \leqslant d < R$, то прямая пересекает сферу в двух точках. Отрезок с концами в этих точках называют *хордой*, а прямую — *секущей* (рис. 317, (SA) — секущая, $[AB]$ — хорда).

Если $d = R$, то прямая имеет со сферой одну общую точку — основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на эту

прямую. Такая прямая называется *касательной* к сфере (рис. 317, (SK) — касательная). Любая касательная прямая лежит в касательной плоскости, проведенной через точку касания прямой и сферы. Верно и обратное: любая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания, является касательной к сфере.

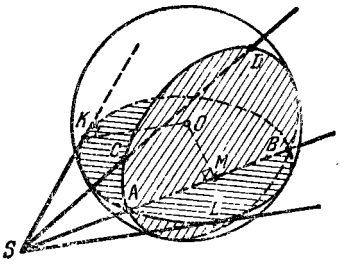


Рис. 317.

Секущие и касательные прямые к сфере обладают такими же свойствами как и секущие и касательные к окружности. Укажем некоторые из этих свойств.

а) *Перпендикуляр из центра сферы на секущую прямую проходит через середину хорды* (рис. 317, $|AM|=|MB|$, $[OM]\perp[AB]$).

б) *Плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная хорде, проходит через середину хорды.*

Это утверждение полезно сформулировать в равносильной форме.

б′) *Плоскость, проведенная через середину хорды перпендикулярно этой хорде, проходит через центр сферы.*

в) *Если две прямые пересекаются в точке S и касаются сферы соответственно в точках K и L* (рис. 317), *то* $|SK|=|SL|$ (*теорема о касательных*).

г) *Если две прямые пересекаются в точке S, и одна из них касается сферы в точке K, а другая пересекает сферу в точках A и B* (рис. 317), *то* $|SA|\cdot|SB|=|SK|^2$ (*теорема о касательной и секущей*).

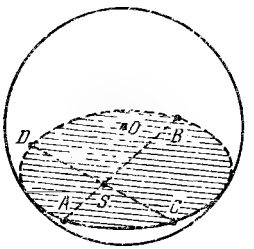


Рис. 318.

д) *Если две прямые пересекаются в точке S и пересекают сферу соответственно в точках A, B и C, D* (рис. 317, 318), *то* $|SA|\cdot|SB|=|SC|\cdot|SD|$ (*точка S может лежать как снаружи, так и внутри сферы, в последнем случае данное утверждение иногда называют теоремой о пересекающихся хордах*).

Свойство б) (и б′)) является следствием свойства а). Для доказательства свойств а), в), г), д) можно провести плоскость соответственно: в случае а) — через секущую прямую и центр сферы; в случае в) — через касательные SK и SL; в случае г) — через касательную и секущую; в случае д) — через прямые AB и CD, а затем воспользоваться соответствующими свойствами хорд, секущих и касательных к окружности.

Задача 9. Доказать, что существует сфера, касающаяся всех ребер правильной треугольной пирамиды, и найти ее радиус, если сторона основания пирамиды имеет длину a, боковое ребро — длину b.

△ Если сфера касается сторон основания ABC (рис 319), то ее сечение плоскостью основания — окружность, вписанная в треугольник ABC. Эта окружность касается сторон треугольника (он правильный) в их серединах K_1, K_2, K_3. Центр сферы должен быть равноудален от этих точек, следовательно, должен лежать на перпендикуляре к плоскости основания, проходящем через его центр P, т. е. на прямой SP.

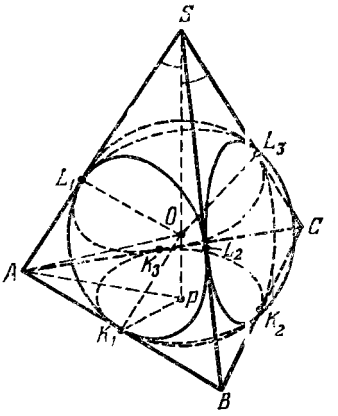


Рис. 319.

Если сфера касается ребра AS в точке L_1, то ее центр лежит в плоскости, проведенной через точку L_1 перпендикулярно ребру AS. Эта плоскость пересечет плоскость ASP по прямой, перпендикулярной ребру AS. Заметим еще, что по свойству касательных $|AL_1| = |AK_1| = a/2$, где a — длина стороны основания.

Из проведенного анализа вытекает, что центр сферы должен быть точкой пересечения прямой SP с прямой, проведенной в плоскости ASP перпендикулярно ребру AS через точку L_1 этого ребра такую, что $|AL_1| = a/2$. Обозначим точку пересечения этих прямых O и докажем, что сфера с центром O и радиусом $r = |OK_1|$ действительно касается всех ребер пирамиды.

Во-первых, очевидно, $|OK_1| = |OK_2| = |OK_3|$, т. е. эта сфера касается всех сторон основания. Во-вторых, из конгруэнтности прямоугольных треугольников OL_1A и OK_1A (по катету и гипотенузе) следует, что $|OL_1| = |OK_1| = r$, значит, сфера касается и ребра AS. Если $[OL_2] \perp [BS]$, $[OL_3] \perp [CS]$, то из конгруэнтности треугольников SOL_1, SOL_2, SOL_3 (по гипотенузе и острому углу) следует, что $|OL_2| = |OL_3| = |OL_1| = r$. Значит, сфера касается и ребер BS и CS. Тем самым доказано, что сфера, касающаяся всех ребер пирамиды существует.

Найдем радиус этой сферы из подобия треугольников SL_1O и SPA. Имеем $r : |AP| = |SL_1| : |SP|$, откуда, учитывая, что

$$|SL_1| = b - \frac{a}{2}, \quad |AP| = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad |SP| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}},$$

получаем, что $r = a\,(2b - a)/2\sqrt{3b^2 - a^2}$. ▲

§ 4. Комбинации сферы, конуса и цилиндра

Сфера называется *описанной* около цилиндра (конуса), если окружности его оснований (окружность его основания и вершина) принадлежат сфере (рис. 320, 321).

Около любого цилиндра и около любого конуса можно описать сферу. Центр описанной сферы совпадает с центром окружности, описанной около осевого сечения соответственно цилиндра или конуса. Радиус сферы равен радиусу этой окружности.

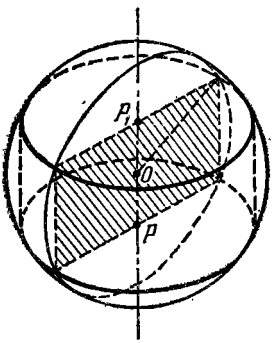


Рис. 320

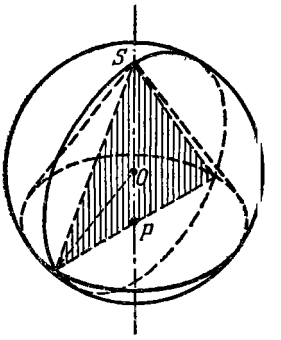


Рис. 321.

Сфера называется *вписанной* в цилиндр (а цилиндр — *описанным* около сферы), если сфера касается каждой образующей и обоих оснований цилиндра (рис. 322).

В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания. Центр вписанной сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра. Каждой образующей сфера касается в ее середине,

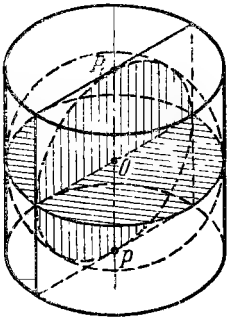


Рис. 322.

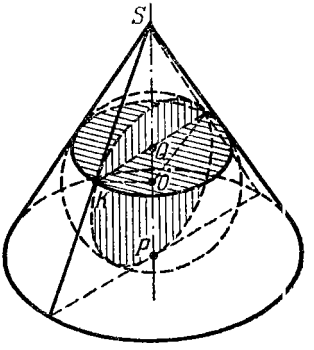


Рис. 323.

множество точек касания есть окружность — сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью, параллельной основаниям и проходящей через середину высоты.

Сфера называется *вписанной* в конус (а конус — *описанным* около сферы), если сфера касается основания конуса и каждой образующей (рис. 323).

В любой конус можно вписать сферу. Ее центр совпадает с центром окружности, вписанной в осевое сечение конуса, радиус сферы равен радиусу этой окружности. Множество точек касания сферы с образующими есть окружность — сечение боковой поверхности конуса плоскостью, параллельной основанию конуса (на рис. 323 точка Q — центр этой окружности).

Задача 1. В конус вписана сфера. Окружность касания сферы с боковой поверхностью конуса служит окружностью основания цилиндра, вписанного в эту сферу. Площадь сферы составляет 4/9 площади поверхности конуса. Найти отношение объемов цилиндра и конуса.

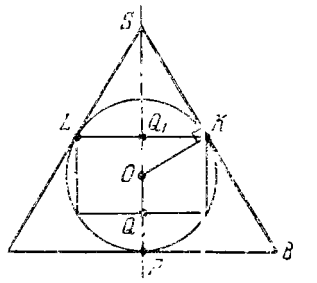


Рис. 324

△ Ось конуса является в то же время и осью цилиндра, центр сферы лежит на этой оси. Рассмотрим сечения трех данных фигур плоскостью, проходящей через ось конуса (рис. 324). Сечение конуса (осевое) — треугольник ASB, сечение сферы — окружность с центром O, вписанная в треугольник ASB (K, L, P — точки касания), сечение цилиндра (осевое) — прямоугольник, вписанный в эту окружность, отрезок LK служит стороной этого прямоугольника.

Пусть l и $r_к$ — длина образующей и радиус основания конуса, r — радиус сферы, $r_ц$, h — радиус основания и высота цилиндра. Имеем (рис. 324): $|SB|=l$, $|PB|=r_к$, $|KB|=|PB|=r_к$ (по свойству касательных), $|SK|=l-r_к$, $|SP|=\sqrt{l^2-r_к^2}$, $|OK|=r$. Из подобия прямоугольных треугольников SKO и SPB находим, что

$$r=r_к\frac{l-r_к}{\sqrt{l^2-r_к^2}}=r_к\sqrt{\frac{l-r_к}{l+r_к}}.$$

Площади поверхностей конуса и сферы определяем соответственно по формулам: $S_к=\pi r_к(l+r_к)$, $S=4\pi r^2=4\pi r_к^2\frac{l-r_к}{l+r_к}$. По условию $S:S_к=4:9$, откуда получаем уравнение $l^2-7r_к l+10r_к^2=0$, и находим, что либо $l=5r_к$, либо $l=2r_к$.

Из подобия треугольников SQ_1K и SPB имеем $|Q_1K|=|SK|\cdot\frac{|PB|}{|SB|}$. Учитывая, что $|Q_1K|=r_ц$, получаем, что $r_ц=r_к(l-r_к)/l$. Из прямоугольного треугольника OQ_1K находим $|OQ_1|=\sqrt{|OK|^2-|Q_1K|^2}=\frac{r_к^2}{l}\sqrt{\frac{l-r_к}{l+r_к}}$. Для высоты цилиндра имеем равенство $h=2|OQ_1|$, значит, $h=\frac{2r_к^2}{l}\sqrt{\frac{l-r_к}{l+r_к}}$. Находим

объемы конуса и цилиндра:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi r_к^2 \sqrt{l^2 - r_к^2}, \qquad V_ц = \frac{2\pi r_к^2 (l - r_к)^{5/2}}{l^3 (l + r_к)^{1/2}},$$

и отношение этих объемов: $V_ц : V_к = \frac{6r_к^2 (l - r_к)^2}{l^3 (l + r_к)}$. Подставляя значения $l = 5r_к$ и $l = 2r_к$, найдем соответственно, что либо $V_ц : V_к = 16 : 125$, либо $V_ц : V_к = 1 : 4$.

Ответ: 16 : 125, или 1 : 4. ▲

Рассмотрим взаимное расположение двух сфер с центрами O_1 и O_2, радиусами r_1 и r_2. Пусть $d = |O_1O_2|$ — расстояние между центрами этих сфер.

Если $d > r_1 + r_2$ или $d < |r_1 - r_2|$, то сферы не имеют общих точек.

Если $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, то пересечением сфер служит окружность. Плоскость этой окружности перпендикулярна прямой O_1O_2, центр окружности лежит на этой прямой (рис. 325).

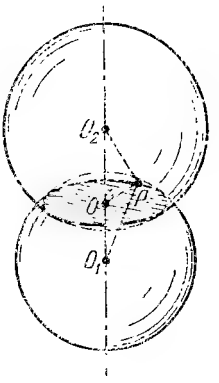
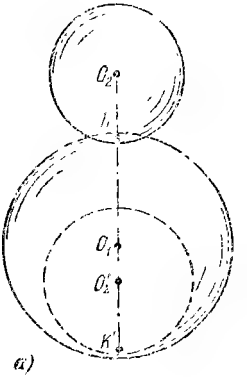


Рис. 325.



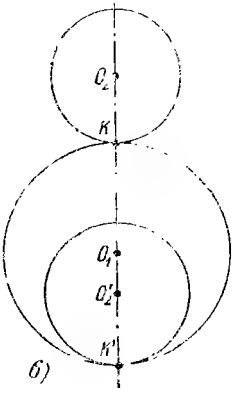


Рис. 326.

Если $d = r_1 + r_2$ или $d = |r_1 - r_2|$ (в последнем случае $r_1 \neq r_2$), то сферы имеют только одну общую точку и называются *касающимися*. Общая точка сфер лежит на прямой O_1O_2 и называется *точкой касания*. Если $d = r_1 + r_2$, то говорят о *внешнем касании* (на рис. 326, *а* это сферы с центрами O_1 и O_2), если же $d = |r_1 - r_2|$, то — о *внутреннем касании* (на рис. 326, *а* это сферы с центрами O_1 и O_2'). На рис. 326, *б* показано сечение касающихся сфер плоскостью, проходящей через линию центров O_1O_2. Касающиеся сферы имеют в точке касания общую касательную плоскость.

Задача 2. Три сферы каждая радиуса r касаются плоскости α, и каждая из сфер касается двух других. Найти радиус чет-

вертой сферы, касающейся плоскости α и каждой из трех данных сфер.

△ Пусть O_1, O_2, O_3 — центры данных сфер, O — центр четвертой сферы. Имеем $|O_1O_2| = |O_2O_3| = |O_3O_1| = 2r$. Четвертая сфера, очевидно, только внешне может касаться данных сфер, поэтому $|OO_1| = |OO_2| = |OO_3| = r + x$, где x — радиус четвертой сферы. Точка O равноудалена от точек O_1, O_2, O_3, поэтому лежит на перпендикуляре к плоскости $O_1O_2O_3$, проведенном через центр правильного треугольника $O_1O_2O_3$. От плоскости α (на рис. 327

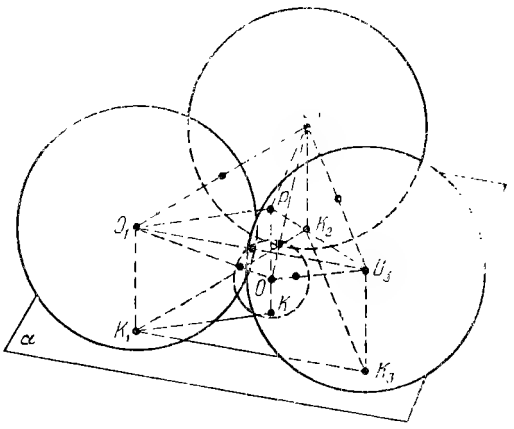


Рис. 327.

эта плоскость задана точками касания K_1, K_2, K_3) точка O удалена на расстояние x, $|OK| = x$. Каждая из точек O_1, O_2, O_3 удалена от плоскости α на расстояние r. Поскольку $[PK] \perp \alpha$, то и $|PK| = r$, а $|PO| = |r - x|$. Учитывая, что $|PO_1| = 2r\sqrt{3}/3$, из прямоугольного треугольника OPO_1 имеем $|OO_1|^2 = |O_1P|^2 + |PO|^2$, $(r+x)^2 = \frac{4}{3}r^2 + (r-x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = r/3$. ▲

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА I

1. Из круга вырезается сектор с углом α при вершине и сворачивается в коническую воронку. При каком α получится воронка наибольшей вместимости?

2. Правильный треугольник со стороной длины a вращается вокруг оси, параллельной его высоте и отстоящей от нее на расстояние $b > a/2$. Найти объем фигуры вращения.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы имеет длину 1,6 дм, боковое ребро — длину 1,2 дм. Четыре вершины призмы лежат на окружности основания конуса, две другие — на его боковой поверхности. Найти объем этого конуса.

4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины B, C_1, середину ребра AD и центр грани CC_1D_1D.

5. В сфере радиуса r проведены хорда AB и диаметр CD. Известно, что $|AB|=r$, $(\widehat{AB, CD})=\pi/3$, $|AC|=\sqrt{2}r$, $|BC|>|AC|$. Найти длину отрезка BD.

6. Около сферы радиуса R описан усеченный конус (основания и каждая образующая конуса касаются сферы), образующая которого имеет длину a. Найти объем этого конуса.

7. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, в которой двугранный угол при боковом ребре имеет величину 120°. Вторая сфера касается первой сферы и боковых граней пирамиды. Найти радиус второй сферы.

8. В двугранный угол величины 2α вписаны две касающиеся друг друга сферы, каждая радиуса r. Третья сфера, вписанная в этот же угол касается первых двух. Найти радиус третьей сферы.

9. Доказать, что для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая, и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

10. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна высоте основания пирамиды и равна a. Сфера касается плоскости основания пирамиды, двух ее боковых ребер и продолжения третьего бокового ребра за вершину пирамиды. Найти радиус этой сферы.

11*. В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC имеет длину a, боковое ребро — длину $2a/3$. Сфера касается всех ребер этой пирамиды. Найти площадь части сферы, лежащей вне пирамиды.

12. Две сферы S_1 и S_2 касаются друг друга и каждая сфера касается обеих граней α и β двугранного угла величины 2φ. Сфера S_1 касается грани α в точке A, а сфера S_2 касается грани β в точке B. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

13. Высота цилиндра равна $3r$. Внутри цилиндра расположены три сферы радиуса r так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра (т. е. имеет с этой поверхностью одну общую точку). Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера — верхнего основания. Найти радиус цилиндра.

ЗАДАЧИ РАЗДЕЛА II

1. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак объема V. Каковы должны быть радиус и высота бака, чтобы площадь его поверхности была наименьшей?

2. Ребро куба имеет длину a. Две вершины куба являются центрами оснований цилиндра, остальные вершины лежат на боковой поверхности цилиндра. Найти объем этого цилиндра.

3. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V. Ребра AB и CD тетраэдра перпендикулярны, имеют равные длины, и отрезок MN, соединяющий их середины, перпендикулярен этим ребрам. Прямая MN является осью цилиндра, окружности оснований которого имеют по одной общей точке с двумя гранями тетраэдра. Найти наибольший возможный объем такого цилиндра.

4. Все вершины правильной пирамиды $SABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости SAB. Найти радиус цилиндра, если $|AB|=a$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину a, боковое ребро — длину $\frac{5}{2}a$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SAB, другое — вписано в сечение пирамиды. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

6. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина каждого ребра равна a. Вершины A и A_1 лежат на боковой поверхности цилиндра, плоскость BB_1C_1C касается этой поверхности. Ось цилиндра параллельна прямой B_1C. Найти радиус цилиндра.

7. Вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности цилиндра. Доказать, что две параллельные стороны прямоугольника перпендикулярны оси цилиндра.

8. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с центром одного из оснований цилиндра, вершины B_1 и C_1 лежат на окружности другого основания, а вершины A_1, B, C — на боковой поверхности цилиндра. Определить отношение объемов цилиндра и призмы.

9*. Одна вершина правильного тетраэдра расположена на оси цилиндра, а другие вершины — на боковой поверхности этого цилиндра. Найти длину ребра тетраэдра, если радиус цилиндра равен R.

10. Прямая касается боковой поверхности цилиндра, если она лежит в касательной плоскости и имеет с поверхностью цилиндра одну общую точку. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Цилиндр, ось которого параллельна прямой BD_1, расположен так, что прямые AA_1, BC и C_1D_1 касаются его боковой поверхности. Найти радиус цилиндра (найти все решения).

11. Площадь сечения конуса плоскостью, составляющей угол 30° с осью конуса, равна площади осевого сечения. Найти угол раствора конуса.

12. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Площадь боковой грани пирамиды равна площади осевого сечения конуса. Найти отношение площадей боковых поверхностей конуса и пирамиды.

13. Угол раствора конуса равен 2α, длина образующей равна . Найти наибольшую возможную площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину. Найти величину угла между осью и плоскостью сечения наибольшей площади.

14. Точки A (1; 2; — 2), B (4; 2; — 2) C (3; 4; — 2) лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Найти координаты вершины конуса и площадь сечения конуса плоскостью $z=0$.

15. Точки A (1; 2; — 1), B (— 2; 2; — 1), C (— 2; 2; 3) лежат на окружности основания конуса, точка $M\left(0;\ 6;\ \frac{5}{3}\right)$ на его боковой поверхности. Найти площадь полной поверхности конуса.

16. Конус описан около куба следующим образом: четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины — на его боковой поверхности. Какой наименьший объем может иметь такой конус, если ребро куба имеет длину a?

17. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a, точки M и N — середины ребер AA_1 и A_1B_1 соответственно. Плоскость D_1MN касается боковой поверхности конуса, осью которого служит прямая CC_1, а центром основания — точка C. Найти объем этого конуса.

18. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC и CD прямые. Длина одного из ребер тетраэдра в три раза больше длины не пересекающегося с ним ребра. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса описана около одной из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

19. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и BD прямые, $ACD = \alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

20. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник с катетами AB и BC длины 8 см и 6 см соответственно. Гипотенуза AC является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре A_1B_1. Ребро AB пересекает боковую поверхность конуса в точке M так, что $AM = 5$ см. Определить объем конуса.

21. Отношение радиусов оснований усеченного конуса равно 2. Вершины A, B, B_1, A_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены на окружности большего основания, а вершины C и C_1 — на окружности меньшего основания конуса. Найти отношение объема конуса к объему призмы.

22. Вершины A, B и C правильного тетраэдра лежат на боковой поверхности конуса, вершина D принадлежит его основанию, прямая AD перпендикулярна плоскости этого основания. Найти длину ребра тетраэдра, если угол раствора конуса равен 90°, а радиус его основания R.

23. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен $3r$, радиус большего основания — $7r$. Вершины S и A правильной пирамиды $SABC$ лежат на окружности меньшего основания конуса, вершины B и C основания ABC пирамиды лежат на окружности большего основания конуса. Найти объем пирамиды $SABC$.

24. Прямая касается боковой поверхности конуса, если она лежит в касательной плоскости и имеет общую точку с образующей, не совпадающую с вершиной конуса.

Основание конуса лежит в плоскости грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а вершина S конуса лежит на луче OO_1, где O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Диагональ AB_1 касается боковой поверхности конуса. В каком отношении точка касания делит отрезок AB_1, если $|SO| = 2\ OO_1$?

25*. Треугольник ABC площади S расположен в одной плоскости с прямой l. Точка пересечения медиан треугольника удалена от l на расстояние d. Доказать, что объем фигуры, полученной вращением треугольника вокруг прямой l, равен $2\pi dS$.

26. Вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности конуса. Доказать, что две параллельные стороны прямоугольника перпендикулярны оси конуса.

27. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Каков наибольший возможный объем этой пирамиды?

28. Около шара объема V описана правильная треугольная пирамида. Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

29. Около шара описана правильная усеченная треугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти отношение объема шара к объему этой пирамиды.

30. Ребро правильного тетраэдра имеет длину a. Высота тетраэдра является диаметром сферы. Какова площадь части поверхности тетраэдра, лежащей внутри этой сферы?

31. Сфера касается всех ребер куба. Найти объем части куба, лежащей внутри сферы, если ребро куба имеет длину a.

32. Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найти отношение площади части сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

33. В пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые. Доказать, что вершина S, точка пересечения медиан треугольника ABC и центр описанной около пирамиды сферы лежат на одной прямой.

34. Ребро куба имеет длину a. Найти радиус сферы, проведенной через вершины A, D и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1.

35. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB, BC и CD прямые, $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\alpha$. Радиус сферы, описанной около тетраэдра равен R. Найти объем тетраэдра.

36. Точки A и B лежат в разных гранях прямого двугранного угла, точка A удалена от ребра этого угла на расстояние $3a$, точка B — на расстояние $4a$. Найти наименьший радиус сферы, касающейся граней угла и прямой AB.

37. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины ребер AA_1 и A_1D_1 соответственно, $|AB|=a$. Найти радиусы сфер, проходящих через точки E и F и касающихся плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

38. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Точка D — середина ребра AB, точка E лежит на ребре A_1C_1. Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C соответственно. Найти радиус сферы с центром на отрезке DE, касающейся плоскостей ABC и AA_1C_1C.

39. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют длину a. Найти радиус сферы, проходящей через центры боковых граней и касающейся сторон основания пирамиды.

40. В пирамиде $SABC$ ребро SC составляет с плоскостью основания угол 60°. Вершины A, B, C и середины всех боковых ребер лежат на сфере радиуса r. Найти высоту пирамиды.

41. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC — прямоугольный треугольник ($\widehat{BCA}=90°$), ребро AD перпендикулярно плоскости ABC, $|AD|=|BC|=3$ см, $|AC|=4$ см. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

42. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями AC и BD, $|AC|=8$ см, $|BD|=6$ см, ребро SA перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 2 см. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.

43. В правильной шестиугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. а) Найти отношение радиусов этих сфер. б) Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

44. Доказать, что для любой призмы описанной около сферы отношение площади боковой поверхности к площади основания равно 4.

45. Доказать, что для того, чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность, и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

46. Доказать, что для того, чтобы существовала сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра были равны.

47. В прямой двугранный угол вписана сфера радиуса r. Прямая касается сферы в точке K и пересекает грани угла в точках A и B так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$. Каждая из точек A и B удалена от ребра двугранного угла на расстояние $3r$. Найти длину отрезка AB.

48. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях AC и B_1D_1 граней куба взяты соответственно точки E и F так, что вписанная в куб сфера делит отрезок EF на три части, отношение длин которых равно $3 : 7 : 2$, считая от точки E. Найти длину отрезка EF.

49. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды имеет длину a. Через середины боковых ребер, принадлежащих одной из боковых граней, проведена плоскость, касающаяся вписанной в пирамиду сферы. Найти площадь получившегося сечения.

50. В правильной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ имеет длину a, высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани SAD в точке K. Найти площадь сечения пирамиды, проведенного через ребро AB и точку K.

51. В тетраэдре $ABCD$ длина каждого из ребер AB и CD равна 4 см, длина каждого из остальных ребер равна 3 см. В этот тетраэдр вписана сфера. Определить объем тетраэдра, вершинами которого являются точки касания сферы с гранями тетраэдра $ABCD$.

52. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ имеет длину a. Сфера, вписанная в трехгранный угол с вершиной A, касается плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC. Найти радиус этой сферы.

53. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $|AB| = 4a$, $|BC| = |BB_1| = a$. Сфера, вписанная в трехгранный угол BAB_1C (с вершиной B), касается диагонали AC_1. Определить радиус сферы (найти все решения).

54. В правильной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину 8 см, боковое ребро — длину 9 см. Сфера касается плоскости основания пирамиды в точке A и прямой SB. Найти радиус этой сферы (найти все решения).

55. Сфера радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды, центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Доказать, что пирамида правильная, и найти ее высоту, если центр сферы удален от вершины пирамиды на расстояние $r\sqrt{3}$.

56. Каждый плоский угол трехгранного угла с вершиной S имеет величину $60°$. На ребрах трехгранного угла взяты соответственно точки A, B и C так, что $|SA|=2a$, $|SB|=|SC|=a$. Найти радиус сферы, касающейся ребер угла и плоскости ABC (найти все решения).

57. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$, сторона AD которого в четыре раза длиннее высоты параллелепипеда. Сфера с центром в точке O касается ребер BC, A_1B_1 и DD_1 соответственно в точках B, A_1 и D_1. Найти величину угла A_1OB.

58. В тетраэдре скрещивающиеся ребра имеют равные длины. Доказать, что центры вписанной в тетраэдр и описанной около него сфер совпадают. Верно ли обратное утверждение?

59. Сфера касается всех ребер треугольной призмы. Определить отношение объемов сферы и призмы.

60*. В каждый из трехгранных углов тетраэдра вписана сфера. Все четыре сферы имеют одинаковый радиус и пересекаются в одной точке. Найти радиус этих сфер, если радиусы описанной около тетраэдра и вписанной в него сфер равны соответственно R и r.

61. В куб с ребром длины a вписана сфера. Для произвольно взятой точки сферы найти суммы квадратов расстояний от этой точки до: а) вершин, б) граней, в) ребер куба. Доказать, что эти суммы не зависят от выбора точки.

62. Через центр сферы проведены плоскость α и три попарно перпендикулярных радиуса. Найти сумму квадратов расстояний от концов этих радиусов до плоскости α, если радиус сферы равен R.

63*. На сфере радиуса r расположены три окружности радиуса $r/2$ так, что каждая из них имеет с каждой из двух других по одной общей точке. Найти радиус окружности, лежащей на этой сфере и имеющей с каждой из трех данных окружностей по одной общей точке.

64. Угол между смежными боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $3\pi/4$. Сфера с центром в вершине пирамиды касается основания пирамиды. Какая часть сферы находится внутри пирамиды?

65*. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ имеет длину a. Сфера касается ребер AB, AC и AD соответственно в точках B, C и D. Найти площадь части сферы, лежащей внутри тетраэдра.

66. Доказать, что если фигура Φ, не лежащая целиком на прямой l, симметрична относительно любой плоскости, проходящей через прямую l, то Φ — фигура вращения, и осью вращения является прямая l.

67. Найти объем фигуры, полученной вращением правильного шестиугольника вокруг оси, содержащей его сторону, если длина этой стороны равна a.

68. Периметр равнобедренного треугольника равен P. Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объем фигуры, полученной вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

69. Две сферы с центрами O_1 и O_2 пересечены плоскостью, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через его середину. Эта плоскость делит первую сферу на части, отношения площадей которых равно $m:1$, а вторую сферу — на части, отношение площадей которых равно $n:1$ $(m>1,\ n>1)$. Найти отношение радиусов этих сфер.

70. Объем шара равен V. В сферу, ограничивающую этот шар, вписан цилиндр. Каков наибольший возможный объем этого цилиндра?

71. Объем шара равен V. Найти наименьший объем конуса, вписанного в сферу, ограничивающую этот шар.

72. Площадь сферы равна S. Около этой сферы описан конус. Какова наименьшая площадь поверхности этого конуса?

73. На высоте конуса, как на диаметре, построена сфера. Площадь части сферы, лежащей внутри конуса, равна площади поверхности части конуса, лежащей внутри сферы. Определить угол в осевом сечении конуса.

74. Доказать, что для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать сферу (касающуюся его обоих оснований и каждой образующей), необходимо и достаточно, чтобы длина образующей была равна сумме радиусов оснований.

75. В усеченный конус с боковой поверхностью площади S_1 вписана сфера, площадь которой равна S_2. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

76. В конус вписана сфера. Плоскость, проходящая через вершину конуса, делит его боковую поверхность на части, отношение площадей которых равно 1 : 2. Сферу эта плоскость делит на части, отношение площадей которых равно 1 : 5. Найти угол раствора конуса.

77. Около сферы описан конус, угол раствора которого равен 60°. Найти отношение объемов частей конуса, лежащих вне сферы.

78. В пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, $|AC| = |BC|$, $|AB| = 2R$, угол между ребром SC и плоскостью ABC равен 45°. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол $CSAB$ (вершина C) и касающейся данной сферы (найти все решения).

79. На плоскости лежат три сферы, каждая из которых касается двух других. Расстояния между точками касания сфер с плоскостью равны соответственно a, b, c. Найти радиусы сфер.

80. Две сферы, радиуса r каждая, касаются друг друга. Прямая, образующая с линией центров угол α, касается сфер соответственно в точках A и B. Найти расстояния от точек A и B до линии центров сфер и длину отрезка AB.

81. Две сферы равных радиусов касаются друг друга. Прямая пересекает эти сферы последовательно в точках A, B, C и D (BC — отрезок, лежащий вне сфер) так, что $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = na$. Найти расстояние от этой прямой до линии центров сфер.

82. В прямой двугранный угол вписаны две сферы равных радиусов, касающиеся друг друга. Прямая пересекает грани угла в точках A и B составляет с каждой гранью угол величины 30° и касается каждой из сфер. В каком отношении точки касания делят отрезок AB?

83. Три сферы равных радиусов r касаются плоскости α и каждая из сфер касается двух других. Прямая a, параллельная плоскости α, касается каждой сферы. Найти расстояние между a и α.

84. Каждая из четырех данных сфер радиуса r касается остальных трех. Найти радиусы сфер, касающихся всех данных четырех сфер.

85. Сферы S_1 и S_2 радиуса $2r$ и сферы S_3 и S_4 радиуса r расположены так, что каждая из сфер касается трех других. Сферы S_1 и S_3 касаются в точке A, сферы S_2 и S_4 — в точке B. В каком отношении сферы S_3 и S_4 разделяют отрезок AB?

86. Два конуса имеют общую вершину, и образующая первого конуса является высотой второго. Угол раствора первого конуса равен $\arccos \frac{1}{3}$, угол раствора второго равен $2\pi/3$. Определить угол между образующими, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.

87. Угол раствора конуса равен $\pi/3$. Внутри конуса расположены три сферы радиуса r. Каждая сфера касается двух других сфер, основания конуса и его боковой поверхности. Найти радиус основания конуса.

88. Внутри цилиндра расположены четыре одинаковых шара так, что каждый из шаров касается трех других и боковой поверхности цилиндра. Два шара касаются нижнего основания, а два других — верхнего основания цилиндра. Найти объем цилиндра, если объем шара равен V.

89. Два конуса с равными углами раствора имеют общую вершину и касаются друг друга (т. е. их боковые поверхности имеют одну общую образующую). Каждая грань двугранного угла, имеющего величину 2α, касается боковой поверхности каждого из конусов. Найти угол раствора этих конусов.

90. Три конуса с равными углами раствора имеют общую вершину и каждый из конусов касается двух других. Все три конуса касаются одной плоскости. Определить угол раствора этих конусов.

Приложение

ОБРАЗЦЫ ВАРИАНТОВ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ В 1977—1979 г. НА ПИСЬМЕННЫХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

I. Московский государственный университет

а) Механико-математический факультет

1. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это целое число.

2. Найти все решения уравнения

$$\int_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)\,dx=\sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[2;\ 3]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant\dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение.

5. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно 2/3.

Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

б) Факультет вычислительной математики и кибернетики.

6. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

7. Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\frac{x-3}{2}.$$

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1/2; 2), касающейся графика функции $y=2-\dfrac{x^2}{2}$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

9. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

10. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен 1/6. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

в) Физический факультет.

11. Решить уравнение $\sin^2 x = 3/4$.

12. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y=0, \quad y=20-6x-2x^2.$$

13. Найти отрицательные члены последовательности

$$x_n=\frac{A_n^4+4}{P_{n+2}}-\frac{143}{4P_n} \quad (n=1, 2, 3 \ldots),$$

где A_n^4+4 — число размещений, а P_{n+2} и P_n — числа перестановок.

14. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2}/3$. Найти углы трапеции.

15. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна 1/3. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1/4. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

г) Географический факультет.

16. Решить неравенство

$$2|x+1|>x+4.$$

17. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти длину стороны AC.

18. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции $y=x/\ln x$.

19. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 мин. позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C,

то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

20. Решить уравнение

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$$

II. Московский автомобильно-дорожный институт

21. Найти экстремумы функции $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и указать интервалы возрастания и убывания.

22. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=3$.

23. Решить уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{16}{11}.$$

24. Решить неравенство

$$\log_2\frac{x-4}{2x+5}<1.$$

25. Решить уравнение

$$5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25}x-1}=\frac{26}{5}.$$

III. Московский инженерно-строительный институт

26. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 руб. 80 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

27. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\boldsymbol{c}$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$ и $|\boldsymbol{c}|=8$, вычислить скалярное произведение $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$.

28. Решить уравнение

$$7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$$

29. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x}=6\sin x+8\cos x.$$

30. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+6x-1,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3.$$

IV. Московский инженерно-физический институт

31. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток, равный 2.

32. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $|AB|=|AC|=a$, $\widehat{ABC}=\varphi$. Прямая (AS) составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α, плоскость боковой грани (BSC) составляет с той же

плоскостью угол величиной β и $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Найдите объем пирамиды $KSLC$, если известно, что точки K и S принадлежат ребрам $[AS]$ и $[BS]$ соответственно, а площадь треугольника KSL относится к площади треугольника ABS как 4 : 25.

33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{1/3}(x+y)+\log_3(x-y)=2, \\ 2^{y^2}=512^{x+1}. \end{cases}$$

34. Найдите критические точки функции

$$y=2\sin^2\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{3}-\frac{x}{3},$$

координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2-10<-19{,}5x$.

V. Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

35. Решить уравнение $7^{\lg x}=98-x^{\lg 7}$.

36. Решить уравнение $2+\cos 4x=2\sin^2 x$.

37. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|<1.$$

38. При каком значении z векторы $\boldsymbol{a}=(2;\ -3;\ 4)$ и $\boldsymbol{b}=(-3;\ 2\ z)$ перпендикулярны.

39. Вычислить интеграл

$$\int_3^{18}\sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx.$$

VI. Московский институт народного хозяйства

40. Решить неравенство

$$\frac{2x+3}{x^2+x-12}\leqslant\frac{1}{2}.$$

41. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=2\cdot 3^{3x}-3^{2x}\cdot 4+2\cdot 3^x$$

на отрезке $[-1;\ 1]$.

42. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=x^2-4,\quad y=4-x^2.$$

43. Радиус вписанной в конус сферы равен R. Найти объем конуса, если центр описанной вокруг конуса сферы совпадает с центром вписанной сферы.

44. На мебельной фабрике изготавливаются столы и стулья. На изготовление одного стола расходуется 5 м досок и 1 м фанеры. На изготовление одного стула расходуется 1 м досок и 2 м фанеры. Сколько было произведено столов и стульев, если известно, что досок и фанеры было израсходовано по 900 м?

VII. Московский институт стали и сплавов

45. Решить уравнение $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$.

46. Решить неравенство

$$\sqrt{x}-3\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

47. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x+3.$$

48. Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

49. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки A (0; 0; 0), B (1; 1; 1), C (3; 2; 1), и плоскостью, проходящей через точки A (0; 0; 0), B (1; 1; 1), D (3; 1; 2).

VIII. Московский институт электронного машиностроения

50. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}+\cos x\right)+\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}-\cos x\right)=-3.$$

51. Найти образ точки A (2; 7) при повороте координатной плоскости вокруг точки M (2; 3) на угол $-\pi/2$. Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти образ точки C (—4; 8) при этом повороте.

52. Проверить, какое из чисел больше: C_{11}^6 или $C_{11}^3+C_{11}^4$, и найти все значения n, для которых $C_n^6<C_n^3+C_n^4$.

53. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=e^{2x-1}+2e^{1-2x}+7x-3$$

на отрезке $[0{,}14;\ 1]$.

54. Назовем число a хорошим, если для всякого x выполняется неравенство

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\leqslant a.$$

а) Доказать, что число 4 является хорошим числом.

б) Найти все хорошие числа.

IX. Московский институт электронной техники

55. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\cos x.$$

56. Решить уравнение

$$32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

57. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=4-x^2,\quad y=x^2-2x.$$

58. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны a. Найти большее основание b, чтобы площадь трапеции была максимальной.

59. Даны три ненулевых вектора a, b, c, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $a+b$ коллинеарен вектору c, а вектор $b+c$ коллинеарен вектору a.

X. Московский областной педагогический институт

60. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=5/x, \quad y=6-x.$$

61. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ построены квадраты (вне ее). Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

62. Решите неравенство

$$\log_{x^2}(3-2x)>1.$$

63. Решите уравнение

$$2\cos x=\sqrt{2+\sin 2x}.$$

64. Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды плоскостью.

XI. Московский физико-технический институт

65. Решить неравенство $0{,}1^{x+1}<0{,}8+2\cdot 10^x$.

66. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 xy+3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y}=0, \\ \log_4 \dfrac{x}{y}-\log_4 x\cdot\log_4 y=0. \end{cases}$$

67. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найти углы трапеции.

68. Решить уравнение

$$3\sin 3x=\cos 4x-\sin 9x-\cos 10x.$$

69. Из пункта A в пункт B отправились одновременно два поезда. Каждый из них вначале двигался равноускоренно (ускорения поездов различны, начальные скорости равны нулю), а затем, набрав некоторую скорость, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 2. Пройдя четверть пути от A до B, поезда поравнялись, причем в этот момент скорость одного была в 1,5 раза больше скорости другого. Найти отношение промежутков времени, за которые поезда прошли путь от A до B.

70. Найти наибольшую возможную величину угла между плоскостью боковой грани и не принадлежащим ей боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды.

XII. Московский энергетический институт

71. Упростив выражение

$$\left(\frac{(x^2-4)^{-1}+(x+2)^{-2}-(x-2)^{-2}}{1-8x}\right)^{-1}-(4\sqrt[3]{4})^{\log_4 x^3}-16,$$

найти его предел при $x \to 1/8$.

72. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(3y^2+1)\log_3 x=1,\\ x^{2y^2+10}=27.\end{cases}$$

73. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=3x^3-x-76$ на отрезке $[0; 3]$; первый член прогрессии равен квадрату ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии.

74. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{x}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}$$

и лежащие на отрезке $[-\pi/2; 2\pi]$.

75. Через вершину C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра $[BC]$ и $[CD]$ и образующая с гранью $ABCD$ угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Найти площадь сечения, если длина ребра куба равна a (рассмотреть возможные случаи).

XIII. Ленинградский государственный университет

(математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления)

76. Для каких a и b ($a, b \in \mathbb{R}$) графики функций $f(x)=2x^4-a^2x^2+b-1$ и $g(x)=2ax^3-1$ имеют лишь две общие точки?

77. Сколько шестизначных чисел содержат точно четыре различные цифры?

78. Решить уравнение ($a \in \mathbb{R}$)

$$1+2(\sin^2 2x-2a\cos 2x+a)\operatorname{tg}^2 x-\cos 4x=0.$$

79. Угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, длина стороны основания — a. Найти радиус сферы, касающейся боковых граней пирамиды и описанной около пирамиды сферы.

80. Найти вектор $\boldsymbol{a}=(x; y; z)$, образующий равные углы с векторами $\boldsymbol{b}=(y; -2z; 3x)$, $\boldsymbol{c}=(2z; 3x; -y)$, если $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{d}=(1; -1; 2)$, $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью Oy — тупой.

XIV. Ленинградский институт точной механики и оптики

81. Упростить выражение

$$\left(\left(1-\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}\right):\left(\sqrt{ab}\,(1-\sqrt[3]{ab})-\frac{(1-ab)(\sqrt[3]{ab}-1)}{1+\sqrt{ab}}\right)\right)^3-ab.$$

82. Решить уравнение

$$\cos\frac{\pi-2x}{2}+\sin\frac{5\pi+2x}{2}=\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}.$$

83. Решить неравенство $2\sqrt{x^2} \geqslant (x-1)^2+2$.

84. Доказать равенство

$$C_{n+1}^{m+1}+2C_{n+2}^{m+2}+C_{n+2}^{m+3}=C_{n+4}^{m+3}.$$

85. Число 12 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых была наименьшей.

XV. Ленинградский электротехнический институт

86. Отец хочет разделить 180 яблок между пятью своими детьми. Половину яблок он отдает своим сыновьям, которые делят их между собой поровну, а другую половину отдает дочерям, которые тоже делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 15 яблок больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и дочерей?

87. Решить уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$.

88. Решить уравнение

$$3^{x/5}+3^{(x-10)/10}=84.$$

89. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x^2-9x^3+2$ в промежутке $[-1; 1]$.

90. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны 1, 2, 3, ..., p, а разности 1, 3, 5, ..., $2p-1$. Найти сумму членов всех прогрессий.

XVI. Новосибирский государственный университет

(механико-математический, физический, экономический факультеты)

91. По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек A и B выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через t секунд в a метрах от B, вторая встреча — в $2a$ метрах от A $(a>0)$. Найти скорости спортсменов, если под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке.

92. Решить уравнение

$$\cos 6x+\operatorname{tg}^2 x+\cos 6x\cdot\operatorname{tg}^2 x=1.$$

93. Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом в точке A, отрезок AB — диаметр O_1. Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку B, равны 2 см, 3 см, 4 см, считая от точки B. Найти радиусы окружностей.

94. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_{2x}(ax+1)=1/2$ имеет единственное решение.

95. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания угол в 60°, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

XVII. Казанский государственный университет

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

96. Решить уравнение

$$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\operatorname{tg} x.$$

97. Решить неравенство $3^x-3\,|+9^x-3>0$

98. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной b, так что его нижнее основание лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При каком b объем вписанного параллелепипеда будет наибольшим? Найти объем при этом значении b.

99. На дороге на расстоянии 10 м друг от друга лежит некоторое количество столбов. Начав с одного крайнего столба, рабочий перенес все столбы по одному к другому крайнему столбу, причем для этого ему в общей сложности пришлось пройти 1,44 км. Сколько столбов лежало на дороге?

XVIII. Киевский государственный университет

(механико-математический факультет)

100. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом φ, вписан цилиндр (одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность второго его основания имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды). Радиус основания цилиндра и его высота равны r. Вычислить объем пирамиды. При каком значении угла φ объем пирамиды наименьший?

101. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\frac{4-x^2\,|}{4}\quad\text{и}\quad y=7-|\,x\,|.$$

102. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{1/2} x^2-3}>\sqrt{5}\,(\log_4 x^2-3).$$

103. Сколько есть четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

XIX. Куйбышевский государственный университет

(физический факультет)

104. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что расстояние между плоскостями, одна из которых проходит через вершины A, B_1, D_1, а другая — через вершины B, C_1, D, равно 1/3 диагонали куба.

105. Найти модуль разности экстремумов функции

$$y=x^3+3x^2-3x+1.$$

106. При каких значениях α неравенство

$$\frac{(2+\alpha)x^2+(3+\alpha)x+1-\alpha}{x^2+x+2}\leqslant 2$$

выполняется для всех действительных x?

107. Найти область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6+35x-6x^2}}.$$

XX. Ярославский государственный университет

(математический факультет)

108. Найти высоту треугольной пирамиды наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

109. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

110. Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}(x+1)<1.$$

111. Решить уравнение

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\cos x-\frac{8\pi}{3}\right)=1.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗДЕЛА I

ГЛАВА I

1. Имеем

$$A=\{1;\ 3;\ 5;\ 15\},\quad B=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\},\quad C=\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}.$$

Исходя из определений объединения и пересечения множеств, получаем $A\cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 15\}$, $B\cap C=\{2\}$, $A\cup C=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 15\}$, поэтому $(A\cup C)\cap B=\{2;\ 3;\ 5\}$. Множества A и C не имеют общих элементов, следовательно, $A\cap C=\emptyset$ и $A\cap B\cap C=\emptyset$.

2. Легко находим, что $A\cup C=]-1;\ 2[$, $A\cap B=[-1;\ 0[$, $A\cup B\cup C=]-\infty;\ 2[$, $(A\cup B)\cap C=[0;\ 1]$, $B\cap C=\emptyset$.

3. Если равенство

$$A\cap X=A\cup Y \tag{1}$$

имеет место для любого подмножества A множества E, то оно справедливо и в том случае, когда A совпадает с множеством E и когда A является пустым множеством, так как для всякого множества E по определению $E\subset E$ и $\emptyset\subset E$. При $A=E$ из (1) следует $E\cap X=E\cup Y$. Так как X и Y — подмножества множества E, то $E\cap X=X$ и $E\cup Y=E$, таким образом, получаем $X=E$.

Если $A=\emptyset$, то из (1) получаем $\emptyset\cap X=\emptyset\cup Y$. Заметим, что $\emptyset\cap X=\emptyset$ и $\emptyset\cup Y=Y$, следовательно, $Y=\emptyset$. Итак, $X=E$ и $Y=\emptyset$.

4. Легко видеть, что если точка $(x;\ y)$ принадлежит данному множеству, то ему принадлежат также точки $(-x;\ -y)$, $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$, т. е. это множество симметрично относительно обеих координатных осей и начала координат. Поэтому рассмотрим точки, принадлежащие первому квадранту: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Координаты точек множества удовлетворяют уравнению $x+y=1$, а так как $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то это есть отрезок с концами в точках (0; 1) и (1; 0).

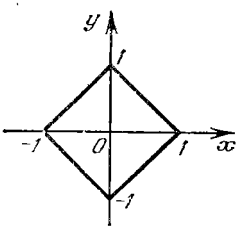


Рис. 328.

Все множество (рис. 328) получаем из этого отрезка симметрией сначала относительно оси Ox, затем симметрией полученного множества относительно оси Oy.

5. Перепишем условие $|x+y|\leqslant 1$ в виде $-1\leqslant x+y\leqslant 1$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x+y\leqslant 1$, есть полуплоскость, граница которой — прямая $x+y=1$, причем та полуплоскость, которая содержит точку (0; 0). Множество точек, определяемое неравенством $x+y\geqslant -1$, также есть полуплоскость, содержащая точку (0; 0), граница этой полуплоскости — прямая $x+y=-1$.

Множество точек, для координат которых выполняются оба неравенства, есть пересечение этих полуплоскостей, т. е. есть полоса, границами которой являются параллельные прямые $x+y=1$ и $x+y=-1$.

Аналогично устанавливается, что условие $|x-y| \leqslant 1$ определяет полосу, границами которой являются параллельные прямые $x-y=1$ и $x-y=-1$. Если координаты точки M удовлетворяют одновременно условиям $|x+y| \leqslant 1$ и $|x-y| \leqslant 1$, то точка M принадлежит пересечению множеств, определяемых каждым из этих условий, т. е. искомое множество есть пересечение указанных полос (рис. 329) — это квадрат с вершинами в точках (0; 1), (1; 0), (−1; 0), (0; −1).

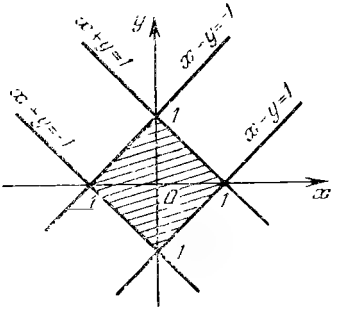


Рис. 329.

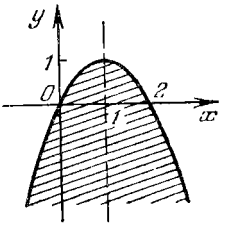


Рис. 330.

6. Так как $y=-x^2+2x$ есть парабола, пересекающая ось абсцисс в точках $x=0$ и $x=2$, имеющая прямую $x=1$ осью симметрии, вершина которой имеет координаты (1; 1), то множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $y \leqslant -x^2+2x$, ограничено этой параболой, точки множества лежат на параболе и ниже ее (рис. 330).

7. Множество туристов данной группы, знающих английский язык, обозначим A, знающих французский язык — B, тогда туристы, знающие и тот и другой язык, образуют множество $A \cap B$. По условию $m(A)=70$, $m(B)=45$, $m(A \cap B)=23$. По формуле (1) § 1 находим $m(A \cup B)=92$. Множество $A \cup B$ есть множество туристов, знающих хотя бы один из этих двух языков, следовательно, не знают ни французского ни английского 8 туристов из группы.

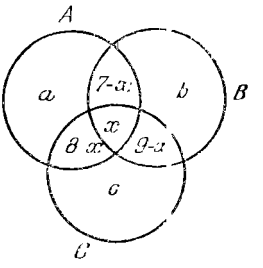


Рис. 331.

8. Эта задача решается легче, если прибегнуть к наглядному изображению множеств (рис. 331). Введем обозначения: A — множество учащихся, решивших задачу по алгебре, B — по геометрии, C — по тригонометрии.

Если x — число учащихся, решивших все три задачи, то $(7-x)$ есть число учащихся, решивших задачи по алгебре и геометрии, но не по тригонометрии, $(8-x)$ — по алгебре и тригонометрии, но не по геометрии, $(9-x)$ — по геометрии и тригонометрии, но не по алгебре.

Если a, b, c — количество учащихся, решивших только одну задачу соответственно по алгебре, геометрии и тригонометрии, то имеем

$$m(A)=20=15+a-x,$$
$$m(B)=18=16+b-x,$$
$$m(C)=18=17+c-x,$$

откуда находим: $a=5+x$, $b=2+x$, $c=1+x$.

Всего в олимпиаде принимало участие 40 человек, три не решили ни одной задачи, следовательно, хотя бы одну задачу решили 37 учащихся. Те, кто решил хотя бы одну задачу, образуют множество $A\cup B\cup C$, таким образом, $m(A\cup B\cup C)=37$. А так как $m(A\cup B\cup C)=a+b+c+24-2x$, то, подставляя выражения для a, b и c, отсюда находим $x=5$.

Итак, все три задачи решило пятеро. Число учащихся, решивших ровно по две задачи, равно $24-3x$, т. е. равно 9.

9. Пусть C — множество корней уравнения $f(x)\,g(x)=0$. Если $a\in C$, то $f(a)\,g(a)=0$ и либо $a\in A$, либо $a\in B$, т. е. $a\in A\cup B$. Верно и обратное: из $a\in A\cup B$ следует $a\in C$. Действительно, если $a\in A\cup B$, то либо $a\in A$, либо $a\in B$. Если, например, $a\in A$, то $f(a)=0$. Функция $g(x)$ — многочлен, область ее определения — вся числовая прямая, следовательно, функция g определена в точке a и $f(a)\,g(a)=0$. Аналогично рассматривается случай $a\in B$. Из сказанного следует, что $C=A\cup B$.

Если одна из функций, например $g(x)$, не многочлен, а рациональная функция, то утверждение $C=A\cup B$, вообще говоря, уже неверно. Например, если $g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$, $f(x)=x-1$, то $x=1\in A$ $(f(1)=0)$, однако при $x=1$ функция $g(x)$ не определена. Следовательно, при $x=1$ не определена функция $f(x)\,g(x)$ и 1 не может принадлежать множеству ее нулей.

Рассмотрим теперь уравнение $f^2(x)+g^2(x)=0$, множество его корней обозначим D. Если $a\in D$, то $f(a)=0$, $g(a)=0$, т. е. $a\in A\cap B$. Обратно, если $a\in A\cap B$, то $a\in A$ и $f(a)=0$, $a\in B$ и $g(x)=0$, следовательно, $a\in D$. Таким образом, $D=A\cap B$.

10. Функция $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}$ определена, если $3+x\geqslant 0$ и $3-x\geqslant 0$, т. е. определена на пересечении множеств, заданных неравенствами $x\geqslant -3$ и $x\leqslant 3$. Таким образом, $D(f)=[-3;\ 3]$.

11. Функция определена при всех значениях x, кроме $x=\pm 1$. Ее область определения

$$]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +1[\cup]1;\ +\infty[.$$

12. Функция определена при всех значениях аргумента, для которых $2^x-3^x\geqslant 0$. Перепишем это неравенство в виде $(3/2)^x\leqslant 1$, откуда, логарифмируя по основанию 3/2 (заметим, что $3/2>1$), получим $x\leqslant 0$. Область определения функции такова: $]-\infty;\ 0]$.

13. Логарифм определен для любого положительного числа при любом положительном не равном единице основании. Таким образом, функция определена для всех значений x, для которых $x^2-1>0$ и $3+x>0$, $3+x\neq 1$. Решая совместно неравенства, находим, что

$$x\in\ ]-3;\ -1[\cup]1;\ +\infty[.$$

Учитывая, что $x\neq -2$, получаем следующую область определения функции:

$$]-3;\ -2[\cup]-2;\ -1[\cup]1;\ +\infty[.$$

14. Функция определена, если выполнены условия $x+5\geqslant 0$, $9-x>0$, $9-x\neq 1$, т. е. $x\geqslant -5$, $x<9$, $x\neq 8$. Следовательно, $D(f)=[-5;\ 8[\cup]8;\ 9[$.

15. Функция $\arccos t$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$, обращается в нуль при $t=1$, таким образом, функция $f(x)$ определена при выполнении условий: $-1\leqslant 2x-1<1$ и $2x>0$, $2x\neq 1$. Из первого неравенства следует $0\leqslant x<1$, откуда, учитывая, что $x\neq 1/2$ и $x\neq 0$, получаем следующую область определения функции:

$$]0;\ 1/2[\cup]1/2;\ 1[.$$

16. Функция определена для тех значений аргумента, для которых положительно выражение, стоящее под знаком логарифма, т. е. $(1{,}25)^{1-x^2}-(0{,}4096)^{1+x}>0$. Заметим, что $1{,}25=5/4$, $0{,}4096=(5/4)^{-4}$, поэтому неравенство можно переписать в виде $(5/4)^{-(x^2-1)}>(5/4)^{-(4+4x)}$, откуда следует, что x удовлетворяет неравенству $x^2-1<4+4x$ или $x^2-4x-5<0$. Корни уравнения $x^2-4x-5=0$ есть -1 и 5, поэтому $x^2-4x-5<0$ при $-1<x<5$. Область определения функции такова: $]-1;\ 5[$.

17. Квадратичную функцию $\varphi(x)=x^2+2x+2$ представим в виде $\varphi(x)=(x+1)^2+1$. Очевидно, что при $x=-1$ она принимает наименьшее значение равное 1. Множество значений функции $\varphi(x)$ есть промежуток $[1;\ +\infty[$. Отсюда следует, что для функции $\sqrt{\varphi(x)}$ множеством значений является также промежуток $[1;\ +\infty[$.

18. Заметим, что функция нечетная. Рассмотрим $x\geqslant 0$. Из неравенства $2ab\leqslant a^2+b^2$ следует, что $2x\leqslant 1+x^2$ при всех x, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=1$ $(a=b)$. Таким образом, при $x\geqslant 0$

$$0\leqslant\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1.$$

Функция нечетная, следовательно множество ее значений есть отрезок $[-1;\ +1]$.

19. На промежутке $]-\infty;\ 0[$ функция $y=x^2+1$ монотонно убывает. Действительно, если $x_1<x_2\leqslant 0$, то

$$y(x_1)-y(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$$

(так как обе скобки отрицательны). Следовательно, существует обратная функция. Разрешаем уравнение $y=x^2+1$ относительно x, учитывая что x отрицательно, получаем $x=-\sqrt{y-1}$. Таким образом, $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$.

20. Так как $y(x_1)-y(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}$, то $y(x_1)=y(x_2)$ лишь при $x_1=x_2$. Функция устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством значений и потому имеет обратную. Разрешая уравнение $y=1+\dfrac{1}{x}$ относительно x, получаем $x=\dfrac{1}{y-1}$, следовательно, $f^{-1}(x)=1/(x-1)$.

21. Так как $y=\dfrac{x(x+3)}{x(x-5)}$, то $y=\dfrac{x+3}{x-5}$ при $x\neq 0$ и не определена при $x=0$. Далее

$$y(x_1)-y(x_2)=\frac{8(x_2-x_1)}{(x_1-5)(x_2-5)},$$

поэтому $y(x_1)=y(x_2)$ лишь при условии $x_1=x_2$. Таким образом, эта функция устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством значений и потому имеем обратную.

Разрешая уравнение $y=(x+3)/(x-5)$ относительно x, получаем $x=(3+5y)/(y-1)$. Вспоминая, что $x\neq 0$, исключаем значение $y=-3/5$. Итак,

$$f^{-1}(x)=\frac{3+5x}{x-1}, \quad x\neq -\frac{3}{5}.$$

22. Для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы различным значениям аргумента соответствовали разные значения функции. Пусть $x_1\neq x_2$. Так как $y(x_1)-y(x_2)=a(x_1-x_2)$, то обратная функция будет существовать, лишь если $a\neq 0$. При $a\neq 0$ уравнение $y=ax+b$ разрешается относительно x: $x=(y-b)/a$. Таким образом, обратная функция существует, если $a\neq 0$, и имеет вид

$$y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}.$$

Функция $y=ax+b$ будет совпадать с функцией $y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$, если при любом x будет справедливо равенство

$$ax+b=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}.$$

Полагая $x=0$, получим $b=-b/a$, а полагая $x=1$ при условии $b=-b/a$ будем иметь $a=1/a$. Решая систему

$$\begin{cases} b=-b/a, \\ a=1/a, \end{cases}$$

находим $a=1$, $b=0$ или $a=-1$, b — любое. В первом случае функция $y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$ принимает вид $y=x$, во втором $y=-x+b$. Полученное нами необходимое условие является и достаточным. Действительно, функции $y=x$ и $y=-x+b$, очевидно, совпадают со своими обратными функциями. Заметим, что прямая $y=x$ совпадает с биссектрисой I и III координатных углов, а любая прямая $y=-x+b$ перпендикулярна этой биссектрисе и при симметрии относительно нее отображается на себя.

ГЛАВА II

1. а) Цепь разорвана, так как или элемент k вышел из строя, или вышли из строя одновременно все три элемента l_i, или произошло и то и другое б) Ток проходит по цепи, так как работают элемент k и по крайней мере один из элементов l_i.

2. Составим таблицу истинности для высказываний вида $\bar{A}+B$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}+B$
И	И	Л	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	Л	И	И

Таблица истинности для $\bar{A}+B$ совпадает с таблицей истинности для импликации $A \Longrightarrow B$. Формула доказана.

3. Обозначим буквами A_1, A_2, A_3 высказывания, состоящие соответственно в том, что первый, второй, третий учащиеся изучали логику. Из условия задачи следует истинность

$$P=(A_1 \Longrightarrow A_2)\,\overline{(A_3 \Longrightarrow A_2)}.$$

Освободимся от импликации, используя формулу

$$A \Longrightarrow B=\bar{A}+B,$$

доказанную в предыдущей задаче. Тогда получим

$$P=(\bar{A}_1+A_2)\,\overline{(A_3+A_2)}.$$

Для дальнейшего упрощения воспользуемся формулами 7 и 9 из § 1 с. 36:

$$\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B} \text{ и } \bar{\bar{A}}=A.$$

Получаем

$$P=(\bar{A}_1+A_2)\,A_3\bar{A}_2,$$

откуда

$$P=\bar{A}_1A_3\bar{A}_2+A_3A_2\bar{A}_2=\bar{A}_1A_3\bar{A}_2+L=\bar{A}_1A_3\bar{A}_2,$$

т. е. логику изучал третий учащийся, а первый и второй не изучали.

4. Инспекторы комиссара Мегрэ установили истинность высказываний:

$$A \Longrightarrow (B+C), \quad B+\bar{A}D, \quad D \Longrightarrow (B+C).$$

Произведение

$$P=(A \Longrightarrow (B+C))\,(B+\bar{A}D)\,(D \Longrightarrow (B+C))$$

этих трех высказываний истинно. Освободимся от импликации, используя формулу, доказанную в задаче 2.

Получим

$$P=(\bar{A}+B+C)\,(B+\bar{A}D)\,(\bar{D}+B+C).$$

Упростим произведение первой и третьей скобок согласно закону 6 § 1, с. 36. Тогда будем иметь

$$P=(\bar{A}D+B+C)\,(B+AD).$$

Еще раз применяя этот закон, получим

$$P=B+(\bar{A}\bar{D}+C)\,\bar{A}D$$

или

$$P=B+C\bar{A}D.$$

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен — убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа лгал, Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи. Но комиссару Мегрэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т. е. что $\bar{A}C=L$, и следовательно, $P=B+C\bar{A}D=B+L=B$, т. е. B истинно. Итак, убийство совершил Этьен.

5. Равенство не доказано. В процессе «доказательства» дважды использовалось соотношение

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2,$$

справедливость которого как раз и требовалось установить.

Для доказательства равенства можно поступить так. Обозначим левую часть через a, т. е. положим

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=a.$$

Возведя в куб обе части, получим

$$14-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2=a^3$$

или

$$3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)=14-a^3.$$

Но, так как

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=a,$$

то

$$3\sqrt[3]{50-49}a=14-a^3,$$

т. е. левая часть равенства равна одному из корней уравнения

$$a^3+3a-14=0.$$

Так как $a=2$ единственный действительный корень этого уравнения, то равенство доказано.

6. Проведенные рассуждения и выкладки доказывают лишь следующее: если прямоугольный треугольник, о котором говорится в условии задачи, существует, то его гипотенуза равна $a\sqrt{5/3}$. Но само существование такого треугольника ниоткуда не следует. Легко убедиться в том, что на самом деле такого треугольника не существует. В противном случае величина плоского угла ACB трехгранного угла $CAQB$ была бы больше суммы величин двух остальных плоских углов ACO и OCB.

7. Утверждение а) истинно при всех $k\neq 0$.

Если $k=0$, то, например, при $l=1$ неравенство не имеет решений.

Если $k>0$, то каково бы ни было l неравенство будет иметь решения $x\in\,]-\infty;\ -l^2/k]$.

Если $k<0$, то при любом l неравенство будет иметь решения $x\in$ $\in[-l^2/k;\ +\infty[$.

Утверждение б) истинно при всех значениях k. Действительно, при любом k существует l, а именно $l=0$, при котором неравенство имеет решение $x=0$.

8. Если число n оканчивается цифрой 4, то число $n+48$ оканчивается цифрой 2 и, следовательно, не может быть квадратом натурального числа, так как квадрат натурального числа обязан оканчиваться одной из следующих цифр: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Таким образом, $A(n)B(n)$ при всех n — ложное высказывание.

Высказывание $C(n)B(n)$ также ложно при всех n, так как если n оканчивается цифрой 4, то $n-41$ оканчивается цифрой 3 и поэтому не может быть квадратом натурального числа.

Посмотрим, есть ли такие значения n, при которых истинно высказывание $A(n)C(n)$. Если $A(n)$ и $C(n)$ истинны одновременно, то

$$\begin{cases} n+48=p^2, \\ n-41=q^2, \end{cases} \quad \text{где} \quad p\in\mathbb{N}, \quad q\in\mathbb{N}.$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим

$$89 = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q).$$

Но 89 — число простое, и поэтому должно быть

$$\begin{cases} p-q=1, \\ p+q=89, \end{cases}$$

откуда $p=45$ и $n=45^2-48=1977$.

Следовательно, только значение $n=1977$ может быть решением задачи. Проверка показывает, что $n=1977$ в самом деле есть решение.

9. Обратная теорема: если дискриминант квадратного уравнения неположителен, то уравнение не имеет двух различных действительных корней.

Противоположная теорема: если квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, то дискриминант этого уравнения положителен

Противоположная обратной: если дискриминант уравнения положителен, то уравнение имеет два различных действительных корня.

Все четыре теоремы верны.

10. а) Утверждение верно. Докажем это. Пусть n ($n \geqslant 5$) — простое число, тогда $n-1$ и $n+1$ — два последовательных четных числа, и, следовательно, их произведение n^2-1 делится на 8. Помимо этого, из трех последовательных чисел $n-1$, n, $n+1$ одно должно делиться на 3, но n не делится на 3, а поэтому n^2-1 обязано делиться.

б) Утверждение неверно. Для доказательства достаточно взять $n=25$.

11. Легко проверить, что высказывания $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(8)$ — ложны, а $A(9)$ — истинно.

Пусть $A(n)$ истинно для некоторого значения $n=k$. Используя это предположение, имеем

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(4k^2+1).$$

Далее, легко доказать, что

$$2(4k^2+1) > 4(k+1)^2+1.$$

Следовательно,

$$2^{k+1} > 4(k+1)^2+1,$$

т. е. $A(k+1)$ истинно. Проведенное рассуждение верно для всех значений $k \geqslant 9$.

В силу принципа математической индукции высказывание $A(n)$ истинно при любом $n \geqslant 9$.

12. В случае одной прямой утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно при $n=k$. Пусть теперь на плоскости произвольным образом проведено $k+1$ прямых. Докажем, что черной и белой краской можно закрасить плоскость так, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета. Для этого выберем из проведенных прямых одну прямую и назовем ее для удобства дополнительной. Остальные k прямых назовем основными. Закрасим плоскость нужным нам образом, учитывая только основные прямые. По индуктивному предположению это сделать можно. Дополнительная прямая разбивает теперь уже раскрашенную плоскость на две полуплоскости. В одной из них изменим цвет каждой части на противоположный. Покажем, что после этого вся плоскость с учетом всех $k+1$ прямых закрашена так, как нам надо. Возьмем любые два соседних участка. Они разделя-

ются или какой-либо из основных прямых, или дополнительной. В первом случае эти участки были первоначально окрашены в разные цвета, а затем либо оба поменяли свой цвет на противоположный, либо не меняли вообще свой цвет. Таким образом, в этом первом случае они окрашены в разные цвета. Во втором случае эти участки первоначально были окрашены одинаково, а затем цвет одного из них был изменен на противоположный, т. е. в этом случае они окрашены в разные цвета. Таким образом, из возможности окрасить плоскость нужным нам способом в случае k прямых вытекает, что и в случае $k+1$ прямых такая раскраска возможна.

ГЛАВА III

1. Умножив обе части данного уравнения на $(x+2)(x+1)$, получим уравнение

$$3(x+1)-(2x-1)(2+x)=2x+1,$$

которое, очевидно, равносильно квадратному уравнению

$$x^2+x-2=0. \qquad (1)$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь корни уравнения (1): $x=-2$ и $x=1$. Число -2 не является корнем данного уравнения, так как при $x=-2$ не определены обе части данного уравнения. Проверкой убеждаемся, что число 1 является решением данного уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

2. Приведем схему решения данного уравнения:

$$\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}\Rightarrow\left(9-5x=\left(\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}\right)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(9-5x=3-x+12+\frac{36}{3-x}\right)\Leftrightarrow\left(6+4x=\frac{36}{x-3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow((3+2x)(x-3)-18=0)\Leftrightarrow(2x^2-3x-27=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=-3 \text{ или } x=9/2).$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь $x=-3$ и $x=9/2$. При $x=9/2$ не определены обе части данного уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x=-3$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $\{-3\}$.

3. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$16(x+2)=(x+1)^2+8|x+1|+16.$$

После преобразований имеем

$$x^2-14x-15+8|x+1|=0. \qquad (1)$$

Если $x\geqslant -1$, то $|x+1|=x+1$ и уравнение (1) равносильно квадратному уравнению $x^2-6x-7=0$, корнями которого являются числа 7 и -1. Заметим, что оба эти числа удовлетворяют условию $x\geqslant -1$.

Если же $x\leqslant -1$, то $|x+1|=-x-1$ и уравнение (1) равносильно уравнению $x^2-22x-23=0$, корнями которого являются числа 23 и -1. Условию $x\leqslant -1$ удовлетворяет только число -1.

Следовательно, корнями данного уравнения могут быть только числа -1 и 7. Проверкой убеждаемся, что оба эти числа являются корнями данного уравнения.

Ответ: $\{-1; 7\}$.

4. Введем новую переменную

$$u=\frac{x-3}{x^2+4x+9}. \tag{1}$$

Тогда относительно u получим уравнение

$$u+\frac{1}{u}=-2,$$

которое после умножения обеих частей на u сводится к квадратному уравнению

$$u^2+2u+1=0,$$

единственным корнем которого является $u=-1$. Подставив найденное значение u в (1), получим уравнение

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}=-1.$$

Оно легко преобразуется в квадратное уравнение

$$x^2+5x+6=0,$$

корнями которого являются числа -3 и -2. Легко проверить, что оба числа удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\{-2;\ -3\}$.

5. Введем новую переменную

$$v=\sqrt{2x^2+3x+9}.$$

Тогда

$$v^2-5v-6=0,$$

$$v=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}.$$

Следовательно, $v=6$ и $2x^2+3x+9=36$. Корнями этого уравнения являются числа 3 и $-9/2$. Проверкой убеждаемся, что эти числа являются корнями данного уравнения.

Ответ: $\{3;\ -9/2\}$.

6. Из второго уравнения вычтем первое, умноженное на 3, затем из третьего вычтем первое, умноженное на 2. В результате получим систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ -5y-8z=-18, \\ -3y-4z=-10. \end{cases}$$

Теперь к третьему уравнению прибавим почленно второе, умноженное на $-3/5$. Окончательно получим систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ y+\frac{8}{5}z=\frac{18}{5}, \\ z=1, \end{cases}$$

которая имеет треугольную форму и, очевидно, равносильна данной. Из нее последовательно находим $z=1$, $y=2$, $x=1$.

Ответ: $\{(1;\ 2;\ 1)\}$.

7. Из первого, второго и третьего уравнений вычтем почленно четвертое, умноженное соответственно на 1, 2 и 3. В результате получим систему

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ y-4z=-2, \\ y-8z=-6, \\ -8z=-9. \end{cases}$$

Вычитая почленно из третьего уравнения этой системы второе, получаем уравнение $-4z=-4$, которое, очевидно, противоречит последнему уравнению системы. Следовательно, система не имеет решений.

Ответ: Система несовместна.

8. Прибавив почленно первое уравнение, умноженное на -2, ко второму и, умноженное на -4, к третьему, получим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ -5x_2-x_3-3x_4=0, \\ -5x_2-x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения этой системы совпадают, поэтому данная система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ -5x_2-x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что

$$x_2=-\frac{1}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4.$$

Подставив это выражение для x_2 в первое уравнение, получим

$$x_1=1-x_2-x_3-x_4=1-\left(-\frac{1}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4\right)-x_3-x_4=1-\frac{4}{5}x_3-\frac{2}{5}x_4.$$

Следовательно, общее решение данной системы имеет вид

$$\left(1-\frac{4}{5}x_3-\frac{2}{5}x_4;\ -\frac{1}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4;\ x_3;\ x_4\right),$$

где x_3 и x_4 — произвольные. Таким образом, данная система имеет бесконечно много решений.

Ответ: $\left\{\left(1-\frac{4}{5}x_3-\frac{2}{5}x_4;\ -\frac{1}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4;\ x_3;\ x_4\right),\ x_3\in\mathbb{R},\ x_4\in\mathbb{R}\right\}$.

9. При решении этой системы применим метод подстановки. Из второго уравнения системы находим $x=7-2y$ и подставляем в первое уравнение:

$$(7-2y)^2+2y^2-2y(7-2y)=5.$$

После преобразований этого уравнения получаем квадратное уравнение

$$5y^2-21y+22=0.$$

Оно имеет корни $y_1=2$ и $y_2=11/5$. Подставляя эти значения для y в уравнение $x=7-2y$, находим $x_1=3$ и $x_2=13/5$.

Ответ: $\{(3;\ 2),\ (13/5;\ 11/5)\}$.

10. Прибавив почленно первое уравнение, умноженное на 7, ко второму уравнению, умноженному на -3, получим уравнение

$$14x^2+21y^2-28xy=6x^2-3y^2,$$

которое легко приводится к уравнению

$$2x^2-7xy+6y^2=0,$$

Решив его как квадратное уравнение относительно x, получим

$$x=2y \quad \text{и} \quad x=3y/2.$$

Данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x=2y, \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x=3y, \\ 2x^2-y^2=7. \end{cases}$$

Подставляя $x=2y$ во второе уравнение, получаем

$$8y^2-y^2=7, \quad y^2=1, \quad y=\pm 1.$$

Следовательно, первая система имеет решения (2; 1) и (— 2; — 1). Подставляя $x=3y/2$ во второе уравнение, получаем

$$\frac{18}{4}y^2-y^2=7, \quad y^2=2, \quad y=\pm\sqrt{2}.$$

Следовательно, вторая система имеет решения $(3/\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

Ответ: $\{(2; 1), (-2; -1), (3/\sqrt{2};\ \sqrt{2}), (-3/\sqrt{2};\ -\sqrt{2})\}$.

11. Введем новые переменные $u=xy$ и $v=x^2+y^2$. Для них имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3u-v=5, \\ -v^2+9u^2=155. \end{cases}$$

Подставляя $v=3u-5$ во второе уравнение, получаем $-9u^2+30u-25+9u^2=155$. Следовательно, $u=6$ и $v=13$. Теперь решаем систему

$$\begin{cases} xy=6, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

Подставляя $y=6/x$ во второе уравнение, получаем

$$x^2+\frac{36}{x^2}=13, \quad x^4-13x^2+36=0.$$

По формуле корней биквадратного уравнения имеем

$$x=\pm\sqrt{\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{13\pm 5}{2}},$$

т. е. $x=\pm 3$ и $x=\pm 2$. Следовательно, система имеет 4 решения: (3; 2), (— 3; — 2), (2; 3) и (— 2; — 3).

Ответ: $\{(3; 2), (-3; -2), (2; 3), (-2; -3)\}$.

12. Прибавив к третьему уравнению почленно первое и второе, получим уравнение

$$x(y+z+x)-z(y+z+x)+x+y+z=0,$$

которое, очевидно, преобразуется к виду

$$(x+y+z)(x-z+1)=0. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим систему, которая получается из данной заменой третьего уравнения уравнением (1). Полученная система распадается на две системы у которых первые два уравнения, как и у данной, а третьим уравнением у первой является

$$x+y+z=0, \tag{2}$$

а у второй —

$$x-z+1=0, \tag{3}$$

Решим эти системы.

1) Из (2) находим $z=-x-y$ и подставляем это значение для z в первые два уравнения. В результате относительно x и y получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2xy+y^2-x+y=0, \\ 2x^2+3xy+y^2-3x+3y=0. \end{cases} \tag{4}$$

Из второго уравнения вычтем почленно первое, умноженное на 3, и решим полученное уравнение

$$-3xy+2x^2-2y^2=0$$

как квадратное относительно переменной x. Тогда

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{9y^2+16y^2}}{4}=\frac{3y\pm 5y}{4},$$

т. е. $x=2y$ или $x=-y/2$. Следовательно, система (4) равносильна совокупности двух систем, у которых первое уравнение, как и в (4), а вторым уравнением является соответственно $x=2y$ или $x=-y/2$.

Если $x=2y$, то из первого уравнения системы (4) для y получаем уравнение $5y^2-y=0$, которое имеет два корня $y_1=0$ и $y_2=1/5$. Следовательно, в этом случае система (4) имеет два решения (0; 0) и (2/5; 1/5).

Если $y=-2x$, то из первого уравнения следует, что $x=0$. Следовательно, в этом случае система (4) имеет одно решение (0; 0).

Из уравнения (2), учитывая найденные решения системы (4), получаем, что рассматриваемая система имеет два решения (0; 0; 0) и (2/5; 1/5; $-3/5$)

2) Из (3) находим $z=x+1$ и подставляем в первые два уравнения данной системы. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+y+1=0, \\ 2x-3y-1=0, \end{cases}$$

которая легко решается: $x=-2/11$, $y=-5/11$. Следовательно, рассматриваемая система трех уравнений имеет единственное решение

$$x=-2/11, \quad y=-5/11, \quad z=9/11.$$

Ответ: {(0; 0; 0), (2/5; 1/5; $-3/5$), ($-2/11$; $-5/11$; 9/11)}.

13. Введем новые переменные u и v по формулам

$$x=u/z \quad \text{и} \quad y=v/z. \tag{1}$$

Тогда относительно переменных u, v, z получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 27u^3-v^3-13uv=0 \\ 3u^2-4\dfrac{uv}{z}+3=0, \\ 3u-v=1. \end{cases} \tag{2}$$

Подставив $v=3u-1$ в первое уравнение системы (2), получим квадратное уравнение $12u^2-4u-1=0$, корнями которого являются числа $u_1=1/2$ и $u_2=-1/6$. Подставляя эти числа в уравнение $v=3u-1$, получаем $v_1=1/2$ и $v_2=-3/2$. Из второго уравнения системы (2) находим $z_1=4/15$ и $z_2=12/37$. Теперь, зная u, v, z, по формулам (1) находим $x_1=15/8$, $y_1=15/8$ и $x_2=-37/72$, $y_2=-37/8$. Следовательно, данная система имеет решения: (15/8; 15/8; 4/15) и ($-37/72$; $-37/8$; 12/37).

Ответ: {(15/8; 15/8; 4/15), ($-37/72$; $-37/8$; 12/37)},

14. Из второго уравнения системы определим y:

$$y = \frac{1}{2}(3 + c - (6 + c)x),$$

и подставим в первое уравнение системы:

$$-4x + \frac{1}{2}c(3 + c - 6x - cx) = 1 + c.$$

После преобразований получаем уравнение

$$(c^2 + 6c + 8)x = c^2 + c - 2.$$

Если $(c^2 + 6c + 8) \neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{c^2 + c - 2}{c^2 + 6c + 8}.$$

Подставляя это значение x во второе уравнение системы, определим единственное значение y. Таким образом, если $c^2 + 6c + 8 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Пусть теперь c такое, что $c^2 + 6c + 8 = 0$, т. е. $c = -4$ или $c = -2$. При $c = -4$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} -4x - 4y = -3, \\ 2x + 2y = -1. \end{cases}$$

Очевидно, что никакая пара чисел не удовлетворяет этой системе. Следовательно, при $c = -4$ данная система несовместна. При $c = -2$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} -4x - 2y = -1, \\ 4x + 2y = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений.

Следовательно, только при $c = -4$ данная система не имеет ни одного решения.

Ответ: $c = -4$.

15. Через v_0 обозначим скорость реки, а через v — собственную скорость катера на пути от A до B. По условию задачи собственная скорость катера на пути от B до C равна $2v/3$, а собственная скорость катера на пути от C до A равна $4v/3$. Следовательно, собственная скорость катера при движении от A до C на всех участках пути меньше, чем при движении от C до A. Однако путь от A до C катер прошел за 7 часов, а путь от C до A — за 8 часов. Отсюда следует, что река течет из пункта A в пункт C. По условию катер прошел путь от A до C за 7 часов, причем его скорость на участках AB и BC равна соответственно $v + v_0$ и $\frac{2v}{3} + v_0$. Следовательно,

$$\frac{|AB|}{v + v_0} + \frac{|BC|}{\frac{2v}{3} + v_0} = 7.$$

Из второго условия задачи следует, что путь от C до A катер прошел за 8 часов со скоростью $\frac{4}{3}v - v_0$, и поэтому

$$\frac{|AC|}{\frac{4}{3}v - v_0} = 8.$$

Наконец, из третьего условия получаем

$$\frac{|AB|}{v-v_0}=6.$$

Введем обозначения $a=|AB|/v_0$, $b=|BC|/v_0$ и $p=v/v_0$. Тогда для a, b, p получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{p+1}+\dfrac{b}{\frac{2}{3}p+1}=7, \\ \dfrac{a+b}{\frac{4}{3}p-1}=8, \\ \dfrac{a}{p-1}=6. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы следует, что $a=6(p-1)$. Подставляя выражение для a во второе уравнение этой системы, получаем $b=\frac{14}{3}p-2$. Подставляя выражение для a и b в первое уравнение системы, относительно p получаем квадратное уравнение

$$4p^2-7p-15=0,$$

корнями которого являются числа 3 и $-5/4$. Условию задачи удовлетворяет только число 3. Тогда $b=12$, и искомое время равно $\dfrac{12}{\frac{2}{3}\cdot 3+1}$, т. е. 4 часам.

ГЛАВА IV

1. Не равносильны, так как, например, $x=7$ входит в множество решений второго неравенства, но не содержится в множестве решений первого.

2. Не равносильны, значение $x=0$ удовлетворяет первому неравенству, но не удовлетворяет второму.

3. Равносильны. Множество решений у данных неравенств одно и то же — это пустое множество.

4. Не равносильны, так как $x=0$ принадлежит множеству решений второго неравенства, но не содержится в множестве решений первого неравенства.

5. Приводим неравенство к стандартному виду:

$$\frac{x^2+2x-15}{x+2}>0.$$

Находим критические точки $x=-2$, $x=-5$, $x=3$ и записываем неравенство следующим образом:

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x+2}>0.$$

Критические точки разбивают числовую ось на четыре интервала (рис. 332). Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Получаем, что рациональная функция

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x+2}$$

положительна на двух интервалах: $]-5;\ -2[$ и $]3;\ +\infty[$. Сами критические точки в нашем случае в множество решений, очевидно, не входят.

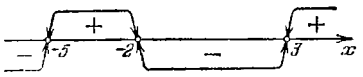


Рис. 332.

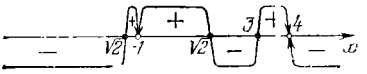


Рис. 333.

6. Неравенство уже имеет стандартный вид. Находим критические точки:

$$x=-\sqrt{2},\quad x=-1,\quad x=\sqrt{2},\quad x=3,\quad x=4.$$

Числовая ось разбивается критическими точками на шесть интервалов (рис. 333), на каждом из которых рациональная функция сохраняет знак. Легко усматривается, что на интервалах $]-\sqrt{2};\ -1[$, $]-1;\ \sqrt{2}[$ и $]3;\ 4[$ рациональная функция $\dfrac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(x-3)^3}{(x+1)^2(x-4)}$ положительна. Исследуем критические точки. Точки $x=\pm\sqrt{2}$, $x=3$ являются нулями числителя, и, так как неравенство нестрогое, входят в множество решений. Нули знаменателя $x=-1$, $x=4$ не принадлежат множеству решений (стрелки на рис. 333 указывают на это).

Ответ: $[-\sqrt{2};\ -1[\cup]-1;\ \sqrt{2}]\cup[3;\ 4[$.

7. Для нахождения области определения данной функции нужно решить рациональное неравенство

$$\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x+4}{2x+5}\geqslant 0,$$

которое легко приводится к стандартному виду

$$\frac{3x^2+10x+13}{(x-2)(2x+5)}\geqslant 0.$$

Критические точки $x=2$ и $x=-5/2$ разбивают числовую ось на три интервала, два из которых дают множество решений неравенства и, следовательно, являются областью определения функции.

Ответ: $]-\infty;\ -5/2[\cup]2;\ +\infty[$.

8. Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда $x^2-40x+39\geqslant 0$, т. е. если $x\leqslant 1$ или $x\geqslant 39$. Если $x<1$, то правая часть неравенства отрицательна, тогда как левая — положительна. Следовательно, на интервале $]-\infty;\ 1[$ решений нет. Значение $x=1$ удовлетворяет неравенству и, следовательно, входит в множество решений неравенства. Если $x\geqslant 39$, то законно возведение в квадрат обеих частей неравенства, т. е. $x^2-40x+39\leqslant x^2-2x+1$, $-38x\leqslant -38$, или $x\geqslant 1$. Учитывая ограничение, получаем $x\geqslant 39$.

Ответ: $\{1\}\cup[39;\ +\infty[$.

9. Квадратные корни, входящие в неравенство, существуют одновременно для тех и только тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 3x-4\geqslant 0,\\ 2x-13\geqslant 0,\\ 13-2x\geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение и притом только одно: $x=13/2$. Подстановкой в данное неравенство убеждаемся, что $x=13/2$ является решением.

10. Положим $z=9x^2-6x$, тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{5z+1}<7-z.$$

Очевидно, решения могут быть только в том случае, когда

$$-1/5\leqslant z<7,$$

но для таких значений z можно обе части неравенства возвести в квадрат:

$$5z+1<49-14z+z^2,$$
$$z^2-19z+48>0,$$
$$z<3 \quad \text{и} \quad z>16.$$

Следовательно,

$$-1/5\leqslant z<3.$$

Теперь осталось решить систему квадратных неравенств

$$-1/5\leqslant 9x^2-6x<3.$$

Неравенство $9x^2-6x<3$ верно при всех значениях x из интервала

$$-1/3<x<1.$$

Неравенству

$$-1/5\leqslant 9x^2-6x,$$

удовлетворяют все $x\leqslant(5-2\sqrt{5})/15$ и все $x\geqslant(5+2\sqrt{5})/15$. Оба неравенства, таким образом, справедливы, если

$$-1/3<x\leqslant(5-2\sqrt{5})/15 \quad \text{и} \quad (5+2\sqrt{5})/15\leqslant x<1.$$

11. Данному неравенству удовлетворяют те и только те значения переменной x, которые удовлетворяют либо неравенству

$$x-\frac{4}{x}-2\geqslant 1,$$

либо неравенству

$$x-\frac{4}{x}-2\leqslant -1.$$

Каждое из этих рациональных неравенств легко решается методом интервалов. Приводим первое неравенство к стандартному виду

$$\frac{x^2-3x-4}{x}\geqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{(x+1)(x-4)}{x}\geqslant 0.$$

Критические точки $x=-1$, $x=0$, $x=4$ разбивают всю числовую ось на четыре интервала, на каждом из которых определяем знак рациональной функции и получаем решение

$$-1\leqslant x<0 \quad \text{и} \quad x\geqslant 4.$$

Второе неравенство в стандартном виде записывается так:

$$\frac{x^2-x-4}{x}\leqslant 0$$

или

$$\frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)}{x}\leqslant 0.$$

Из четырех интервалов, на которые числовая ось разбивается тремя критическими точками $x=(1-\sqrt{17})/2$, $x=0$, $x=(1+\sqrt{17})/2$, два интервала, а именно

$$x<\frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad 0<x<\frac{1+\sqrt{17}}{2},$$

входят в множество решений. Правые концы этих интервалов, очевидно, также удовлетворяют неравенству.

Ответ: $]-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}]\cup[-1; 0[\cup]0; \frac{1+\sqrt{17}}{2}]\cup[4; +\infty[$.

12. Заметим сразу, что при $a=3$ неравенство решений не имеет. При всех остальных значениях параметра a неравенство является рациональным. Применим метод интервалов. Приведем неравенство к стандартному виду

$$\frac{2a+1-x(a-3)}{(a-3)(x-2)}\geqslant 0$$

или

$$\frac{x-\frac{2a+1}{a-3}}{x-2}\leqslant 0.$$

Критические точки $x=2$ и $x=(2a+1)/(a-3)$ разбивают числовую ось на три интервала. Неравенство выполняется на среднем интервале и в точке $x=(2a+1)/(a-3)$. Определим, какая из критических точек является левым концом среднего интервала. Для этого составим разность

$$\frac{2a+1}{a-3}-2=\frac{7}{a-3}.$$

Теперь видно, что при $a>3$ левым концом среднего интервала будет точка $x=2$; при $a<3$ точка $x=(2a+1)/(a-3)$. Следовательно, если $a>3$, то неравенству удовлетворяют все значения x из промежутка

$$2<x\leqslant(2a+1)/(a-3);$$

если $a<3$, то неравенству удовлетворяют все значения переменной из промежутка

$$\frac{2a+1}{a-3}\leqslant x<2.$$

Ответ: При $a>3$ $x\in]2; (2a+1)/(a-3)]$,
при $a<3$ $x\in[(2a+1)/(a-3); 2[$,
при $a=3$ решений нет.

13. Преобразуем неравенство следующим образом:

$$x+xy+y+yz+z+zx-6\sqrt{xyz}\geqslant 0,$$
$$(x-2\sqrt{xyz}+yz)+(y-2\sqrt{xyz}+xz)+(z-2\sqrt{xyz}+xy)\geqslant 0$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{yz})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{xz})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{xy})^2\geqslant 0.$$

Справедливость последнего неравенства очевидна. На множестве всех неотрицательных значений переменных проведенные преобразования не нарушили равносильности неравенств. Неравенство доказано.

14. Левая часть содержит $2n+1$ слагаемых. Каждое слагаемое не превосходит $1/(n+1)$. Поэтому

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{3n+1}\leqslant(2n+1)\frac{1}{n+1}<\frac{2n+2}{n+1}=2.$$

15. В неравенстве

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

положим

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=2^2,\ \ldots,\ x_n=2^{n-1}.$$

Получим

$$\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{1\cdot2\cdot2^2\ldots2^{n-1}},$$

$$\frac{2^n-1}{n}\geqslant\sqrt[n]{2^{1+2+\ldots+(n-1)}},\quad 2^n-1\geqslant n\sqrt[n]{2^{(n-1)n/2}},$$

$$2^n-1\geqslant n2^{(n-1)/2}.$$

16. При любом отрицательном значении a решением системы является, например, $x=1$. При $a=0$ система также имеет по крайней мере одно решение, так как $x=1$ — решение системы и в этом случае. Если $a>0$, то система может быть записана так

$$\begin{cases}x\leqslant 1/a,\\ x\geqslant 4a,\end{cases}$$

и для существования решения необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$4a\leqslant 1/a,$$

т. е. $a^2\leqslant 1/4$, $a\leqslant 1/2$.

Ответ: $]-\infty;\ 1/2]$.

17. Рассмотрим сначала случай, когда $a=2$. В этом случае $f(x)=4x+3$ и единственный нуль $x=-5/4$ функции $f(x)$ принадлежит интервалу $]-2;\ 1[$. Следовательно, значение $a=2$ удовлетворяет поставленному условию.

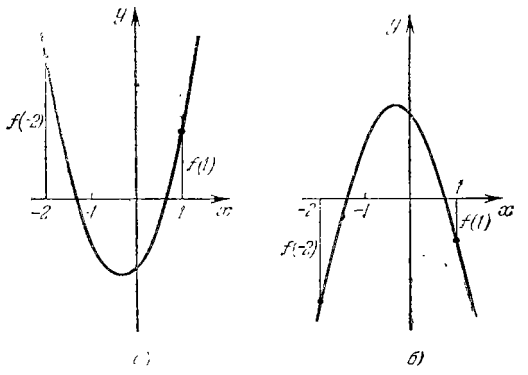


Рис. 334.

Пусть теперь $a\neq 2$. Позаботимся сначала о том, чтобы нули у функции $f(x)$ существовали. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $(a-2)x^2+2ax++a+3$ был неотрицателен, т. е. $a^2-(a-2)(a+3)\geqslant\geqslant 0$, откуда $a\leqslant 6$. Обратим далее внимание на следующее обстоятельство. Если $2<a\leqslant 6$, то для того чтобы нули функции $f(x)$ принадлежали интервалу $]-2,\ 1[$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $f(-2)>0$ и $f(1)>0$ (см. рис. 334, *а*). Если же $a<2$, то для того чтобы нули функции $f(x)$ лежали на интервале

$]-2, 1[$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $f(-2)<0$ и $f(1)<0$ (рис.334, *б*).

Таким образом, помимо значения $a=2$, условиям задачи будут удовлетворять те и только те значения a, которые удовлетворяют по крайней мере одной из следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} a \leqslant 6, \\ a > 2, \\ f(-2) = a-5 > 0, \\ f(1) = 4a+1 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 2, \\ f(-2) = a-5 < 0, \\ f(1) = 4a+1 < 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $5 < a \leqslant 6$, вторая система удовлетворяется при $a < -1/4$.

Ответ: $]-\infty; -1/4[\cup \{2\} \cup]5; 6]$.

18. Положим $x = t - \frac{3}{2}$, тогда

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = \left(t^2 - \frac{9}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно t^2. Наименьшее значение достигается при

$$t^2 = \frac{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{4}, \quad \text{т. е.} \quad x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Наименьшее значение равно $\left(\frac{5}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = -1$.

Ответ: При $x = (-3 \pm \sqrt{5})/2$ многочлен принимает наименьшее значение, равное -1.

19. Обозначим через x длину северной стороны, через y — длину восточной. Тогда $xy = 9000$ (м^2) и стоимость S (в рублях) строительства будет равна $S = 10x + 4y$. Найдем наименьшее значение S

$$S = 10x + 4y = 10x + \frac{4 \cdot 9000}{x} = 10\left(x + \frac{3600}{x}\right).$$

Воспользуемся неравенством

$$x + \frac{a}{x} \geqslant 2\sqrt{a}, \quad a > 0, \quad x \in]0; +\infty[$$

и получим, что

$$S \geqslant 10 \cdot 2\sqrt{3600} = 1200,$$

причем знак равенства имеет место только при

$$x = \sqrt{a} = \sqrt{3600} = 60.$$

Ответ: Выделенной на строительство суммы будет достаточно только в том случае, если северная сторона спортплощадки будет иметь длину 60 метров.

20. Обозначим расстояние между пунктами A и B через a. Из $\triangle LBM$ (рис. 335) по теореме косинусов найдем расстояние $s(t)$ между автомобилями

в момент времени t после начала движения:

$$s(t)=\sqrt{(a-V_1t)^2+V_2^2t^2+(a-V_1t)\,V_2t}.$$

Под радикалом стоит квадратный трехчлен относительно t:

$$(V_1^2+V_2^2-V_1V_2)\,t^2-a\,(2V_1-V_2)\,t+a^2.$$

Наименьшее значение этого квадратного трехчлена, а, следовательно, и $s(t)$ достигается при

$$t=\frac{a\,(2V_1-V_2)}{2\,(V_1^2+V_2^2-V_1V_2)}.$$

Но в условии задачи сказано, что в этот момент времени первый автомобиль

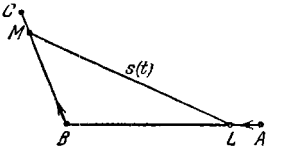


Рис. 335.

прошел седьмую часть своего пути, следовательно, $t=a/7V_1$. Таким образом, получаем соотношение

$$\frac{a\,(2V_1-V_2)}{2\,(V_1^2+V_2^2-V_1V_2)}=\frac{a}{7V_1},$$

из которого определяем искомое отношение скоростей:

$$14V_1^2-7V_1V_2=2V_1^2+2V_2^2-2V_1V_2,$$

$$12V_1^2-2V_2^2-5V_1V_2=0,$$

$$12\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-5\left(\frac{V_1}{V_2}\right)-2=0,$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{5+\sqrt{25+96}}{24}=\frac{5+11}{24}=\frac{2}{3}.$$

21. Пусть x — длина стороны выбрасываемых квадратов, $V(x)$ — объем получившейся коробки, тогда

$$V(x)=(a-2x)^2x$$

или

$$V(x)=\frac{(a-2x)\,(a-2x)\,4x}{4}.$$

Из последнего представления для $V(x)$ видно, что сумма трех множителей, стоящих в числителе, равна $2a$ и, следовательно, произведение их достигает наибольшего значения при равенстве всех множителей, т. е. если

$$a-2x=a-2x=4x,$$

то $x=a/6$.

Ответ: Сторона выбрасываемых квадратов должна быть равна $a/6$.

ГЛАВА V

1. Заметим, что $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|=\frac{2}{n^2+1}<\frac{2}{n^2}$ и неравенство $2/n^2<\varepsilon$ выполняется для всех n, удовлетворяющих условию $n>\sqrt{2/\varepsilon}$. Для любого $\varepsilon>0$

возьмем $N=[\sqrt{2/\varepsilon}]+1$ $(N>\sqrt{2/\varepsilon})$, тогда при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right|<\frac{2}{n^2}<\frac{2}{N^2}<\varepsilon.$$

Учитывая установленную зависимость N от ε, заполним таблицу:

ε	1/10	1/100	1/1000
N	5	15	45
	$\left\|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right\|<\frac{1}{10}$	$\left\|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right\|<\frac{1}{100}$	$\left\|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right\|<\frac{1}{1000}$

2. Для любого положительного числа M возьмем $n=2([M]+1)$, тогда для элемента последовательности с этим номером, учитывая, что n четное, получим

$$|n^{(-1)^n}|=2([M]+1)>M.$$

3. Предположим противное, т. е. предположим, что существует число a, являющееся пределом последовательности (a_n). По определению предела для $\varepsilon=1/3$ найдется такое число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-a|<1/3$. Отсюда следует, что для любых номеров n_1 и n_2 таких, что $n_1>N$ и $n_2>N$, должно выполняться неравенство

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|\leqslant|a_{n_1}-a|+|a_{n_2}-a|<2/3.$$

Однако, взяв $n_1=2N$ и $n_2=2N+1$, получим

$$|a_{n_1}-a_{n_2}|=\left|\frac{2N}{N+1}-0\right|=\frac{2N}{N+1}\geqslant 1.$$

Полученное противоречие и доказывает, что предположение неверно, т. е. данная последовательность расходящаяся.

4. Для любого $\varepsilon>0$ неравенство $1/n^\alpha<\varepsilon$ выполняется для любого натурального n, удовлетворяющего условию $n>\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right]+1$, тогда при всех $n>N$ будет справедливо неравенство $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{N^\alpha}<\varepsilon$.

5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $b_n|<\varepsilon$. По условию $|a_n|\leqslant|b_n|$ при $n=1, 2, \ldots$, тогда при $n>N$ будет выполняться и неравенство $|a_n<\varepsilon$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

6. Так как

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n})=0$ (это следует из задачи 4 при $\alpha=1/2$), то, как следует из предыдущей задачи, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

7. Рассмотрим новую последовательность (b_n) такую, что $b_n=a_n+x$ $(n=1, 2, \ldots)$ и выберем x так, чтобы последовательность (b_n) определялась возможно более просто. Подставим $a_n=b_n-x$ в рекуррентное соотношение, определяющее a_n, получим $b_{n+1}-x=\frac{1}{3}(b_n-x)+\frac{1}{3}$ или $b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x$. Возьмем $x=-1/2$, тогда $b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$, т. е. последовательность (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем $q=1/3$ и первым членом $b_1=a_1+x=3/2$. Итак,

$$b_n=b_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \quad \text{и} \quad a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}.$$

Легко находим $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

8. По формуле суммы первых k членов геометрической прогрессии при $k=n+1$ имеем

$$1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

$$1+b+b^2+\ldots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

Поэтому, учитывая, что $|a|<1$ и $|b|<1$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})}=\frac{1-b}{1-a}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

9. Под знаком квадратного корня стоит сумма первых n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=1$ и разностью $d=2$. По формуле суммы арифметической прогрессии имеем

$$1+3+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}n=n^2,$$

поэтому $\frac{n\sqrt{1+3+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}=\frac{n^2}{2n^2+n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+\ldots+(2n+1)}}{2n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

10. При $a=1$ очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Пусть $a>1$, тогда по свойству неравенств $\sqrt[n]{a}>1$. Обозначим $h=\sqrt[n]{a}-1$. Из неравенства Бернулли $(1+h)^n\geqslant 1+nh$ следует $((1+h)^n-1)/n\geqslant h$. Подставляя сюда $h=\sqrt[n]{a}-1$, получим $(a-1)/n\geqslant\sqrt[n]{a}-1$, и так как $\sqrt[n]{a}-1>0$, то отсюда следует $|\sqrt[n]{a}-1|\leqslant(a-1)/n$. Для любого $\varepsilon>0$ возьмем $N=[(a-1)/\varepsilon]+1$, тогда при всех $n>N$ будем иметь $|\sqrt[n]{a}-1|\leqslant(a-1)/n<(a-1)/N<\varepsilon$ (так как $N>(a-1)/\varepsilon$). Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

При $0<a<1$ имеем $1/a>1$, и из доказанного следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}=1$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}}=1$.

11. Из определения предела следует, что для любых $\varepsilon>0$ найдется такое N_1, что при всех $n>N_1$ выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$, т. е. $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ и найдется такое N_2, что при всех $n>N_2$ справедливо неравенство $|b_n-a|<\varepsilon$, т. е. $a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon$. Тогда, если $N>N_1$ и $N>N_2$, при всех $n>N$ выполняются одновременно неравенства $a-\varepsilon<a_n$ и $b_n<a+\varepsilon$. Из условия $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$ получаем, что при $n>N$ имеет место $a-\varepsilon<a_n\leqslant x_n\leqslant b_n<a+\varepsilon$, т. е. $|x_n-a|<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Из доказанного в частности следует, что если для любого n выполняется неравенство $a\leqslant x_n\leqslant b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. Очевидно, что $\sqrt[n]{3^n+5^n}=5\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}$. Далее, для любого n справедливо неравенство $1<(3/5)^n+1<8/5$, откуда следует $1<\sqrt[n]{(3/5)^n+1}<\sqrt[n]{8/5}$. Как следует из решения задачи 10 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{8/5}=1$, тогда из решения задачи 11 следует, что $\lim\sqrt[n]{(3/5)^n+1}=1$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3/5)^n+1}=5.$$

13. Докажем, что для любых n справедливо неравенство

$$1<a_n<2. \tag{1}$$

При $n=1$ это неравенство справедливо, так как $a_1=\sqrt{2}$. Пусть неравенство (1) верно при $n=k\geqslant 1$. Из рекуррентной формулы $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}$ и условия $a_n>1$ следует, что $a_{k+1}>\sqrt{2+1}>1$, а из условия $a_n<2$ получаем $a_{k+1}<\sqrt{2+2}=2$. Таким образом, $1<a_{k+1}<2$ и из принципа математической индукции следует, что неравенство (1) верно для любого n.

Покажем теперь, что $a_{n+1}>a_n$, т. е. $\sqrt{2+a_n}>a_n$. Так как $a_n>0$, то это неравенство равносильно такому: $2+a_n>a_n^2$ или $a_n^2-a_n-2<0$. Квадратичная функция $f(x)=x^2-x-2$ обращается в нуль при $x=-1$ и $x=2$ и на интервале $]-1;\ 2[$ отрицательна. Поскольку $a_n\in]1;\ 2[$ при любом n, то $a_n^2-a_n-2<0$ и, следовательно, $\sqrt{2+a_n}>a_n$. Итак, последовательность (a_n) ограничена и монотонна. По теореме Вейерштрасса она имеет предел, обозначим его a.

Из равенства $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ следует

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}a_n},$$

т. е. $a=\sqrt{2+a}$. Отсюда находим, что $a=2$ ($a=-1$, очевидно, не подходит, так как $1<a_n<2$).

14. Пусть a — первый член и d — разность арифметической прогрессии, S_k — сумма первых k членов этой прогрессии, n — число ее членов. Условия

задачи можно записать в виде

$$\frac{S_{13}}{S_n - S_{n-13}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_n - S_3}{S_{n-3}} = \frac{4}{3}.$$

Используя формулу (6) § 4 гл. V для S_k, отсюда получим

$$a + 19d = nd,$$
$$-2a + 22d = nd.$$

Умножая первое равенство на 2 и складывая почленно со вторым, получим $60d = 3nd$, откуда находим $n = 20$.

15. Пусть a — первый член и d — разность арифметической прогрессии, n — число ее членов, S_n — ее сумма,

$$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} n.$$

Сумма $\tilde{S}_n$ n членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью $d+3$ такова:

$$\tilde{S}_n = \frac{2a + (d+3)(n-1)}{2} n,$$

а для арифметической прогрессии с первым членом $4a$ и разностью d сумма ее n членов будет равна

$$\tilde{\tilde{S}}_n = \frac{8a + d(n-1)}{2} n.$$

По условию $\tilde{S}_n = 2Sn = \tilde{\tilde{S}}_n$. Отсюда следует

$$4a = d(n-1) \quad \text{и} \quad 2a = (n-1)(3-d),$$

откуда, так как $a \neq 0$, находим $d = 2$.

16. Пусть a — первый член, q — знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии и пусть $a_n = 1/6$.

Сумма всех членов прогрессии, стоящих до этого члена, равна сумме первых $n-1$ членов прогрессии, по формуле (5) § 5 гл. V

$$S_{n-1} = a\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}.$$

Сумма всех членов, стоящих после члена a_n, равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом aq^n и знаменателем q, т. е. равна $aq^n \frac{1}{1-q}$, таким образом,

$$a\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} : a\frac{q^n}{1 - q} = 30. \tag{1}$$

Кроме того, по условию $a/(1-q) = 16{,}3$ и $aq^{n-1} = 1/6$. Из последних двух равенств, исключая a, получаем

$$q^{n-1}(1-q) = \frac{1}{32} \quad \text{или} \quad q^{n-1} = \frac{1}{32} + q^n,$$

а из (1) следует $30q^n = 1 - q^{n-1}$. Подставляя сюда выражение для q^{n-1}, получаем

$$30q^n = \frac{31}{32} - q^n, \quad \text{т. е.} \quad 31q^n = \frac{31}{32}, \quad q^n = \frac{1}{32},$$

тогда $q^{n-1} = \frac{1}{32} + q^n = \frac{1}{16}$. Теперь легко находим, что $q = 1/2$ и $r = 5$.

17. По определению

$$0{,}2(7)=\frac{2}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots=\frac{2}{10}+\frac{7}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right).$$

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$0{,}2(7)=\frac{2}{10}+\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{7}{90}=\frac{5}{18}.$$

Аналогично получаем

$$0{,}1(63)=\frac{1}{10}+\frac{63}{1000}+\frac{63}{100000}+\ldots=\frac{1}{10}+\frac{63}{1000}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{63}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}+\frac{63}{990}=\frac{9}{55}.$$

Таким образом,

$$0{,}2(7)\cdot 0{,}1(63)=1/22.$$

18. Так как функция $\sin(1/x)$ определена для всех $x\neq 0$ и $|\sin(1/x)\leqslant 1$, то

$$|x\sin(1/x)-0|=|x\sin(1/x)|\leqslant|x|$$

и неравенство $|x\sin(1/x)-0|<\varepsilon$, очевидно, выполняется для всех x таких, что $0<|x|<\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ возьмем $\delta=\varepsilon$, тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x|<\delta$, будет справедливо

$$|x\sin(1/x)-0|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon,$$

19. $$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+3}-1}=\frac{4}{\sqrt{5}-1}.$$

20. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

21. $$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}=\lim_{x\to -1}\frac{(2x-1)(x+1)}{(x-7)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x-7}=\frac{3}{8}.$$

22. Так как $\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin x+\cos x}=\cos x-\sin x$ (при условии, что $\sin x+\cos x\neq 0$) и, как отмечалось, функции $\cos x$ и $\sin x$ непрерывны в любой точке, то

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.$$

23. Так как $|x|=\begin{cases}x & \text{при } x>0,\\ -x & \text{при } x<0,\end{cases}$ то

$$\frac{x-|x|}{2x}=\begin{cases}0, & \text{при } x>0,\\ 1, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x-|x|}{2x}=0$ и $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x-|x|}{2x}=1$.

24. Если $x>1$, то $|x-1|=x-1$ и

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}.$$

Очевидно, что $f(x)>0$ при $x>1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=+\infty.$$

Если же $x<1$, то $|x-1|=-x+1$ и

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+1}{x+3},$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

25. Так как $\dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(7+\dfrac{2}{x}\right)^2}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, то, как

нетрудно видеть,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}=\frac{49}{16}.$$

26. Так как

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}+1},$$

то легко находим

$$\lim\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

27. Очевидно, что функция $\sin x$ не может иметь бесконечного предела, так как $|\sin x|\leqslant 1$. Покажем, что не существует и конечного предела у этой функции при $x\to+\infty$. Предположим противное, т. е. пусть $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$. По определению предела на бесконечности, для любого $\varepsilon>0$ и, следовательно, для $\varepsilon=1/2$ найдется такое число $M>0$, что для всех x таких, что $x>M$, выполняется условие $|\sin x-b|<1/3$. Откуда следует, что если $x_1>M$ и $x_2>M$, то

$$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|\sin x_1-b|+|\sin x_2-b|<2/3.$$

Однако, если выбрать $n=[M]+1$ $(n>M)$ и взять $x_1=\pi n$ $(x_1>M)$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $(x_2>M)$, то

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|\sin \pi n-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right|=1>2/3$$

Полученное противоречие доказывает, что функция $\sin x$ при $x\to+\infty$ не имеет предела.

28. Функцию $z(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ можно рассматривать как сложную функцию $z=u^{-1}$, где $u(x)=\sqrt{x}$. Зная, что $z'=-1/u^2$ и $u'=1/(2\sqrt{x})$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем $(1/\sqrt{x})'=z'u'=-1/(2x\sqrt{x})$.

Производная от функции $y(x)=(v(x))^{50}$, где $v(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, также находится по правилу дифференцирования сложной функции: $y'(x)=50v^{49}v'$. Так как

$$v'=(\sqrt{x})'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right),$$

то

$$y'(x)=50\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{49}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=25\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{48}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

29. Если существует производная $f'(x_0)$, то уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Так как

$$f'(x)=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-3-x^2}},$$

то подставляя в уравнение касательной $x_0=3/2$, $f(x_0)=\sqrt{3}/2$ и $f'(x_0)=1/\sqrt{3}$, получаем $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

30. Пусть $f_1(x)=x^2-2x+5$ и $f_2(x)=x^2+2x-11$, и пусть прямая $y=kx+l$ касается графиков функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ соответственно в точках x_1 и x_2, тогда уравнение этой прямой можно записать в двух видах:

$$y=f_1'(x_1)(x-x_1)+f_1(x_1),$$
$$y=f_2'(x_2)(x-x_2)+f_2(x_2).$$

Отсюда следует, что

$$k=f_1'(x_1)=f_2'(x_2),$$
$$l=f_1(x_1)-x_1f_1'(x_1)=f_2(x_2)-x_2f_2'(x_2).$$

Для данных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем систему

$$\begin{cases}2x_1-2=2x_2+2,\\ 5-x_1^2=-11-x_2^2,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x_2=x_1-2,\\ x_1^2-x_2^2=16,\end{cases}$$

решая которую, находим $x_1=5$, $x_2=3$. Тогда имеем $k=8$, $l=-20$. Уравнение общей касательной таково: $y=8x-20$.

ГЛАВА VI

1. Функция $f_1(x)$ не является ни четной, ни нечетной, так как, например, $f(1)=\sqrt{2}$, $f(-1)=\sqrt{12}$.

Функция $f_2(x)$ не является ни четной, ни нечетной, так как она определена только для $x\geqslant 2/3$.

Функция $f_3(x)$ определена на всей действительной оси и является нечетной, как сумма двух нечетных функций x^3 и $3\sin x$.

Функция $f_4(x)$ определена на всей действительной оси и является четной функцией, как разность двух четных функций x^4 и $5\cos x$.

Функция $f_5(x)$ определена на всей действительной оси. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как, например, $f_5(\ln 2) = -1/6$, $f_5(-\ln 2) = 2/3$.

Функция $f_6(x)$ определена для любого $x \in \mathbb{R}$. Так как для любого x

$$-x+\sqrt{x^2+1} = \frac{-x^2+x^2+1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

то

$$f_6(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f_6(x).$$

Следовательно, $f_6(x)$ является нечетной функцией.

2. а) Функция $f(x)$ является периодической, причем ее периодом является любое положительное число. Действительно, пусть T — положительное рациональное число. Тогда, если x — рациональное, то $x+T$ также рациональное, и тогда $f(x) = 1 = f(x+T)$. Если же x — иррациональное, то и $x+T$ — иррациональное, поэтому $f(x) = 0 = f(x+T)$.

Никакое иррациональное положительное число T не является периодом этой функции, так как $f(-T) = 0$, но $f(-T+T) = f(0) = 1$.

Покажем, что функция $f(x)$ не имеет наименьшего периода. Предположим, что T_0 — наименьшее положительное рациональное число, являющееся периодом функции $f(x)$. Но число $T_0/2 < T_0$ также является периодом этой функции. Следовательно, наше предположение, что есть наименьший положительный период, неверное.

б) Так как функции $\cos x$ и $\sin x$ являются периодическими с периодом 2π, то функция $f(x)$ также является периодической и число 2π является ее периодом. Определим наименьший период функции. Имеем

$$f(x) = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Следовательно, наименьший период функции $f(x)$ равен $\pi/2$.

3. а) Так как $f(x) \to \infty$ при $x \to -3$ и при $x \to +3$, то прямые $x = -3$ и $x = 3$ являются вертикальными асимптотами. Так как

$$f(x) = \frac{x^2-9+13}{x^2-9} = 1 + \frac{13}{x^2-9} \to 1$$

при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, то прямая $y = 1$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

б) Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

Далее, функция $f(x)$ представима в таком виде:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-1} = \frac{x^2-x+x-1-2}{x-1} = x+1-\frac{2}{x-1}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x-1} = 0$, то прямая $y = x+1$ является асимптотой при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

в) Функция $f(x)$ определена для $x \geqslant -2$ и для $x \leqslant -4$. Вертикальных асимптот график данной функции не имеет. Для нахождения асимптот при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ воспользуемся формулами (2) и (3) § 3 гл. VI. По формуле (3)

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}} = 1.$$

По формуле (2)

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+8}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x^2+6x+8}-x)\left(\sqrt{x^2+6x+8}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x+8}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+8-x^2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{8}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}}=3.$$

Следовательно, прямая $y=x+3$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$. Аналогично показывается, что прямая $y=-x-3$ является асимптотой при $x\to-\infty$.

4. а) Функция $f(x)$ определена на всей действительной оси и не является ни четной, ни нечетной. Она также не является периодической функцией и не имеет асимптот. Из определения модуля следует, что

$$f(x)=\begin{cases} x\left(\frac{4}{3}x-2\right), & \text{если } x\geqslant 1,\\ -\frac{2}{3}x^2, & \text{если } x<1.\end{cases}$$

Графиком функции $y=-\frac{2}{3}x^2$ является парабола, вершина которой лежит в начале координат и ветви которой направлены вниз. На бесконечном промежутке $]-\infty;\ 0[$ функция $f(x)$ возрастает, а на промежутке $]0;\ 1[$ убывает. Точка $x=0$ является точкой максимума функции $f(x)$. Графиком функции $y=x\left(\frac{4}{3}x-2\right)$ является парабола, которая пересекает ось Ox в точках $x=0$ и $x=3/2$. Следовательно, абсцисса x вершины параболы равны $3/4$, а ордината y равна $-3/4$. Следовательно, при $x\geqslant 1$ функция $f(x)$ возрастает. Точка $x=1$ является точкой минимума, так как в этой точке функция $f(x)$ непрерывна и на интервале $]0;\ 1[$ она убывает, а на интервале $]1;\ +\infty[$ возрастает. График функции $f(x)$ приведен на рис. 336.

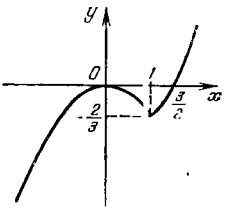


Рис. 336.

б) Функция $f(x)=\lg(\sin x)$ определена для тех значений x, где $\sin x>0$, т. е. для $x\in\,]2\pi n;\ 2\pi n+\pi[$, $n\in\mathbb{Z}$.

Так как функция $\sin x$ — периодическая с периодом 2π, то функция $\lg(\sin x)$ также является периодической с тем же периодом. Поэтому достаточно построить график функции на интервале $]0;\ \pi[$, а затем достроить график функции во всех точках, где функция определена. Прямые $x=0$ и $x=\pi$ являются вертикальными асимптотами, так как $f(x)\to-\infty$ при $x\to+0$ и при $x\to\pi-0$. На интервале $]0;\ \pi/2[$ функция $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а функция $\lg(\sin x)$ возрастает от $-\infty$ до 0. На интервале $]\pi/2;\ \pi[$ функция $\sin x$ убывает от 1 до 0, а функция $\lg(\sin x)$ убывает от 0 до $-\infty$. Точка $\pi/2$ является точкой максимума для данной функции. График функции $f(x)$ изображен на рис. 337.

в) Функция $f(x)=2^{\cos x}$ определена на всей действительной оси. Так как функция $\cos x$ четная, то и функция $f(x)$ четная. Функция $\cos x$ является периодической с периодом 2π, поэтому и функция $f(x)$ является периодической с тем же самым периодом. Следовательно, достаточно построить график функции на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

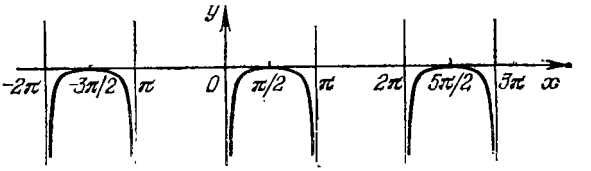


Рис. 337.

Заметим, что график функции $f(x)$ не имеет вертикальных асимптот.

На отрезке $[0;\ \pi]$ функция $\cos x$ убывает от 1 до -1, поэтому функция $f(x)$ убывает от 2 до 1/2. На отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ функция $\cos x$ возрастает от -1 до 1, а функция $f(x)$ возрастает от 1/2 до 2. В точках $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, функция $f(x)$ имеет максимумы, равные 2, а в точках $x=2\pi n+\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, функция $f(x)$ имеет минимумы, равные 1/2. График функции $f(x)=2^{\cos x}$ изображен на рис. 338.

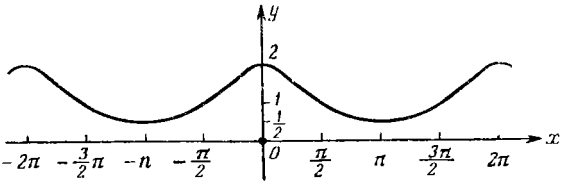


Рис. 338.

5. а) Функция $f(x)=\dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$ определена для всех $x\neq 3$. Она не является ни четной, ни нечетной и не является периодической. Ее график пересекает ось Ox в точке $x=2$ и ось Oy в точке $y=8/9$. Так как $f(x)\to-\infty$ при $x\to 3$, то прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой для графика функции $f(x)$. Заметим, что

$$f(x)=\frac{8-12x+6x^2-x^3}{x^2-6x+9}=-x+\frac{8-3x}{x^2-6x+9},$$

поэтому прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Найдем производную

$$f'(x)=\frac{3(2-x)^2(-1)(x-3)^2-(2-x)^3\,2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{(2-x)^2(5-x)}{(x-3)^3}.$$

Точки $x=2$ и $x=5$ являются критическими точками. На бесконечном промежутке $]-\infty;\ 2[$ производная $f'(x)$ отрицательна, следовательно, функция $f(x)$ убывает от $-\infty$ до 0. На интервале $]2;\ 3[$ производная отрицательна, следовательно, функция убывает от 0 до $-\infty$. На интервале $]3;\ 5[$ производная положительна, функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до $-27/4$. И, наконец, на

бесконечном промежутке $]5; +\infty[$ производная отрицательна, функция $f(x)$ убывает от $-27/4$ до $-\infty$. Отсюда следует, что точка $x=5$ является точкой максимума. Заносим все данные исследования в таблицу.

x	$]-\infty; 2[$	2	$]2; 3[$	$]3; 5[$	5	$]5; +\infty[$
y	$]+\infty; 0[$	0	$]0; -\infty[$	$\left]-\infty; -\frac{27}{4}\right[$	$-\frac{27}{4}$	$\left]-\frac{27}{4}; -\infty\right[$
y'	$-$	0	$-$	$+$	0	$-$
	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 339.

б) Функция $f(x)=x+e^{-x}$ определена для всех $x\in\mathbb{R}$. Она не является ни четной, ни нечетной, а также не является периодической. Ее график пересекает ось ординат в точке $y=1$. Ось Ox график функции не пересекает. Вертикальных асимптот нет. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, то прямая $y=x$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$. При $x\to-\infty$ наклонной асимптоты не существует, так как $\frac{f(x)}{x}\to-\infty$ при $x\to-\infty$. Найдем производную

$$f'(x)=1-e^{-x}.$$

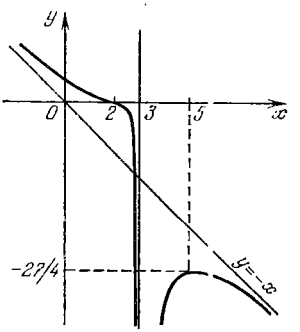


Рис. 339.

Точка $x=0$ является критической точкой, в ней производная обращается в нуль. Легко видеть, что $f'(x)<0$ при $x<0$ и $f'(x)>0$ при $x>0$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на бесконечном промежутке $]-\infty; 0[$ и возрастает на $]0; +\infty[$. Отсюда следует, что в точке $x=0$ функция имеет минимум. График функции $f(x)$ изображен на рис. 340.

в) Функция $f(x)=\frac{6\sin x}{2+\cos x}$ определена для всех $x\in\mathbb{R}$. Она является нечетной функцией и периодической с периодом 2π. Поэтому достаточно построить ее график на отрезке $[0; \pi]$. Так как $2+\cos x\geqslant 1$, то вертикальных асимптот данная функция не имеет. Найдем производную

$$f'(x)=6\,\frac{\cos x\,(2+\cos x)-\sin x\,(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=6\,\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

Точки $x=2\pi n\pm\frac{2}{3}\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, являются критическими точками. Отрезку $[0; \pi]$ принадлежит точка $x=2\pi/3$. На интервале $]0; 2\pi/3[$ производная положительна, следовательно, функция $f(x)$ возрастает. На интервале $]2\pi/3; \pi[$ производная отрицательна, следовательно, функция $f(x)$ убывает. Поэтому точка $x=2\pi/3$

является точкой максимума. График функции $f(x)$ изображен на рис. 341. Заметим, что во всех точках вида $x=2\pi n+\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$, функция $f(x)$ имеет максимумы, а во всех точках вида $x=2\pi n-\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$, — минимумы.

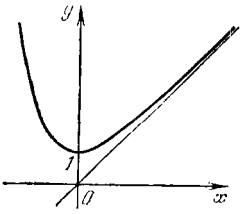


Рис. 340.

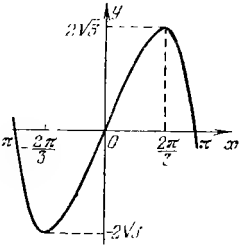


Рис. 341.

6. Функция $f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1$ определена для $x>2$. Найдем ее производную

$$f'(x)=\frac{2}{x-2}-2x+4=\frac{2(x-1)(3-x)}{x-2}.$$

Точка $x=3$ является критической точкой данной функции. На интервале $]2;\,3[$ производная $f'(x)$ положительна, следовательно, на этом интервале функция возрастает. А на бесконечном промежутке $]3;\,+\infty[$ производная $f'(x)$ отрицательна, следовательно, здесь функция $f(x)$ убывает. Точка $x=3$ является точкой максимума.

7. Функция $f(x)$ определена и имеет производную для всех $x\in\mathbb{R}$. Находим производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Функция $f(x)$ имеет две критические точки $x=2$ и $x=3$. Обе точки принадлежат отрезку $[1;\,4]$. Следовательно,

$$\min_{x\in[1;\,4]} f(x)=\min\{f(1),\,f(2),\,f(3),\,f(4)\}=$$

$$=\min\left\{\frac{23}{6},\ \frac{28}{6},\ \frac{27}{6},\ \frac{32}{6}\right\}=\frac{23}{6},$$

$$\max_{x\in[1;\,4]} f(x)=\max\{f(1),\,f(2),\,f(3),\,f(4)\}=\frac{32}{6}.$$

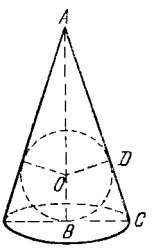


Рис. 342.

Ответ: Наибольшее значение равно 32/6, а наименьшее равно 23/6.

8. Пусть некоторый конус описан около данного шара радиуса R (рис. 342). Очевидно, что центр шара O лежит на высоте конуса AB. Обозначим через r радиус основания конуса и через h его высоту. Тогда объем конуса V равен $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Легко доказать, что $|BC|=|CD|$, т. е. $|CD|=r$. Из подобия треугольников ABC и AOD следует, что

$$\frac{|BC|}{|OD|}=\frac{|AB|}{|AD|},\quad \text{т. е.}\quad \frac{r}{R}=\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}-r}.$$

Отсюда получаем

$$r\sqrt{r^2+h^2}=r^2+hR,$$
$$r^2(r^2+h^2)=(r^2+hR)^2,$$

и, наконец,

$$r^2=\frac{hR^2}{h-2R}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}\,\frac{\pi R^2h^2}{h-2R}.$$

Найдем минимум функции $V(h)$. Вычислим производную

$$V'(h)=\frac{1}{3}\pi R^2\,\frac{2h^2-4Rh-h^2}{(h-2R)^2}=\frac{1}{3}\pi R^2\,\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2}.$$

Производная $V'(h)$ обращается в нуль при $h=4R$, причем при прохождении через точку $h=4R$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $h=4R$ функция $V(h)$ имеет минимум. Наименьшее значение объема равно

$$V(4R)=\frac{1}{3}\pi R^2\,\frac{16R^2}{2R}=\frac{8}{3}\pi R^3.$$

ГЛАВА VII

1. $\triangle BOC\sim\triangle AOD$ (рис. 343), поэтому $\frac{|OC|}{|AO|}=\frac{|BC|}{|AD|}=n$, откуда, учитывая, что $|AC|=|AO|+|OC|$, находим $|AO|=\frac{1}{1+n}|AC|$. Далее $\vec{AO}\uparrow\uparrow\vec{AC}$, поэтому $\vec{AO}=\frac{1}{1+n}\vec{AC}$, $\vec{BC}\uparrow\uparrow\vec{AD}$, $|BC|=n\cdot|AD|$, следовательно, $\vec{BC}=n\vec{AD}$, а так как $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$, то окончательно имеем

$$\vec{AO}=\frac{1}{1+n}(\vec{AB}+n\vec{AD}).$$

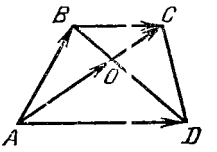


Рис. 343.

2. Используя признак коллинеарности, можем записать $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{c}$, и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=y\boldsymbol{a}$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, следовательно, $y\neq 0$ и $\boldsymbol{a}=\frac{1}{y}\boldsymbol{b}+\frac{1}{y}\boldsymbol{c}$. Подставляя это в первое равенство, получаем $\left(1+\frac{1}{y}\right)\boldsymbol{b}=\left(x-\frac{1}{y}\right)\boldsymbol{c}$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не нулевые и неколлинеарные, поэтому последнее равенство может выполняться лишь при условии $1+\frac{1}{y}=0$ и $x-\frac{1}{y}=0$. Тогда $y=-1$, $x=-1$ и легко находим $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

3. Пусть D — середина ребра OA тетраэдра $OABC$ (рис. 344). Имеем $\vec{BC}=\vec{DC}-\vec{DB}$, $\vec{MN}=\vec{DN}-\vec{DM}$. Так как $\vec{DN}\uparrow\uparrow\vec{DC}$ и $\vec{DM}\uparrow\uparrow\vec{DB}$ и, кроме того, по свойству медиан

$$\frac{|DN|}{|DC|}=\frac{1}{3}\quad\text{и}\quad\frac{|DM|}{|DB|}=\frac{1}{3},$$

то $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

По признаку коллинеарности вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$ и

$$|\overrightarrow{MN}|:|\overrightarrow{BC}|=1/3.$$

4. Пусть $m=|AM|:|AB|$, тогда (рис. 345)

$$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BC}\quad\text{и}\quad \overrightarrow{MB}=(1-m)\overrightarrow{AB}.$$

Находим $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=(1-m)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}$. По условию также $\overrightarrow{PC}=m\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{QD}=m\overrightarrow{AD}$, поэтому

$$\overrightarrow{DP}=(1-m)\overrightarrow{DC}\quad\text{и}\quad \overrightarrow{QP}=(1-m)\overrightarrow{DC}+m\overrightarrow{AD}.$$

$ABCD$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Сравнивая выражения для векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{QP}$, устанавливаем, что $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$. Из этого равенства следует, что $|MN|=|QP|$ и $MN\parallel QP$. Таким образом, в четырехугольнике $MNPQ$ противоположные стороны равны по длине и параллельны, и потому $MNPQ$ — параллелограмм.

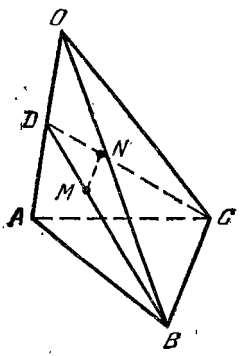


Рис. 344.

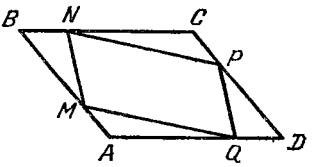


Рис. 345.

5. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы. По признаку коллинеарности (§ 4) существует такое число α, что $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$. Тогда при $x=\alpha$ и $y=-1$ выполняется равенство

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \qquad (1)$$

Достаточность. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые векторы, для которых выполняется равенство (1), причем x и y одновременно не равны нулю. Если, например, $x\neq 0$, то из (1) получаем $\boldsymbol{a}=-\frac{y}{x}\boldsymbol{b}$, откуда (по признаку коллинеарности) следует, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Аналогично рассматривается случай $y\neq 0$.

6. Пусть $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, тогда $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$. Так как $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$, то из равенства $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ следует $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.

7. Складывая почленно равенства

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,$$

получим

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2.$$

Отсюда, зная, что $|\boldsymbol{a}|=11$, $|\boldsymbol{b}|=23$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=30$, находим $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$.

8. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0, \quad (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0.$$

Используя свойства скалярного произведения, отсюда получим

$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0, \quad 7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0.$$

Исключая из этих равенств $|\boldsymbol{a}|^2$, находим $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2/2$, а подставляя это в первое равенство, получаем $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. Так как $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, то из условия $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2/2$ при $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ находим $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1/2$. Следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 60°.

9. Из равенства

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$

при условии $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ и $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$ получаем

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-3/2.$$

10. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, очевидно, не коллинеарны. Вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, может быть разложен по этим векторам: $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. Это векторное равенство равносильно системе трех скалярных равенств:

$$m=x+3y, \quad 0=-x+y, \quad 2=2x.$$

Находим: $x=1$, $y=1$, $m=4$.

11. Вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, поэтому $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$ и $|\boldsymbol{b}|=|m|\,|\boldsymbol{a}|$. Так как $|\boldsymbol{b}|=3$ и $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$, то $|m|=2$. Если $m=2$, то $\boldsymbol{b}=(2;\ 2;\ -1)$, а если $m=-2$, то $\boldsymbol{b}=(-2;\ -2;\ 1)$. Пусть $\boldsymbol{b}=(x;\ y;\ z)$, тогда $\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{k}})=z/|\boldsymbol{b}|$. Если угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{k}$ острый, то косинус этого угла положителен и координата z вектора $\boldsymbol{b}$ также положительна. Таким образом, $\boldsymbol{b}=(-2;\ -2;\ 1)$.

12. Пусть $\boldsymbol{p}=(x;\ y;\ z)$. Вектор $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, следовательно, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=0$ и $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=0$. Выражая скалярные произведения через координаты, получим

$$x+y+z=0 \quad \text{и} \quad x+3y-z=0,$$

откуда находим, что $z=y$ и $x=-2y$. Вектор $\boldsymbol{p}$ единичный, следовательно, $x^2+y^2+z^2=6y^2=1$. Угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{j}$ тупой, косинус этого угла отрицательный, а так как $\cos(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{j}})=y$, то $y<0$. Итак, $y=-1/\sqrt{6}$ и $\boldsymbol{p}=(2/\sqrt{6};\ -1/\sqrt{6};\ -1/\sqrt{6})$.

13. Вектор $\boldsymbol{b}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, следовательно, может быть разложен по этим векторам: $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. Так как $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. Записывая скалярное произведение через координаты векторов, получаем $4x-3y=0$, т. е. $y=\frac{4}{3}x$. Длина вектора $\boldsymbol{a}$ равна $\sqrt{4^2+3^2+5^2}=\sqrt{50}$ и равна длине

вектора $\boldsymbol{b}$, поэтому $x^2+y^2=50$, откуда, поскольку $y=\frac{4}{3}x$, получаем $x^2=18$, $x=\pm 3\sqrt{2}$. Таким образом, $\boldsymbol{b}=\pm(3\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$.

14. Если точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит оси ординат, то $x=z=0$. Итак, точка M имеет координаты $(0;\ y;\ 0)$, поэтому $|AM|=\sqrt{2^2+(y+1)^2+1^2}$ и $|BM|=\sqrt{(y-1)^2+3^2}$. Из условия $|AM|=|BM|$ получаем $(y+1)^2+5=(y-1)^2+9$, откуда находим $y=1$ и $M(0;\ 1;\ 0)$.

15. Пусть $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Если вектор $\overrightarrow{OC}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{OB}$ и $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|$, то вектор $\overrightarrow{OD}$ является диагональю ромба $OADC$ и делит угол AOB пополам. Так как $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=15$, то, очевидно, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}/3=(14/3;\ 2/3;\ -5/3)$, тогда $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(2/3;\ 2/3;\ 4/3)$. Искомый вектор $\boldsymbol{d}$ сонаправлен $\overrightarrow{OD}$, поэтому $\boldsymbol{d}=x\overrightarrow{OD}$, $x>0$. Поскольку $|\overrightarrow{OD}|=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, а $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{6}$, то $x=3/2$. Итак, $\boldsymbol{d}=(1;\ 1;\ 2)$.

16. Если A, B, C и D — последовательные вершины параллелограмма, то, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Зная координаты точек A, B и D, находим, $\overrightarrow{AB}=(2;\ -1)$, $\overrightarrow{AD}=(-2;\ -4)$, тогда $\overrightarrow{AC}=(0;\ -5)$ и $|AC|=5$.

17. Пусть O — начало координат, точка N принадлежит отрезку BC, причем $|BN|:|BC|=n$. Тогда (см. пример 2 § 5) $\overrightarrow{ON}=n\cdot\overrightarrow{OC}+(1-n)\overrightarrow{OB}$. Это означает, что координаты точки N следующим образом выражаются через координаты точек $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$:

$$N\left(nx_C+(1-n)x_B;\quad ny_C+(1-n)y_B;\quad nz_C+(1-n)z_B\right).$$

Если N — середина отрезка BC, то $n=1/2$. Координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов. Для данных точек B и C находим $N(-1;5;\ -2)$, тогда

$$|MN|=\sqrt{(1+1)^2+(-1-5)^2+(1+2)^2}=7.$$

В том случае, когда $n=1/3$, координаты точки N таковы: $N(0;\ -3;\ 4)$ и

$$|MN|=\sqrt{1^2+(-3+1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{14}.$$

18. Если плоскость α параллельна плоскости $ax+by+cz+d=0$, то вектор $(a;\ b;\ c)$ перпендикулярен плоскости α. Отсюда следует, что уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ -3;\ 2)$ параллельно плоскости $4x-2y-z+7=0$, имеет вид $4(x-1)-2(y+3)-(z-2)=0$, т. е. $4x-2y-z-8=0$.

19. Если O — начало координат, то вектор $\overrightarrow{OA}=(-1;\ -1;\ 2)$ перпендикулярен данной плоскости и ее уравнение имеет вид $-(x+1)-(y+1)+2(z-2)=0$, т. е. $x+y-2z+6=0$.

20. Пусть точка $B(x_0;\ y_0;\ z_0)$ является основанием перпендикуляра из точки A на плоскость. Точка B лежит в плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$2x_0+2y_0-z_0+3=0. \qquad (1)$$

Вектор $\overrightarrow{AB}=(x_0+2;\ y_0-3;\ z_0+4)$ перпендикулярен плоскости, поэтому он коллинеарен вектору $n=(2;\ 2;\ -1)$, т. е. координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{n}$ про-

порциональны:

$$\frac{x_0+2}{2}=\frac{y_0-3}{2}=\frac{z_0+4}{-1}.$$

Отсюда получаем $y_0=x_0+5$, $z_0=-\frac{1}{2}x_0-5$. Подставляя эти выражения в (1), находим $x_0=-4$, тогда $y_0=1$ и $z_0=-3$. Итак, $\overrightarrow{AB}=(-2;\ -2;\ 1)$ и $|AB|=3$.

21. Пусть β_1 и β_2 — соответственно плоскости, проходящие через точки A, B, C и A, B, D. Составляем их уравнения (см. пример 4 § 8 гл. VII); получаем

$$x-2y+z=0 \quad \text{и} \quad x+y-2z=0.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярные этим плоскостям, таковы:

$$\boldsymbol{n}_1=(1;\ -2;\ 1) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{n}_2=(1;\ 1;\ -2).$$

Косинус угла между плоскостями β_1 и β_2 находим по формуле (5) § 8 гл. VII:

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $\alpha=60°$.

ГЛАВА VIII

1.
$$z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}=\frac{1+4i+4i^2-(1-i)(1-2i+i^2)}{(3+2i)(9+12i+4i^2)-(4+4i+i^2)}=$$
$$=\frac{-3+4i+2i(1-i)}{(3+2i)(5+12i)-(3+4i)}=\frac{-1+6i}{-9+46i-(3+4i)}=$$
$$=\frac{-1+6i}{-12+42i}=\frac{1-6i}{6(2-7i)}=\frac{(1-6i)(2+7i)}{6(2-7i)(2+7i)}=\frac{44-5i}{6(4+49)}=\frac{44-5i}{318}.$$

Ответ: $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$.

2. а) Находим последовательно модули и аргументы чисел:

Число	Его модуль	Один из его аргументов
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
$(1+i)^{13}$	$(\sqrt{2})^{13}$	$13\pi/4$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
$(1-i)^7$	$(\sqrt{2})^7$	$-7\pi/4$
$\frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$	$(\sqrt{2})^6=8$	$\frac{13\pi}{4}-\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=5\pi$

Ответ: Модуль числа равен 8, аргументы $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Находим модуль:

$$r=\sqrt{(\sin(6\pi/5))^2+(1+\cos(6\pi/5))^2}=\sqrt{2+2\cos(6\pi/5)}=2\sqrt{(\cos(3\pi/5))^2}=$$
$$=2|\cos(3\pi/5)|=-2\cos(3\pi/5).$$

Аргументы φ данного комплексного числа обязаны удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1+\cos(6\pi/5)}{\sin(6\pi/5)} \tag{1}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\cos^2(3\pi/5)}{2\sin(3\pi/5)\cos(3\pi/5)}=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right),$$

откуда $\varphi=-\frac{\pi}{10}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Данное комплексное число расположено в 2-м квадранте, так как $\sin\frac{6\pi}{5}<0$, а $1+\cos\frac{6\pi}{5}>0$. Поэтому аргументами будут те и только те решения уравнения (1), которые лежат во второй четверти, т. е.

$$\varphi=-\frac{\pi}{10}+\pi+2\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $r=-2\cos(3\pi/5)$, $\varphi=\frac{9\pi}{10}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. а) Найдем сначала тригонометрическую форму данного комплексного числа. Запишем в тригонометрической форме число $\sqrt{3}-i$. Так как $|\sqrt{3}-i|=2$, а один из аргументов $\varphi_1=-\pi/6$, то

$$\sqrt{3}-i=2(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)).$$

Следовательно,

$$(\sqrt{3}-i)^{100}=2^{100}(\cos(-100\pi/6)+i\sin(-100\pi/6)),$$

или

$$(\sqrt{3}-i)^{100}=2^{100}(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)).$$

Теперь легко записать данное число и в алгебраической форме:

$$(\sqrt{3}-i)^{100}=2^{100}(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))=$$

$$=2^{100}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{99}-i2^{99}\sqrt{3}.$$

Ответ: $-2^{99}-i2^{99}\sqrt{3}$, $2^{100}(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$.

б) Данное число уже записано в алгебраической форме. Для того чтобы записать его в тригонометрической форме, найдем сначала модуль данного числа:

$$\left|1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right|=\sqrt{\left(1+\cos\frac{10\pi}{9}\right)^2+\left(\sin\frac{10\pi}{9}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2+2\cos\frac{10\pi}{9}}=2\sqrt{\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right)^2}=2\left|\cos\frac{5\pi}{9}\right|=-2\cos\frac{5\pi}{9}.$$

Для определения аргумента решим уравнение

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(10\pi/9)}{1+\cos(10\pi/9)}.$$

Преобразуя правую часть, получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(10\pi/9)}{1+\cos(10\pi/9)}=\frac{2\sin(5\pi/9)\cos(5\pi/9)}{2\cos^2(5\pi/9)}=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9},$$

откуда $\varphi=\frac{5\pi}{9}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Так как $1+\cos(10\pi/9)>0$, а $\sin(10\pi/9)<0$,

то число расположено в четвертом квадранте комплексной плоскости и одним из его аргументов является $\varphi_1 = 14\pi/9$.

Ответ: $1+\cos(10\pi/9)+i\sin(10\pi/9)$,

$-2\cos(5\pi/9)(\cos(14\pi/9)+i\sin(14\pi/9))$.

4. Находим модуль комплексного числа $\operatorname{tg} 1 - i$:

$$|\operatorname{tg} 1 - i| = \sqrt{\operatorname{tg}^2 1 + 1} = 1/\cos 1.$$

Аргументы φ числа $\operatorname{tg} 1 - i$ удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\operatorname{tg} 1.$$

Решая это уравнение, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\operatorname{tg} 1 = -\operatorname{ctg} 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+1\right),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}+1+\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Число $\operatorname{tg} 1 - i$ расположено в четвертом квадранте комплексной плоскости, поэтому

$$\varphi = \frac{\pi}{2}+1+\pi+2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь можем записать число $\operatorname{tg} 1 - i$ в тригонометрической форме:

$$\operatorname{tg} 1 - i = \frac{1}{\cos 1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)\right).$$

Применяя формулу (1) § 6, имеем окончательно

$$(\operatorname{tg} 1 - i)^4 = \frac{1}{\cos^4 1}(\cos 4 + i\sin 4).$$

Ответ: $z = \dfrac{1}{\cos^4 1}(\cos 4 + i\sin 4)$.

5. Запишем z в алгебраической форме:

$$z = x + iy.$$

Тогда уравнение можно переписать так:

$$(x+iy)^2 + x^2 + y^2 = 0$$

или

$$x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю и действительная и мнимая части его, поэтому

$$2x^2 = 0, \quad 2xy = 0.$$

Полученная система имеет бесчисленное множество решений $(0; b)$, где b — произвольное действительное число. Отсюда следует, что множество решений исходного уравнения — бесконечное множество. Оно состоит из всех комплексных чисел, соответствующих точкам комплексной плоскости, лежащим на мнимой оси.

Ответ: $z = bi$ (b — произвольное действительное число).

6. а) Условию $|z+1| = |z-i|$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые одинаково удалены от точек $z_1 = -1$ и $z_2 = i$. Множеством точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2, является прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину. На рис. 346 изображена прямая l, дающая искомое множество.

б) Положим $z=x+iy$, тогда заданное условие примет следующий вид:

$$x^2+y^2+3(x+iy)+3(x-iy)=0,$$
$$x^2+6x+y^2=0,$$
$$(x+3)^2+y^2=9.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(-3;\ 0)$, радиус которой равен 3 (рис. 347).

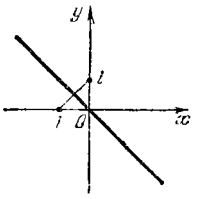


Рис. 346.

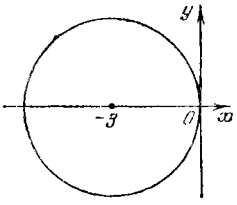


Рис. 347.

в) Данное неравенство равносильно неравенствам

$$2\pi k<|z|<\pi+2\pi k,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Искомое множество точек (на рис. 348 оно заштриховано) представляет собой бесконечную систему концентрических колец с центром в точке $z=0$. Сама точка $z=0$ не принадлежит множеству.

7. Чтобы получить какой-нибудь вектор, идущий по биссектрисе, достаточно сложить два любых вектора одинаковой длины, имеющих направление векторов z_1 и z_2 (рис. 349). Так как длина вектора z_1 в два раза больше длины вектора z_2, то векторы $z_1/2$ и z_2 будут иметь одну и ту же длину, поэтому вектор, равный их сумме:

$$\frac{1}{2}z_1+z_2=\frac{6+8i}{2}+4-3i=7+i,$$

лежит на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2. Вся совокупность

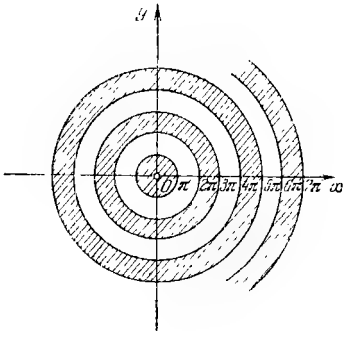


Рис. 348.

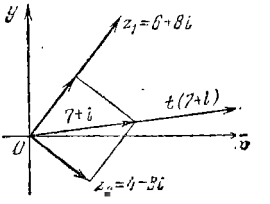


Рис. 349.

векторов, удовлетворяющих поставленному условию, дается, очевидно, формулой $t(7+i)$, где t — произвольное положительное число.

Ответ: $7t+it$, t — произвольное положительное число.

8. Комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3},$$

расположены на окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке $z=-3+\sqrt{3}i$ (рис. 350). Чтобы найти точку окружности с наименьшим положительным аргументом, проведем касательную $[OT)$ к окружности. Точка касания P, очевидно, будет обладать нужным свойством. Из прямоугольного треугольника OPE (угол $\widehat{EOP}=60°$, $|OP|=3$) найдем

$$|PE|=|OP|\sin\widehat{EOP}=3\sqrt{3}/2,$$

$$|OE|=|OP|\cos\widehat{EOP}=3/2.$$

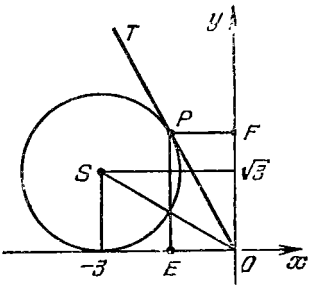


Рис. 350.

Ответ: Наименьший положительный аргумент имеет число

$$z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

9. Задача сводится к нахождению всех значений $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$. Запишем число $w=-8-8\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$|w|=\sqrt{64+3\cdot 64}=16,$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},\qquad \varphi_1=240°,$$
$$w=16(\cos 240°+i\sin 240°).$$

Применяя формулу (2) § 6 для отыскания всех значений $\sqrt[n]{w}$, получим

$$z_k=2(\cos(60°+90°k)+i\sin(60°+90°k)),\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

$$z_0=2(\cos 60°+i\sin 60°),$$
$$z_1=2(\cos 150°+i\sin 150°),$$
$$z_2=2(\cos 240°+i\sin 240°),$$
$$z_3=2(\cos 330°+i\sin 330°).$$

Ответ: $1+i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}+i$, $-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$.

10. Положим $\sqrt{5+12i}=x+iy$, тогда

$$5+12i=x^2+2xyi-y^2$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$x^2-y^2=5,\qquad xy=6.$$

Решая систему, получим два решения (3; 2) и $(-3;\ -2)$. По условию действительная часть $\sqrt{5+12i}$ отрицательна. Таким образом, $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Теперь легко получаем

$$\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}=\frac{-3-2i-3+2i}{-3-2i+3-2i}=\frac{-6}{-4i}=-\frac{3}{2}i.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}i$.

11. При делении многочлена степени n на многочлен первой степени в частном получится многочлен степени $n-1$ и в остатке многочлен нулевой

степени. Обозначив частное от деления $P_n(z)$ на $z-z_0$ через $Q_{n-1}(z)$ и остаток через w_0, можем записать тождество

$$P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-z_0)+w_0.$$

Подставив в это тождество $z=z_0$, получим

$$P_n(z_0)=Q_{n-1}(z_0)(z_0-z_0)+w_0,$$

т. е. $w_0=P_n(z_0)$.

ГЛАВА IX

1. Так как $\cos 6x=\cos 5x\cos x-\sin 5x\sin x$, то $\sin 5x\sin x=0$, и поэтому $\sin 5x=0$, $x=\pi k/5$, или $\sin x=0$, $x=\pi l$, где k, $l\in\mathbb{Z}$. Все решения второго уравнения входят в множество решений первого ($k=5l$).

Ответ: $\{\pi k/5\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2. Используя формулы $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$, $\sin^2 4x=1-\cos^2 4x$, приходим к уравнению $\cos^2 4x+\cos 4x-\frac{3}{4}=0$, квадратному относительно $\cos 4x$. Решив его, найдем, что $\cos 4x=-3/2$, $\cos 4x=1/2$. Первое из этих уравнений решений не имеет, второе имеет решения $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Преобразуем уравнение:

$$\sin 5x-\sin x=\sin 2x,\qquad 2\sin 2x\cos 3x=\sin 2x.$$

Отсюда $\sin 2x=0$, $x=\pi k/2$, или $\cos 3x=1/2$, $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Так как $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$, то $3\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x=0$, $\cos x(3\cos 2x+2\sin^2 x)=0$ и, следовательно, $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $3\cos 2x+2\sin^2 x=0$, $\cos 2x=-1/2$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. Преобразуем уравнение:

$$(1+\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0,$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}(1+\cos x-2\sin^2 x)=0.$$

Отсюда $\cos x=0$, $1+\cos x-2\sin^2 x=0$ при условии

$$\sin x\neq 0. \tag{1}$$

Все решения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, первого уравнения удовлетворяют (1). Второе уравнение, используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, приводим к виду $1+\cos x)\times$

$\times(2\cos x-1)=0$. Если $\cos x=-1$, то $\sin x=0$ и условие (1) не выполнено. Если же $\cos x=1/2$, т. е. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то условие (1) выполнено.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. При условии

$$\cos x\neq 0 \tag{1}$$

данное уравнение равносильно уравнению

$$(\sqrt{2}-1)\cdot 2\sin x\cos x+\cos x-\sin x=1.$$

Обозначим $\cos x-\sin x=t$, тогда $2\sin x\cos x=1-t^2$, и, следовательно, $(\sqrt{2}-1)(1-t^2)+t-1=0$, $(1-t)((\sqrt{2}-1)(1+t)-1)=0$, $(1-t)(t-\sqrt{2})=0$, откуда $t=1$ или $t=\sqrt{2}$. Уравнение $\cos x-\sin x=1$ введением вспомогательного угла преобразуем к уравнению $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда находим, что $x=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Если взять верхний знак, то $x=2\pi k$, и условие (1) выполнено, следовательно, $x=2\pi k$ — решения исходного уравнения. Если же взять нижний знак, то $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а $\cos x=0$, т. е. эти значения x посторонние. Решив аналогично уравнение $\cos x-\sin x=\sqrt{2}$, найдем, что $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Эти значения удовлетворяют условию (1) и, следовательно, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{2\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7. Преобразуем уравнение:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=2\frac{\cos 4x}{\sin 4x},$$

$$\frac{\sin 2x\sin x+\cos 2x\cos x}{\cos x\sin 2x}=\frac{\cos 4x}{\sin 2x\cos 2x},$$

$$\frac{\cos x}{\cos x\sin 2x}=\frac{\cos 4x}{\sin 2x\cos 2x}.$$

Сократив левую часть на $\cos x$ и умножив обе части получившегося уравнения на $\sin 2x\cos 2x$, придем к уравнению

$$\cos 2x-\cos 4x=0.$$

Из всех его решений решениями исходного уравнения будут лишь те, для которых

$$\cos x\neq 0,\quad \sin 2x\neq 0,\quad \cos 2x\neq 0,$$

или, что то же,

$$\sin 4x\neq 0. \tag{1}$$

Преобразуем полученное уравнение к виду $2\sin x\sin 3x=0$. Если $\sin x=0$, то и $\sin 4x=0$, т. е. условие (1) не выполнено, и такие значения x решениями исходного уравнения не являются. Если $\sin 3x=0$, то $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Для любого целого k возможны только три случая: $k=3l$, $k=3l+1$ или $k=3l-1$, где $l\in\mathbb{Z}$. Если $k=3l$, то $x=\pi l$ и $\sin 4x=0$; если же $k=3l\pm 1$, то

$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l$ и $\sin 4x = \sin\left(\pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi l\right) = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$. Значит, решениями исходного уравнения являются лишь значения $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l$.

Ответ: $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + \pi l \mid l \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{1 + \sin x} = -\cos x$$

и возведем обе его части в квадрат:

$$1 + \sin x = \cos^2 x. \tag{1}$$

Решениями исходного уравнения будут все те и только те решения уравнения (1), для которых

$$\cos x \leqslant 0. \tag{2}$$

Преобразуем (1): $1 + \sin x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$, или $(1 + \sin x)\sin x = 0$, откуда $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sin x = 0$, $x = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Все значения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ удовлетворяют условию (2) и, следовательно, являются решениями исходного уравнения. Если $x = \pi l$, то $\cos \pi l = (-1)^l$ и видно, что условие (2) выполнено лишь при нечетных $l = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$. Значит, из рассматриваемых значений x решениями исходного уравнения будут лишь $x = \pi(2m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \pi(2k + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

9. Так как

$$\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x = (\cos x - \cos 3x) - 2\sin 2x =$$
$$= 2\sin x \sin 2x - 2\sin 2x = 2\sin 2x\,(\sin x - 1),$$

а

$$1 - 2\sin x - \cos 2x = (1 - \cos 2x) - 2\sin x =$$
$$= 2\sin^2 x - 2\sin x = 2\sin x\,(\sin x - 1),$$

то

$$|\sin 2x|\,(\sin x - 1) = \sin x\,(\sin x - 1).$$

Отсюда, учитывая, что $\sin x - 1 = -(\sin x - 1)$ (так как $\sin x - 1 \leqslant 0$), получаем, что

$$-2|\sin x|\,|\cos x|\,(\sin x - 1) = \sin x\,(\sin x - 1),$$

и значит, $\sin x - 1 = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или

$$2|\sin x|\,|\cos x| = -\sin x.$$

Решим последнее уравнение. Если $\sin x \geqslant 0$, то $|\sin x| = \sin x$, и значит,

$$2\sin x\,|\cos x| = -\sin x,$$
$$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad 2|\cos x| = -1$$

— это уравнение решений не имеет. Если $\sin x < 0$, то $|\sin x| = -\sin x$, поэтому

$$2\sin x\,|\cos x| = \sin x,$$

Так как $\sin x \neq 0$ ($\sin x < 0$), то $|\cos x| = 1/2$, откуда $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из найденных значений x следует отобрать лишь те, для которых $\sin x < 0$. В первом случае имеем $\sin\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \pm \sqrt{3}/2$, значит, нужно взять лишь значения, соответствующие нижнему знаку, т. е. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Во втором случае также следует взять лишь значения, соответствующие нижнему знаку, т. е. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

10. Функция $\arccos y$ является обратной к функции $y = \cos x$, для которой за область определения принят отрезок $[0; \pi]$. Значит, для любого $x \in [0; \pi]$

$$\arccos(\cos x) = x$$

и для любого $y \in [-1; 1]$

$$\cos(\arccos y) = y.$$

Обозначим $\arccos a = \alpha$, тогда $\cos\alpha = a$. Поскольку $\alpha \in [0; \pi]$, то и $\pi - \alpha \in [0; \pi]$. Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -a$, получаем

$$\arccos(-a) = \arccos(\cos(\pi - \alpha)) = \pi - \alpha = \pi - \arccos a,$$

т. е. $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$, что и требовалось доказать.

11. Поскольку

$$\int_0^x (t^2 - 8t + 13)\,dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - 8 \cdot \frac{t^2}{2} + 13t\right)\Big|_0^x = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 13x,$$

то $\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 13x = x \sin \frac{a}{x}$. Отсюда, учитывая, что $x \neq 0$ (при $x = 0$ правая часть уравнения не определена), получаем уравнение

$$\frac{x^2}{3} - 4x + 13 = \sin \frac{a}{x}, \tag{1}$$

равносильное исходному. В левой части выделим полный квадрат:

$$\frac{x^2}{3} - 4x + 13 = \frac{1}{3}(x^2 - 12x + 36 + 3) = \frac{1}{3}(x-6)^2 + 1.$$

Теперь видно, что $\frac{x^2}{3} - 4x + 13 \geqslant 1$ для всех x. В то же время $\sin(a/x) \leqslant 1$, значит, равенство (1) возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x-6)^2 + 1 = 1, \\ \sin(a/x) = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = 6$, $\sin(a/6) = 1$. Последнее имеет место только, если $\frac{a}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $a = 3(1 + 4k)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, исходное урав-

нение имеет решение только для $a=3(1+4k)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, и его решением является $x=6$.

Ответ: $a=3(1+4k)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=6$.

12. Из второго уравнения получаем

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)=0,$$

$$2\sin\left(\frac{x}{2}+y-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-y+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

и, следовательно, $\sin\left(\frac{x}{2}+y-\frac{\pi}{4}\right)=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}-2y+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\cos\left(\frac{x}{2}-y+\frac{\pi}{4}\right)=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+2y+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Подставляя значения $x=\frac{\pi}{2}-2y+2\pi k$ в первое уравнение и учитывая, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2y+2\pi k\right)=\operatorname{ctg}2y$, получаем

$$\operatorname{ctg}2y=\operatorname{tg}^3 y.$$

Выразив $\operatorname{ctg}2y$ через $\operatorname{tg}y$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2 y-1}{2\operatorname{tg}y}=\operatorname{tg}^3 y,\qquad 2\operatorname{tg}^4 y-\operatorname{tg}^2 y+1=0.$$

Это квадратное относительно $\operatorname{tg}^2 y$ уравнение решений не имеет.

Подстановка в первое уравнение значений $x=\frac{\pi}{2}+2y+2\pi k$ дает аналогично

$$-\operatorname{ctg}2y=\operatorname{tg}^3 y,\qquad 2\operatorname{tg}^4 y+\operatorname{tg}^2 y-1=0,$$

откуда $\operatorname{tg}^2 y=-1$ или $\operatorname{tg}^2 y=1/2$. Очевидно, решения имеет только второе уравнение, и $y=\pm\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $x=\frac{\pi}{2}\pm$ $\pm 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi(l+k)$, l, $k\in\mathbb{Z}$. Заметим, что каково бы ни было l сумма $l+k$ в силу произвольности k может быть равна любому целому числу m. Другими словами, каждому из значений $y=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi l$ соответствуют все значения $x=\frac{\pi}{2}\pm 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}\pm 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi m;\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi l\mid m,\ l\in\mathbb{Z}\right\}$.

13. Сложив почленно уравнения системы, получим

$$2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+\cos 2x+\cos 2y=0,$$

откуда $2\cos(x-y)+2\cos(x+y)\cos(x-y)=0$,

$$\cos(x-y)(1+\cos(x+y))=0.$$

Это уравнение вместе с любым из уравнений исходной системы, например с первым, составляет систему

$$\begin{cases}2\sin x\sin y+\cos 2y-\sqrt{2}=0,\\ \cos(x-y)(1+\cos(x+y))=0,\end{cases}\qquad(1)$$

равносильную исходной системе. Из второго уравнения системы (1) следует, что

$$\cos(x-y)=0, \quad x=\frac{\pi}{2}+y+\pi k,$$

или

$$\cos(x+y)=-1, \quad x=\pi-y+2\pi k, \text{ где } k\in\mathbb{Z}.$$

Подстановка $x=\frac{\pi}{2}+y+\pi k$ в первое уравнение системы (1) дает

$$(-1)^k 2\cos y\sin y+\cos 2y-\sqrt{2}=0, \quad \cos 2y+(-1)^k\sin 2y=\sqrt{2}.$$

Вводя вспомогательный угол, получим $\cos\left(2y-(-1)^k\frac{\pi}{4}\right)=1$, откуда $y=$ $=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, и значит,

$$x=\frac{\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{8}+\pi(k+l), \qquad k,\ l\in\mathbb{Z}.$$

Подстановка $x=\pi-y+2\pi k$ в первое уравнение системы (1) дает $2\sin^2 y+$ $+\cos 2y-\sqrt{2}=0$,

$$1-\cos 2y+\cos 2y-\sqrt{2}=0, \quad 1-\sqrt{2}=0,$$

что невозможно.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{8}+\pi(k+l);\ (-1)^k\frac{\pi}{8}+\pi l\right)\middle|\ k,\ l\in\mathbb{Z}\right\}$.

14. После замены $x+\frac{\pi}{4}=s$, $y+\frac{\pi}{4}=t$ система будет иметь вид

$$\begin{cases}\operatorname{tg} s=\sin 2t,\\ \sin 2s=\operatorname{tg} t.\end{cases} \tag{1}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим

$$\operatorname{tg} s\sin 2s=\operatorname{tg} t\sin 2t, \quad 2\sin^2 s=2\sin^2 t,$$
$$1-\cos 2s=1-\cos 2t, \quad \cos 2t-\cos 2s=0,$$
$$\sin(s-t)\sin(s+t)=0,$$

откуда $\sin(s-t)=0$, $s=t+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin(s+t)=0$, $s=-t+\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. Подстановка $s=t+\pi k$ в систему (1) приводит к одному уравнению $\operatorname{tg} t=\sin 2t$, которое имеет решения: $t=\pi m$, $t=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, где $m\in\mathbb{Z}$. По формуле $s=$ $=t+\pi k$ находим соответственно $s=\pi(m+k)$, $s=\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{m}{2}+k\right)$, $m,\ k\in\mathbb{Z}$. Множество значений $s=\pi(m+k)$, $k\in\mathbb{Z}$, соответствующее $t=\pi m$, по тем же соображениям, что и в примере 12, можно записать в виде $s=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Подставив $s=-t+\pi l$ в систему (1), аналогично найдем, что $t=\pi m$ и, значит, $s=(l-m)\pi$, $l,\ m\in\mathbb{Z}$. При любом m разность $l-m$ может быть любым целым числом в силу произвольности l, поэтому множество значений s, соответствующих $t=\pi m$, можно записать в виде $s=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Видно, что это множество значений s и t содержится в ранее найденном. Теперь находим

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, & y=-\frac{\pi}{4}+\pi m, \qquad m,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\pi\left(\frac{m}{2}+k\right), & y=\frac{\pi m}{2}, \qquad m,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{2}$$

Ответ: Решение системы дается формулами (2).

15. Данное неравенство легко сводится к квадратному неравенству

$$2\sin^2 x+\sin x-1\geqslant 0$$

относительно $\sin x$. Решив его, получим

$$\sin x\leqslant -1 \quad \text{или} \quad \sin x\geqslant 1/2.$$

Первое неравенство сводится к уравнению $\sin x=-1$ с решениями $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Множеством решений второго неравенства является объединение отрезков $\frac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

16. Выразив $\operatorname{tg}2x$ через $\operatorname{tg}x$, преобразуем неравенство

$$\frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}-3\operatorname{tg}x\leqslant 0, \qquad \frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}(1+3\operatorname{tg}^2 x)\leqslant 0.$$

Поскольку $1+3\operatorname{tg}^2 x>0$, то

$$\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\leqslant 0.$$

Это неравенство, очевидно, равносильно исходному. Решив его относительно $\operatorname{tg}x$, получим $-1<\operatorname{tg}x\leqslant 0$ и $1<\operatorname{tg}x$. Отсюда соответственно находим, что $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x\leqslant\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x\leqslant\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

17. Построим графики функций $\sin x$ и $|\cos x|$ (рис. 351) и обратимся к ним для наглядной иллюстрации рассуждений. На отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ $\sin x\leqslant 0$, а $|\cos x|\geqslant 0$, причем $|\cos x|=0$ только при $x=3\pi/2$, и в этом случае $\sin x=-1$. Значит, все числа из отрезка $[\pi;\ 2\pi]$ удовлетворяют данному неравенству. На отрезке $[\pi/2;\ \pi]$ $|\cos x=-\cos x$, и уравнение $\sin x=-\cos x$ имеет одно решение $x=3\pi/4$. Поскольку на этом отрезке $\sin x$ монотонно убывает,

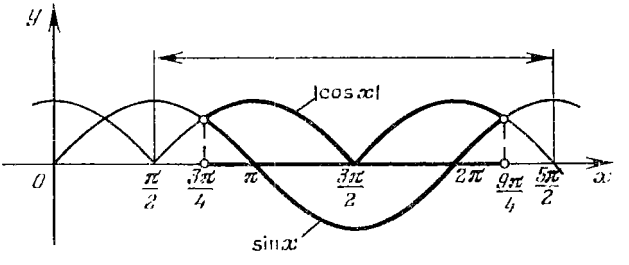


Рис. 351.

а $|\cos x|$ монотонно возрастает, то все числа из промежутка $[3\pi/4;\ \pi]$ удовлетворяют неравенству $\sin x<|\cos x|$. На отрезке $[2\pi;\ 5\pi/2]$ $|\cos x|=\cos x$, уравнение $\sin x=\cos x$ имеет одно решение $9\pi/4$. Здесь функция $\sin x$ возрастает, а $\cos x$ убывает, поэтому все числа из промежутка $[2\pi;\ 9\pi/4]$ удовлетворяют неравенству $\sin x<|\cos x|$. Таким образом, на отрезке $[\pi/2;\ 5\pi/2]$ длины 2π

все решения исходного неравенства составляют интервал $]3\pi/4;\ 9\pi/4[$. Поскольку 2π — общий период функций $\sin x$ и $\cos x$, множество всех решений данного неравенства является объединением интервалов $\left]\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right[$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ГЛАВА X

1. Перейдя к основанию 2, после очевидных преобразований получим уравнение

$$2^{2x}-3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}-4\cdot 2^{2\sqrt{x}}=0,$$

которое является однородным степени 2 относительно 2^x и $2^{\sqrt{x}}$. Разделив на $2^{2\sqrt{x}}$ и обозначив $t=2^{x-\sqrt{x}}$, получим квадратное уравнение $t^2-3t-4=0$, которое имеет корни -1 и 4. Уравнение $2^{x-\sqrt{x}}=-1$ решений не имеет. Уравнение $2^{x-\sqrt{x}}=4$ сводится к уравнению $x-\sqrt{x}=2$, квадратному относительно $\sqrt{x}$. Его корни 2 и -1, но поскольку $\sqrt{x}\geqslant 0$, то $\sqrt{x}=2$ откуда $x=4$.

Ответ: 4.

2. Логарифмируя по основанию 5 (обе части уравнения положительны), получаем уравнение

$$\log_5(8x)\cdot\log_5 x=\log_5 16+\frac{4}{3}\log_5 x,$$

равносильное исходному. Преобразуем его к виду $\log_5^2 x+\left(3\log_5 2-\frac{4}{3}\right)\log_5 x-4\log_5 2=0$, и решив это квадратное относительно $\log_5 x$ уравнение, найдем, что $\log_5 x=4/3$, $x=5^{4/3}$; $\log_5 x=-3\log_5 2$, $x=1/8$.

Ответ: $5^{4/3}$, $1/8$.

3. Потенцируя, получаем уравнение

$$1+\cos x=2\sin^2 x,$$

преобразуя которое, находим $1+\cos x=2(1+\cos x)(1-\cos x)$, $(1+\cos x)\times(2\cos x-1)=0$. Следовательно, $\cos x=-1$, $x=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$; со $x=1/2$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Значения $x=\pi(1+2n)$ и $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ не удовлетворяют условию $\sin x>0$. Значения же $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, как легко проверить, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

4. Переходим к основанию 3:

$$1-\frac{1}{2}\log_3(x+1)^2=\log_3\frac{x+5}{x+3};$$

учитывая, что $\log_3 (x+1)^2 = 2\log_3 |x+1|$, получаем уравнение

$$1 - \log_3 |x+1| = \log_3 \frac{x+5}{x+3}.$$

Отсюда

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{x+5}{x+3}. \qquad (1)$$

Поскольку левая часть этого уравнения положительна, то выполнив обратные преобразования, получим, что уравнение (1) равносильно исходному уравнению. Решаем (1). Имеем $3(x+3) = |x+1| \cdot (x+5)$, и если $x+1 \geqslant 0$, то $x^2 + 3x - 4 = 0$, откуда $x = 1$, $x = -4$, причем условию $x+1 > 0$ удовлетворяет лишь $x = 1$; если $x+1 < 0$, то $x^2 + 9x + 14 = 0$, откуда $x = -2$, $x = -7$, и оба эти значения удовлетворяют условию $x+1 < 0$.

Ответ: 1; -2; -7.

5. Перейдя к основанию 10, получим

$$\frac{2}{\lg (0{,}5 + \cos^2 x)} = \frac{1}{\lg \sin 2x},$$

откуда

$$\lg \sin^2 2x = \lg (0{,}5 + \cos^2 x), \qquad \sin^2 2x = 0{,}5 + \cos^2 x,$$
$$1 - \cos^2 2x = 1 + 0{,}5 \cos 2x, \qquad \cos 2x (\cos 2x + 0{,}5) = 0.$$

а) $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и в этом случае $\sin 2x = (-1)^n$, т. е. правая часть исходного уравнения не определена.

б) $\cos 2x = -0{,}5$, $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. Значения $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$ не удовлетворяют условию $\sin 2x > 0$, значения же $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, как легко проверить, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Перейдя к основанию 2, получим

$$\frac{1}{\log_2 \sin x} + \frac{1}{\log_2 \cos x} + \frac{1}{\log_2 \sin x \cdot \log_2 \cos x} = 0,$$

откуда $\log_2 \cos x + \log_2 \sin x + 1 = 0$, $\log_2 \sin 2x = 0$, $\sin 2x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Проверкой убеждаемся в том, что решениями исходного уравнения будут лишь значения $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ (легко видеть, что достаточно проверить условия $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$).

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Обозначим $t = x - 1$, тогда $x = t + 1$ и $\log_t (t + 1 + a) = 1/2$. Обозначим еще $b = 1 + a$, в результате исходное уравнение примет вид

$$\log_t (t + b) = 1/2. \qquad (1)$$

Потенцируя по основанию t, получим

$$t + b = \sqrt{t}, \qquad (2)$$

Всякое решение (1) является, очевидно, и решением (2). Обратно если t решение (2) и

$$t>0, \quad t\neq 1, \tag{3}$$

то, логарифмируя (2) по основанию t, получим, что (1) — верное равенство.

Решив (2) как квадратное относительно $\sqrt{t}$ уравнение, найдем, что

1) $\sqrt{t}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4b})$, 2) $\sqrt{t}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4b})$.

Ясно, что (2) имеет решения, если только $1-4b\geqslant 0$, т. е. $b\leqslant 1/4$. При этом условии $1+\sqrt{1-4b}\geqslant 1$, поэтому формула 1) определяет решение $t_1=\frac{1}{2}(1-2b+\sqrt{1-4b})$ уравнения (2). Первое из условий (3) для этого решения, очевидно, выполнено. Кроме того, из 1) видно, что равенство $\sqrt{t_1}=1$ (а значит, и $t_1=1$) возможно только при $b=0$. Таким образом, если $t\leqslant 1/4$ и $b\neq 0$, то 1) задает решение t_1 уравнения (1). Рассмотрим формулу 2). Условие $\sqrt{t}>0$ (а значит, и $t>0$ из (3)) выполнено тогда и только тогда, когда $1-\sqrt{1-4b}>0$, откуда $b>0$. При этом $1-\sqrt{1-4b}<1$, а $\sqrt{t}<1/2$ и $t<1/4<1$, т. е. выполнено и второе условие из (3). Значит, формула 2) задает решение $t_2=\frac{1}{2}(1-2b-\sqrt{1-4b})$ уравнения (1), если $0<b\leqslant 1/4$. В итоге получаем, что при $b<0$ уравнение (1) имеет одно решение t_1, а при $0<b\leqslant 1/4$ решениями (1) являются и t_1 и t_2, причем $t_1=t_2$ только при $b=1/4$. Значит, (1) и вместе с ним и исходное уравнение имеют единственное решение только при $b<0$ или $b=1/4$, или что то же, при $a<-1$ или $a=-3/4$.

Ответ: $a<-1$, $a=-3/4$.

8. В первом уравнении перейдем к основанию y:

$$\log_y x+\frac{1}{\log_y x}=2{,}5.$$

После очевидных преобразований придем к уравнению $\log_y^2 x-2{,}5\log_y x+1=0$, откуда $\log_y x=2$, $\log_y x=0{,}5$, и значит, $x=y^2$, $x=\sqrt{y}$. В первом случае из второго уравнения системы находим $y^3=27$, $y=3$, и тогда $x=9$. Во втором случае $y^{1{,}5}=27$, $y=9$, а $x=3$.

Ответ: (3; 9), (9; 3).

9. Обозначим $u=2^{x+y}$, $v=3^{x-y}$, тогда имеем

$$\begin{cases} u^2=27+v^2, \\ u^3-21u=v^3+21v, \end{cases} \quad \begin{cases} u^2-v^2=27, \\ u^3-v^3=21(u+v), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u-v)(u+v)=27, \\ (u-v)(u^2+uv+v^2)=21(u+v). \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы, учитывая, что $u+v>0$, выражаем $u-v=27(u+v)^{-1}$, подставляем во второе уравнение и преобразуем его: $27(u^2+uv+v^2)=21(u+v)^2$, $2u^2-5uv+2v^2=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно u, найдем, что $u=2v$, $u=v/2$. Подстановка в уравнение $u^2-v^2=27$ соответственно дает: $4v^2-v^2=27$, $v=3$ (поскольку $v>0$), и тогда $u=6$; $\frac{1}{4}v^2-v^2=27$, $-\frac{3}{4}v^2=27$, это уравнение решений не имеет.

Таким образом, $2^{x+y}=6$, $3^{x-y}=3$, откуда $x+y=\log_2 6$, $x-y=1$, а $x=\frac{1}{2}\log_2 12=\log_4 12$, $y=\frac{1}{2}\log_2 3=\log_4 3$.

Ответ: $(\log_4 12;\ \log_4 3)$.

10. Логарифмируя по основанию 10, получаем систему

$$\begin{cases} \lg 5\cdot\lg x=\lg 3\cdot\lg y, \\ \lg 3\cdot(\lg 3+\lg x)=\lg 5\cdot(\lg 5+\lg y), \end{cases}$$

равносильную исходной. Из первого уравнения выражаем $\lg y=\frac{\lg 5}{\lg 3}\lg x$, подставляем во второе уравнение и преобразуем его: $\lg 3\cdot(\lg 3+\lg x)=\lg 5\cdot\left(\lg 5+\frac{\lg 5}{\lg 3}\lg x\right)$, $(\lg^2 3-\lg^2 5)(\lg 3+\lg x)=0$, откуда $\lg 3+\lg x=0$, поскольку $\lg^2 3-\lg^2 5\neq 0$. Значит, $x=1/3$, и тогда $\lg y=-\lg 5$, $y=1/5$.

Ответ: $(1/3;\ 1/5)$.

11. Как уже отмечалось, если основание и показатель степени содержат переменную, то здесь всюду рассматриваются лишь такие значения переменной, при которых основание положительно. В данном случае следует рассматривать лишь значения $x>0$, $y>0$. С учетом этого, логарифмируя по основанию 10, получаем систему

$$\begin{cases} y\lg x=x\lg y, \\ x\lg x=9y\lg y, \end{cases}$$

равносильную исходной. Из первого уравнения системы выражаем $\lg y=\frac{y}{x}\lg x$ и подставляем во второе уравнение: $x\lg x=9y\cdot\frac{y}{x}\lg x$, $(x^2-9y^2)\lg x=0$. Отсюда:

1) $\lg x=0$, $x=1$, и тогда $\lg y=0$, $y=1$;

2) $x^2-9y^2=0$, $x=3y$ (так как $x>0$ и $y>0$) и значит, $\lg y=\frac{1}{3}\lg 3y$, $y^3=3y$, $y^2=3$, $y=\sqrt{3}$, и тогда $x=3\sqrt{3}$.

Ответ: $(1;\ 1)$, $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3})$.

12. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_2\dfrac{x^2+y^2}{x}=\log_2\dfrac{x+3y}{2}, \\ \log_2\dfrac{xy+1}{2y^2+y-x+2}=\log_2\dfrac{x}{2y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x}=\dfrac{x+3y}{2}, \\ \dfrac{xy+1}{2y^2+y-x+2}=\dfrac{x}{2y}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2-xy+2y-2x=0. \end{cases} \tag{1}$$

Каждое решение исходной системы будет и решением системы (1), обратное же может быть и неверно. Все решения системы (1) нужно будет проверить подстановкой в исходную систему. Второе уравнение системы (1) запишем в виде $(y-x)(x-2)=0$. Если $x=2$, то из первого уравнения системы (1) получаем, что $y^2-3y+2=0$, откуда $y=2$, $y=1$. Значит, $(2;\ 2)$, $(2;\ 1)$ — решения системы (1). Если $y=x$, то первое уравнение системы (1) является верным

равенством: $x^2-3x^2+2x^2=0$. Значит любая пара чисел вида $(c;\ c)$ также является решением системы (1). Найденное ранее решение (2; 2) содержится в этом множестве.

Проверим, какие из решений (2: 1), $(c;\ c)$, где $c\in\mathbb{R}$, системы 1) являются решениями исходной системы. Легко убедиться подстановкой, что (2; 1) — решение этой системы. Из первого уравнения исходной системы следует, что $x>0$, поэтому нужно рассмотреть лишь пары $(c;\ c)$, где $c>0$. После подстановки получим

$$\begin{cases}\log_2(2c^2)-\log_2 c=\log_2(4c)-1,\\ \log_2\dfrac{c^2+1}{2c^2+2}=-1,\end{cases}$$

и легко видеть, что для $c>0$ эти равенства верны. Значит, все пары вида $(c;\ c)$, где $c>0$, также являются решениями исходной системы.

Ответ: (2; 1), $(c;\ c)$, где $c>0$.

13. Умножив почленно первое уравнение системы на $2^{-x+y}\cdot 3^{2y}$, получим $3^{2y}-2\cdot 3^{x+y}-2^{x-y}=0$, откуда $2^{-x}\ y=3^{2y}-2\cdot 3^{x+y}$. Подстановка во второе уравнение системы дает $3^{2y}-4\cdot 3^{x+y}+3\cdot 3^{2x}=0$, или после умножения на 3^{-2x}: $3^{2(y-x)}-4\cdot 3^{y-x}+3=0$. Решив это квадратное относительно 3^{y-x} уравнение, найдем, что $3^{y-x}=3$, $3^{y-x}=1$. Отсюда $y-x=1$, $y-x=0$. Если $y-x=1$, то из первого уравнения исходной системы получим $6^{-2y}=1/6$, $y=1/2$, и тогда $x=y-1=-1/2$. Если же $y-x=0$, то аналогично имеем $6^{-2y}=-1$, в этом случае решений нет.

Ответ: $(-1/2;\ 1/2)$.

14. Обозначим $t=3^x$, тогда неравенство будет иметь вид $\dfrac{7}{t^2-2}\geqslant\dfrac{2}{t-1}$. Преобразуя его, получим $\dfrac{2t^2-7t+3}{(t^2-2)(t-1)}\leqslant 0$. Разложив на множители числитель как квадратный трехчлен и t^2-2 как разность квадратов, будем иметь $\dfrac{2(t-3)(t-0{,}5)}{(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t-1)}\leqslant 0$, откуда, учитывая, что $t>0$, а значит, $t+\sqrt{2}>\sqrt{2}>0$, приходим к неравенству $\dfrac{(t-3)(t-0{,}5)}{(t-\sqrt{2})(t-1)}\leqslant 0$. Решив его, например, методом интервалов, найдем, что $1/2\leqslant t<1$, $\sqrt{2}<t\leqslant 3$. Отсюда $1/2\leqslant 3^x<1$, $\sqrt{2}<3^x\leqslant 3$, и соответственно, $-\log_3 2\leqslant x<0$, $\frac{1}{2}\log_3 2<x\leqslant 1$.

Ответ: $[-\log_3 2;\ 0[\cup\left]\frac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right]$.

15. Переходим к основанию 3: $\log_3(x+2)>\dfrac{4}{\log_3(x+2)}$, и обозначив $t=\log_3(x+2)$, преобразуем неравенство к виду $\dfrac{(t-2)(t+2)}{t}>0$. Решив это неравенство, найдем, что $-2<t<0$, $2<t$. Отсюда получаем

$$-2<\log_3(x+2)<0,\quad 1/9<x+2<1,\quad -17/9<x<-1;$$
$$2<\log_3(x+2),\quad 9<x+2,\quad 7<x,$$

Ответ: $]-17/9;\ -1[\cup]7;\ +\infty[$.

16. Перейдем к основанию 2 и обозначим $\log_2 x = t$, в результате получим

$$\frac{8(t^2+2t)}{3(t+1)(t+3)} < 5.$$

Преобразуем это неравенство:

$$\frac{7t^2+44t+45}{(t+1)(t+3)} > 0, \quad \frac{\left(t+\frac{9}{7}\right)(t+5)}{(t+1)(t+3)} > 0.$$

Методом интервалов найдем, что $t < -5$, $-3 < t < -9/7$, $-1 < t$. Отсюда соответственно $\log_2 x < -5$, $0 < x < 2^{-5}$; $-3 < \log_2 x < -9/7$, $2^{-3} < x < 2^{-9/7}$; $-1 < \log_2 x$, $0{,}5 < x$.

Ответ: $]0;\ 2^{-5}[\cup]2^{-3};\ 2^{-9/7}[\cup]0{,}5;\ +\infty[$.

17. Если $x > 1$, то $6x-1 > 2x$, $x > 1/4$. Значит, все значения $x > 1$ являются решениями исходного неравенства. Если $0 < x < 1$, то $0 < 6x-1 < 2x$. Левое неравенство $0 < 6x-1$ имеет решения $x > 1/6$, а правое неравенство — решения $x < 1/4$. Значит, при $0 < x < 1$ исходное неравенство имеет решения $1/6 < x < 1/4$.

Ответ: $]1/6;\ 1/4[\cup]1;\ +\infty[$.

18. Поскольку $x > 0$, то $\log_a x^2 = 2\log_a x$. Переходим к основанию a и преобразуем неравенство к виду

$$\log_a x \cdot \frac{1-2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Пусть $a > 1$, тогда $x+a > a > 1$, $\log_a(x+a) > 1 > 0$, $1-2\log_a(x+a) < 0$, поэтому неравенство (1) сводится к неравенству $\log_a x \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 1$. Значит, при $a > 1$ множество решений исходного неравенства есть промежуток $[1;\ +\infty[$.

Пусть $0 < a < 1$. Если $x > 1$, то $\log_a x < 0$, $\log_a(x+a) < 0$, а $1-2\log_a(x+a) > 0$, значит, неравенство (1) неверно. Число $x = 1$ является решением (1). Если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$ и (1) сводится к неравенству

$$\frac{1-2\log_a(x+a)}{\log_a(x+a)} \leqslant 0.$$

Решив это неравенство относительно $\log_a(x+a)$, найдем, что $\log_a(x+a) \geqslant 1/2$, $\log_a(x+a) < 0$. Отсюда соответственно $x+a \leqslant \sqrt{a}$, $x \leqslant \sqrt{a}-a$; $x+a > 1$, $x > 1-a$.

Таким образом, при $0 < a < 1$ неравенство (1) имеет решения $0 < x \leqslant \sqrt{a}-a$, $1-a < x \leqslant 1$.

Ответ: Если $a > 1$, то $x > 1$; если $0 < a < 1$, то $0 < x \leqslant \sqrt{a}-a$, $1-a < x \leqslant 1$.

19. Полагая $x > 1$, преобразуем неравенство:

$$2+\log_3 x \leqslant \frac{6(x-1)}{2x-1}, \quad \log_3 x \leqslant \frac{2(x-2)}{2x-1}. \qquad (1)$$

В случае $0 < x < 1$ имеем:

$$2+\log_3 x \geqslant \frac{6(x-1)}{2x-1}, \quad \log_3 x \geqslant \frac{2(x-2)}{2x-1}. \qquad (2)$$

Изобразим для наглядности графики функций $\log_3 x$ и $2(x-2)/(2x-1)$ (рис. 352). Пусть $x > 1$ (неравенство (1)). Если $1 < x \leqslant 2$, то $\log_3 x > 0$, а $2(x-2)/(2x-1) \leqslant 0$,

значит, здесь решений нет. Если $x \geqslant 3$, то $\log_3 x \geqslant 1$, а $\frac{2(x-2)}{2x-1} = \frac{2x-1-3}{2x-1} = 1 - \frac{3}{2x-1} < 1$, поэтому и здесь решений нет. Пусть $2 < x < 3$. Здесь $\log_3 x > \log_3 2$, а функция $2(x-2)/(2x-1)$ монотонно возрастает (так как $3/2x-1$ монотонно убывает, а значит, $1 - \frac{3}{2x-1}$ — возрастает), и поэтому $2(x-2)/(2x-1) < 2 \cdot (3-2)/(2 \cdot 3 - 1) = 2/5$. Сравним числа $\log_3 2$ и $2/5$. Имеем $\frac{2}{5} = \log_3 3^{2/5} = \log_3 9^{1/5} < \log_3 32^{1/5} = \log_3 2$. Отсюда следует, что при $2 < x < 3$

$$\log_3 x > \log_3 2 > 2/5 > 2(x-2)/(2x-1).$$

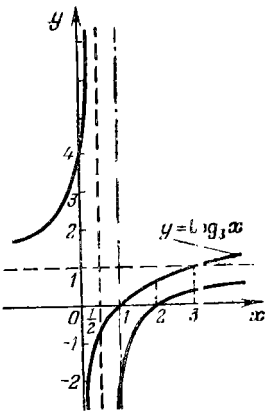


Рис. 352.

Таким образом, и при $2 < x < 3$, а значит, и при всех $x > 1$ неравенство (1) решений не имеет.

Пусть $0 < x < 1$ (неравенство (2)). Если $0 < x < 1/2$, то $\log_3 x < 0$, а $2(x-2)/(2x-1) > 0$, т. е. $\log_3 x < 2(x-2)/(2x-1)$, и все эти значения x не являются решениями неравенства (2). При $1/2 < x < 1$ функция $2(x-2)/(2x-1) = 1 - 3/(2x-1)$ монотонно возрастает, и значит, $\frac{2(x-2)}{(2x-1)} < 2(1-2)/(2 \cdot 1 - 1) = -2$. В то же время здесь $\log_3 x > \log_3 (1/2) = -\log_3 2 > -1$. Поэтому $\log_3 x > 2(x-2)/(2x-1)$, т. е. все значения $1/2 < x < 1$ являются решениями неравенства (2).

Ответ: $]1/2;\ 1[$.

ГЛАВА XI

1. Из пятиэлементного множества всех сотрудников выделяем трехэлементные подмножества, состоящие из тех сотрудников, которые получают путевки. В случае а) следует рассматривать упорядоченные подмножества (первый сотрудник получает первую путевку, второй — вторую, третий — третью), и поэтому их число равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. В случае б) порядок, в котором выделяются сотрудники, не важен, так как все путевки одинаковы, и, следовательно, число способов равно $C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

2. Рассмотрим сначала случай а). Пусть белые шары уложены в ряд, тогда черные шары можно положить по одному на шесть мест: 4 места — между пятью белыми шарами, 2 места — спереди и сзади от белых шаров. Но на шесть мест четыре шара можно положить C_6^4 способами, так как именно столько существует четырехэлементных подмножеств у шестиэлементного множества. Следовательно, в случае а) число способов равно $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. В случае б) из каждого расположения шаров, рассмотренного в случае а), можно получить $5! \cdot 4!$ способов, так как белые шары можно переставить $5!$ способами и

черные — 4! способами. Поэтому в случае б) число способов равно $C_4^1\,5!\,4! = 43\,200$.

3. Соединяя каждую пару вершин многоугольника, получаем либо диагональ, либо сторону многоугольника. Число различных пар вершин n-угольника равно C_n^2 (столько существует двухэлементных подмножеств у n-элементного множества). Так как у n-угольника n сторон, то число диагоналей равно

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

4. Треугольники могут быть двух видов. У треугольников первого вида одна вершина на первой прямой, две вершины — на второй прямой. Вершину на первой прямой можно выбрать 10 способами, две вершины на второй прямой можно выбрать C_{20}^2 способами. Всего, следовательно, существует $10 \cdot C_{20}^2$ треугольников первого вида. У треугольников второго вида одна вершина находится на второй прямой, а две другие вершины — на первой. Число таких треугольников подсчитывается аналогично. Оно равно $20 \cdot C_{10}^2$. Таким образом, искомое число всех треугольников

$$10 \cdot C_{20}^2 + 20 \cdot C_{10}^2 = 10\,\frac{20 \cdot 19}{2} + 20\,\frac{10 \cdot 9}{2} = 100\,(19+9) = 2\,800.$$

5. Первое решение. У множества, состоящего из 17 элементов, существует C_{17}^5 пятиэлементных подмножеств. Поэтому первому автору можно дать главы C_{17}^5 способами. Аналогично из оставшихся 12 глав второй автор может получить 4 главы C_{12}^4 способами. Третий автор получает 5 глав C_8^5 способами, а четвертому достаются оставшиеся 3 главы. Число способов распределения глав равно, следовательно,

$$C_{17}^5 C_{12}^4 C_8^5 = 171\,531\,360.$$

Второе решение. Занумеруем для удобства главы арабскими цифрами, а авторов — римскими. Представим в виде следующей таблицы один из способов распределения глав:

I	II	III	IV
2, 4, 8, 11, 14	1, 5, 7, 13	9, 10, 15, 16, 17	3, 6, 12

Любая перестановка чисел второй строки будет приводить к новому распределению, если только она не сводится к перестановке чисел внутри столбцов. Так как всего существует 17! способов перестановки чисел второй строки, а любые перестановки чисел внутри столбцов (их соответственно $5!, 4!, 5!, 3!$) не дают новых способов, то искомое число способов распределения глав

$$\frac{17!}{(5!)^2 \cdot 4! \cdot 3!} = 171\,531\,360.$$

6. Подсчитаем максимальное число крокодилов с неодинаковым набором зубов. Очевидно, что их число равно числу всех подмножеств у 68-элементного множества, т. е. равно 2^{68}. Так как $16^{17} = 2^{68}$, то 16^{17} крокодилов могут иметь различные наборы зубов. Ясно, что если крокодилов более 16^{17} особей, то среди

них обязательно найдутся по крайней мере два с одним и тем же набором зубов.

7. Рассмотрим 10-элементное множество мест, на которые записываются цифры числа. Возьмем любое его подмножество. На места, входящие в это подмножество, поставим цифру 1; остальные места заполним цифрой 2. Число записано. Выделив другое подмножество и проделав то же самое, получим другое число. Ясно, что чисел можно записать столько, сколько существует подмножеств у 10-элементного множества, т. е. $2^{10}=1024$.

8. Рассмотрим множество мест, на которые ставятся «точки» и «тире» при записи буквы, содержащей k символов. Это множество состоит из k элементов. Рассмотрим любое его подмножество, заполним его «точками», на остальные места поставим «тире». Буква записана. Разных букв, в записи которых используется k символов, будет очевидно столько, сколько существует подмножеств у k-элементного множества, а их, как известно, 2^k. Так как по условию задачи для записи буквы не должно использоваться более четырех символов, то всего можно записать

$$\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2+2^2+2^3+2^4 = 30 \text{ букв.}$$

9. На первом месте у автомобильного номера может быть любая из 30 букв. Следовательно, первая буква может быть выбрана 30 способами. На втором месте также может находиться любая из 30 букв, поэтому первые две буквы номера могут быть выбраны 30^2 способами. Ясно, что три буквы можно выбрать 30^3 способами. Аналогично рассуждая, получаем, что четыре цифры можно выбрать 10^4 способами. Таким образом, всего может быть занумеровано $30^3 \cdot 10^4 = 27 \cdot 10^7$ автомобилей.

10. Эту задачу можно решить, используя формулы для числа сочетаний и числа перестановок. Однако результат можно получить быстрее и проще, если рассуждать следующим образом. Обозначим число разбиений на пары в случае $2n$ элементов через R_{2n}. Выберем какой-нибудь элемент. С участием этого элемента пару можно образовать $2n-1$ способом. Каждый раз после образования одной пары будет оставаться $2n-2$ элементов, которые можно разбить на пары R_{2n-2} способами. Поэтому $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}$. Используя эту рекуррентную формулу, получаем

$$R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}=(2n-1)(2n-3)R_{2n-4}=\ldots=$$
$$=(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot R_2=(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1.$$

Таким образом, число разбиений равно произведению всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих $2n-1$.

11. Средним членом разложения является пятый. Формула для общего члена разложения в данном случае дает

$$T_5=C_{10}^5\left(x^{-1/3}\right)\left(x^{1/3}\right)^5=C_{10}^5 x^{2/3}=252x^{2/3}.$$

12. Составляем систему неравенств:

$$T_5>T_4,\quad T_5>T_6.$$

Используя формулу для общего члена разложения, получаем

$$\begin{cases} C_9^3(2x)^4 3^5 > C_9^4(2x)^5 3^4, \\ C_9^5(2x)^4 3^5 > C_9^6(2x)^3 3^6. \end{cases}$$

После сокращения имеем

$$\begin{cases} 3x^4 > 2x^5, \\ x^4 > x^3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3-2x>0, \\ x(x-1)>0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$x \in]-\infty;0[\cup]1;3/2[.$$

13. Запишем общий член разложения:

$$T_k = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k = C_9^k 3^{(9-k)/2} 2^{k/3}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, 9.$$

Числа T_k будут целыми, если степени $(9-k)/2$ и $k/3$ — целые числа. Из того что $k/3$ целое, следует, что k может принимать значения 0, 3, 6, 9. При этих значениях k степень $(9-k)/2$ будет целым числом только при $k=3$ и при $k=9$. Следовательно, только третий и девятый члены разложения являются целыми числами, причем

$$T_3 = C_9^3 3^3 2 = 4536, \qquad T_9 = C_9^9 2^3 = 8.$$

14. Положив в формуле Ньютона $n=10$, $a=1$, $b=3x+2x^3$, получим

$$(1+3x+2x^3)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (3x+2x^3)^k.$$

Легко видеть, что только при $k=2$ и при $k=4$ получаются слагаемые, содержащие x^4. Заменяя многоточием те слагаемые, которые заведомо содержат x не в четвертой степени, будем иметь

$$(1+3x+2x^3)^{10} = C_{10}^2 (3x+2x^3)^2 + C_{10}^4 (3x+2x^3)^4 + \ldots =$$
$$= C_{10}^2 12x^4 + \ldots + C_{10}^4 (3x)^4 + \ldots = (12C_{10}^2 + 3^4 C_{10}^4) x^4 + \ldots$$

Таким образом, искомый коэффициент равен $12C_{10}^2 + 3^4 C_{10}^4 = 17\,550$.

15. Сумма коэффициентов любого многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

равна значению многочлена при $x=1$. В самом деле,

$$P_n(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Заданный многочлен при $x=1$ обращается в единицу, поэтому сумма всех его коэффициентов равна единице.

16. Напишем разложения по формуле Ньютона для $(1+x)^{2n}$ и $(1-x)^{2n}$:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n},$$
$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Положив в этих тождествах $x=1$, будем иметь

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n},$$
$$C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 0.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

17. Всего существует C_{10}^5 способов взять 5 билетов из 10. Следовательно, число всех исходов в каждом из случаев а) и б) одинаково и равно C_{10}^5.

В случае а) благоприятный исход состоит в том, что из двух выигрышных билетов берется один (это можно сделать двумя способами), а из восьми невыигрышных выбираются четыре (это можно сделать C_8^4 способами). Число

благоприятных исходов равно $2 \cdot C_4^1$, а вероятность в случае а) равно отношению $2C_4^1/C_{10}^2 = 5/9$.

В случае б) благоприятный исход заключается в том, что среди взятых пяти билетов 2 выигрышных (их можно взять одним способом) и 3 невыигрышных (их можно взять C_6^3 способами). Число благоприятных способов, следовательно, равно C_6^3, а вероятность в случае б) равна отношению $C_6^3/C_{10}^5 = 2/9$.

18. Каждый человек может выйти из лифта семью способами (на каждом этаже, начиная со второго). Поэтому всего возможно 7^5 исходов. Благоприятный исход состоит в том, что все пятеро выходят на разных этажах. Поэтому первый может выйти семью способами, второй — только шестью, третий — только пятью, четвертый — четырьмя и пятый — тремя способами. Число благоприятных исходов равно $A_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, а искомая вероятность равна

$$\frac{A_7^5}{7^5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = \frac{360}{2401} \approx 0{,}15.$$

ГЛАВА XII

1. а) Одной из первообразных для функции x^6 является функция $\frac{1}{6}x^6$. Следовательно, в силу теоремы § 1 гл. XII любая первообразная имеет вид $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$, где C — произвольная постоянная.

б) Одной из первообразных для функции $\frac{1}{2}\sin(3x+1)$ является функция $-\frac{1}{6}\cos(3x+1)$, и, следовательно, любая первообразная имеет вид $F(x) = -\frac{1}{6}\cos(3x+1) + C$.

в) В § 1 гл. XII было доказано, что одной из первообразных для функции $1/x$ является функция $\ln|x|$. Легко видеть, что функция $\frac{1}{5}\ln|5x+6|$ является одной из первообразных для функции $1/(5x+6)$. Следовательно, любая первообразная для заданной функции имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{5}\ln|5x+6| + C.$$

г) Дифференцированием проверяется, что функция $\frac{3}{2}\operatorname{tg}(2x+1)$ является первообразной для функции $3/\cos^2(2x+1)$. Аналогично проверяется, что первообразной для функции $\cos 6x$ является функция $\frac{1}{6}\sin 6x$. Следовательно, любая первообразная для заданной функции имеет вид

$$F(x) = \frac{3}{2}\operatorname{tg}(2x+1) + \frac{1}{6}\sin 6x + C.$$

2. Пусть $F(x)$ — первообразная данной функции. Тогда $F'(x) = x$ для $x > 0$ и $F'(x) = -x$ для $x < 0$. Следовательно, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ для $x > 0$ и

$F(x)=-\frac{1}{2}x^2+C_2$ для $x<0$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. По условию функция $F(x)$ имеет производную в каждой точке, и поэтому она непрерывна на всей действительной оси. Из непрерывности функции $F(x)$ в точке $x=0$ следует, что $C_1=C_2$. Таким образом, из предположения, что у функции $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, есть первообразная $F(x)$, следует, что $F(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+C, & x\geqslant 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}+C, & x<0,\end{cases}$$

где C — произвольная постоянная. Легко проверяется, что каждая такая функция действительно является первообразной для заданной функции $|x|$.

3. Искомая первообразная для функции $f(x)=x^2$ имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+C,$$

где C — некоторая постоянная. Для определения C воспользуемся условием, что график искомой первообразной проходит через точку (2; 3), т. е. $F(2)=3$. Отсюда получаем $C=1/3$. Следовательно, $F(x)=(x^3+1)/3$.

4. Искомая первообразная имеет вид

$$F(x)=\ln|x|+\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+C,$$

где C — некоторая постоянная. Из условия $F(1)=3$ получаем $C=3-\dfrac{2^3}{3\ln 2}$, и, следовательно, искомая первообразная есть

$$F(x)=\ln|x|+\frac{2^{3x}}{3\ln 2}+3-\frac{8}{3\ln 2}.$$

5. а) Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций, поэтому

$$\int(t^3+3e^{5t})\,dt=\int t^3\,dt+3\int e^{5t}\,dt,$$

где, кроме того, постоянный множитель 3 вынесен за знак интеграла. Первообразной для t^3 является функция $t^4/4$, а первообразной для e^{5t} является функция $e^{5t}/5$. Следовательно,

$$\int(t^3+3e^{5t})\,dt=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{5}e^{5t}+C,$$

где C — произвольная постоянная.

б) Аналогично предыдущему

$$\int\frac{x^{1/3}+x^{1/5}}{x^2}\,dx=\int x^{-5/3}\,dx+\int x^{-9/5}\,dx=-\frac{3}{2}x^{-2/3}-\frac{5}{4}x^{-4/5}+C.$$

в) Используя соотношение

$$\sin 2x\cos 4x=(\sin 6x-\sin 2x)/2,$$

получаем

$$\int \sin 2x \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 6x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{12}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

г) $$\int \left(5^{3x} + \frac{1}{\sin^2(2x+1)} + \frac{1}{\sqrt[5]{4x-1}}\right) dx =$$

$$= \int 5^{3x}\, dx + \int \frac{dx}{\sin^2(2x+1)} + \int \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}} =$$

$$= \frac{5^{3x}}{3\ln 5} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(2x+1) + \frac{5}{16}\sqrt[5]{(4x-1)^4} + C.$$

6. а) Положим $u = x$ и $v' = \cos x$. Тогда $u' = 1$ и $v = \sin x$, и по формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

б) Положим $u = \ln x$ и $v' = x$. Тогда $u' = 1/x$, $v = x^2/2$ и

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

7. Предположим, что функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $\mathbb{R}$. Тогда $F'(x) = 1$ для $x > 0$ и $F'(x) = -1$ для $x < 0$. Следовательно, $F(x) = x + C_1$ для $x > 0$ и $F(x) = -x + C_2$ для $x < 0$. Из непрерывности функции $F(x)$ при $x = 0$ следует, что $F(0) = C_1 = C_2$. Поэтому функция $F(x)$ имеет вид $F(x) = |x| + C$, где C — некоторая постоянная. Эта функция при $x = 0$ не имеет производной и в силу этого ни для одной функции не является первообразной на $\mathbb{R}$, что противоречит предположению. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$ не имеет первообразной.

8. а) Так как функция $x^4/4$ есть первообразная для x^3, то по формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

б) Функция $-\cos x$ является первообразной для $\sin x$, и поэтому

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

в) Имеем

$$\int_4^9 \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - 6\sqrt{x}\right)\Big|_4^9 = \frac{58}{3}.$$

г) Первообразной для функции $1/\sqrt{2x+3}$ является функция $\sqrt{2x+3}$. Поэтому

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\, dx = \sqrt{2x+3}\Big|_1^3 = 3 - \sqrt{5}.$$

д) Перейдем к новой переменной интегрирования, положив $3x^3 + 4 = y$. Тогда $(3x^3+4)^{1/3} = y^{1/3}$, $y' = 9x^2$ и, следовательно, $(3x^3+4)^{1/3} x^2\, dx = y^{1/3} \frac{1}{9}\, dy$.

Найдем новые пределы интегрирования: $A=3\cdot 1^3+4=7$, $B=3\cdot 2^3+4=28$. По формуле замены переменной получаем

$$\int_1^2 (3x^3+4)^{1/3}\,x^2\,dx=\int_7^{28}\frac{1}{9}\,y^{1/3}\,dy=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\,y^{4/3}\Big|_7^{28}=\frac{1}{12}\,(28)^{4/3}-\frac{1}{12}\cdot 7^{4/3}.$$

е) Положим $u=x$ и $v'=\sin x$, тогда $u'=1$ и $v=-\cos x$. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

ж) Положим $u=\ln x$ и $v'=1/x^2$, тогда $u'=1/x$, $v=-1/x$. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{2}{e}.$$

з) Функция $|x|$ равна x при $x>0$ и равна $-x$ при $x<0$. Поэтому подынтегральная функция $f(x)$ равна $x(x-2)=x^2-2x$ при $x>0$ и равна $-x^2+2x$ при $x<0$. Разбивая интеграл на два интеграла, получаем

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2+2x)\,dx+\int_0^2(x^2-2x)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2=-\frac{8}{3}-4+\frac{8}{3}-4=-8.$$

9. а) Пусть функция $F(t)$ — первообразная для функции $f(t)=t^2\sin t$. По формуле Ньютона—Лейбница имеем $\Phi(x)=F(x)-F(0)$. Из определения первообразной следует, что $F'(x)=x^2\sin x$. Поэтому $\Phi'(x)=(F(x)-F(0))'=F'(x)=x^2\sin x$.

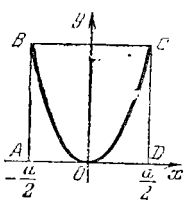


Рис. 353.

б) Пусть функция $F(t)$ — первообразная для функции $f(t)=2^t\cos(\sin t)$. Тогда $\Phi(x)=F(3x^2)-F(2x)$. Теперь применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\Phi'(x)=(F(3x^2)-F(2x))'=2^{3x^2}\cos(\sin(3x^2))\cdot 6x-$$
$$-2^{2x}\cos(\sin(2x))\cdot 2.$$

10. Обозначим длину стороны квадрата через a и выберем систему координат так, как показано на рис. 353. В этой системе координат уравнение параболы имеет вид $y=kx^2$, причем k определяется из условия, что парабола проходит через точку $(a/2;\ a)$. Таким образом, $k=4/a$. Парабола разбивает квадрат на две части: $ABOCD$ и BOC. Вычислим площадь криволинейной трапеции $ABOCD$:

$$S_{ABOCD}=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{4}{a}\,x^2\,dx=\frac{4}{a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2}=\frac{a^2}{3}.$$

Отсюда следует, что $S_{BOC}=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}\,a^2$. Следовательно, парабола делит площадь квадрата в отношении 1 : 2.

11. Построив графики функций $y=|x^2-1|$ и $y=|x|+5$, видим, что требуется найти площадь фигуры $ABCDEF$ (рис. 354). Из системы уравнений

$$\begin{cases} y=|x^2-1|, \\ y=|x|+5 \end{cases}$$

находим координаты точек D и F, в которых пересекаются заданные линии. Именно $D(3; 8)$ и $F(-3; 8)$. Из рисунка видно, что $|x^2-1|<|x|+5$ для

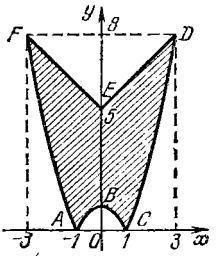


Рис. 354.

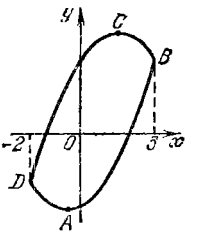


Рис. 355.

любого $x\in]-3; 3[$ и данная фигура симметрична относительно оси Ox. Следовательно, $S=2S_{BCDE}$ и по формуле (2) § 3 гл. XII

$$S_{BCDE}=\int_0^3 (|x|+5-|x^2-1|)\,dx.$$

Легко видеть, что

$$\int_0^3 (|x|+5)\,dx=\int_0^3 x\,dx+\int_0^3 5\,dx=\frac{9}{2}+15=\frac{39}{2}.$$

Далее,

$$\int_0^3 (|x^2-1|)\,dx=\int_0^1 (1-x^2)\,dx+\int_1^3 (x^2-1)\,dx=$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}.$$

Следовательно, $S=2\cdot\left(\frac{39}{2}-\frac{22}{3}\right)=\frac{73}{3}$.

12. Линия $2y=x^2+x-6$ является параболой с вершиной в точке $A(-1/2; -25/8)$ (рис. 355), а линия $2y=-x^2+3x+6$—параболой с вершиной в точке $C(3/2; 33/8)$. Требуется найти площадь S фигуры $ABCD$, где B и D—точки пересечения парабол. Решая систему

$$\begin{cases} 2y=x^2+x-6, \\ 2y=-x^2+3x+6, \end{cases}$$

находим, что координатами точки D являются числа $x=-2$, $y=-2$, а координатами точки B—числа $x=3$, $y=3$. Используя формулу (3) § 3 гл. XII,

получаем

$$S=\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}(-x^2+3x+6)-\frac{1}{2}(x^2+x-6)\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{-2}^{3}=\frac{125}{6}.$$

13. Так как

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx,$$

то нужно доказать, что

$$\int_{-a}^{0}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

Для этого сделаем замену $x=-t$ и затем поменяем местами пределы интегрирования:

$$\int_{-a}^{0}(x)\,dx=-\int_{a}^{0}f(-t)\,dt=\int_{0}^{a}f(-t)\,dt.$$

Функция f — четная, поэтому $f(-t)=f(t)$ и

$$\int_{0}^{a}f(-t)\,dt=\int_{0}^{a}f(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_{-a}^{0}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(t)\,dt=\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

14. Прежде всего заметим, что

$$\int_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{a}^{T}f(x)\,dx+\int_{T}^{a+T}f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной интегрирования $x=t+T$. Тогда

$$\int_{T}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(t+T)\,dt,$$

а так как $f(t+T)=f(t)$, то

$$\int_{T}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}f(t)\,dt. \qquad (2)$$

В последнем интеграле переменную интегрирования снова обозначим через x. Теперь из (1) и (2) получаем

$$\int_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{a}^{T}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{T}f(x)\,dx.$$

15. Пусть A и B — точки пересечения гиперболы $x(y+2)=4$ с прямыми $y=0$ и $x=1$, а C — точка пересечения этих прямых, тогда $A(2;\ 0)$, $B(1;\ 2)$,

$C(1; 0)$ (рис. 356). Требуется вычислить объем V тела, образованного вращением фигуры ABC вокруг оси Oy. Искомый объем равен разности $V_1 - V_2$ объемов тела, образованного вращением криволинейной трапеции $OABD$ вокруг оси Oy, и цилиндра с радиусом основания 1 и высотой 2. Объем V_1 вычисляется по формуле для объема тела вращения:

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{4}{y+2}\right)^2 dy = -16\pi \frac{1}{y+2}\Big|_0^2 = 4\pi.$$

Объем V_2 цилиндра равен 2π. Следовательно, $V = V_1 - V_2 = 2\pi$.

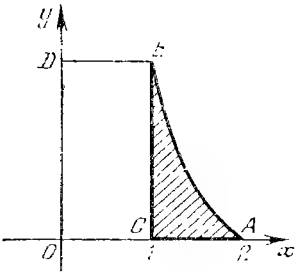


Рис. 356.

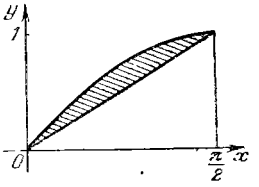


Рис. 357.

16. Объем V заданного тела (рис. 357) равен разности $V_1 - V_2$ объемов тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0; \pi/2]$ и отрезками прямых $y = 0$ и $x = \pi/2$, и конуса с радиусом основания 1 и высотой $\pi/2$. Объем V_1 вычисляется с помощью интеграла

$$V_1 = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Объем V_2 косинуса равен $\pi^2/6$. Следовательно, искомый объем равен $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$.

17. Разобьем отрезок $[0; l]$ оси Ox на n равных по длине частей (рис. 358). Согласно закону Ньютона участок стержня $[x_{i-1}; x_i]$ массы $\delta\,\Delta x_i$ притягивает материальную точку P с силой, приближенно равной

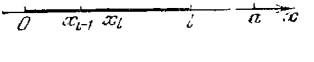


Рис. 358.

$$-k\frac{m\delta\,\Delta x_i}{(a-x_i)^2},$$

где k — коэффициент пропорциональности (гравитационная постоянная). Тогда сила F, с которой однородный стержень притягивает материальную точку P, приближенно равна сумме

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{km\delta\,\Delta x_i}{(a-x_i)^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$F = -km\delta \int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2}.$$

Следовательно,

$$F = -\frac{km\delta}{a-x}\Big|_0^l = \frac{km\delta}{a} - \frac{km\delta}{a-l} = -\frac{km\,\delta l}{a(a-l)}.$$

18. Выберем систему координат, как показано на рис. 359. Разобьем отрезок $[0; R]$ оси Ox на n равных по длине частей. Кинетическая энергия E_i кругового кольца, заключенного между окружностями радиусов $r = x_{i-1}$ и $r = x_i$, приближенно равна $m_i v_i^2/2$, где m_i — масса этого кольца, а $v_i = x_i\omega$. Так как

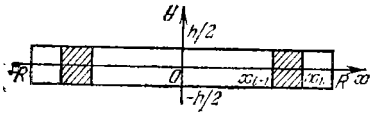


Рис. 359.

$$m_i = \rho h\pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \rho h\pi (x_i + x_{i-1})\,\Delta x_i,$$

то приближенно m_i равна $2\rho h\pi x_i \Delta x_i$ и кинетическая энергия E_i приближенно равна $\rho h\pi\omega^2 x_i^3 \Delta x_i$. Тогда кинетическая энергия E всего тела приближенно равна сумме

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\rho h\omega^2 x_i^3 \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$E = \int_0^R \pi\rho h\omega^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}\pi\rho h\omega^2 R^4.$$

ГЛАВА XIII

1. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 360). Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты, проведенные к этому основанию, поэтому их площади равны. Площади треугольников ABO и CDO меньше площадей треугольников ABD и ACD на величину площади треугольника ADO и, следовательно, равны.

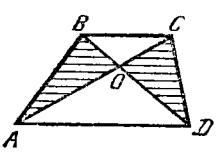


Рис. 360.

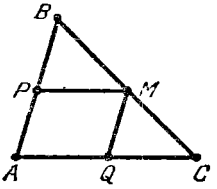


Рис. 361.

2. Пусть $PM \parallel AC$ и $MQ \parallel AB$ (рис. 361). Обозначим $b = |BC|$, $x = |BM| : |MC|$, тогда $|BM| = \frac{x}{1+x}$ и $MC = \frac{1}{1+x}b$.

Легко видеть, что треугольники PBM и QMC подобны треугольнику ABC. Поэтому, если S — площадь треугольника ABC, то

$$S_{PBM} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 S \quad \text{и} \quad S_{QMC} = \frac{1}{(1+x)^2} S.$$

По условию $S-S_{PBM}-S_{QMC}=\frac{5}{18}S$, откуда получаем $1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-\frac{1}{(1+x)^2}=$ $=\frac{5}{18}$ или

$$5x^2-26x+5=0.$$

Решая уравнение, находим $x=5$ и $x=1/5$. В обоих случаях точка M делит сторону BC на отрезки, длины которых относятся как 5 : 1.

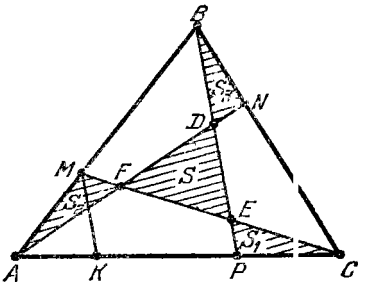


Рис. 362.

3. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3 соответственно площади треугольников ABC, PEC, AMF и DBN (рис. 362). Нетрудно видеть, что

$$S_0=S_{AMC}+S_{ABN}+S_{PBC}+S_{FDE}-(S_1+S_2+S_3),$$

и так как $S_{AMC}=S_{ABN}=S_{PBC}=\frac{1}{3}S_0$, $S_{FDE}=S$, то отсюда получаем

$$S_1+S_2+S_3=S. \qquad (1)$$

Найдем S_1. Проведем $MK\parallel BP$, тогда $\triangle AMK\sim\triangle ABP$. Из подобия следует: $|AK|=\frac{1}{3}|AP|$, и так как $|AP|=\frac{2}{3}|AC|$, то $|AK|=\frac{2}{9}|AC|$. Тогда $S_{AMK}=\frac{2}{9}S_{AMC}=\frac{2}{27}S_0$ и $S_{KMC}=\frac{7}{27}S_0$.

Треугольники PEC и KMC также подобны, поэтому $S_1=(|PC|/|KC|)^2S_{KMC}$. Отсюда, учитывая, что $|PC|=\frac{1}{3}|AC|$ и $|KC|=$ $=\frac{7}{9}|AC|$, получаем $S_1=\frac{1}{21}S_0$.

Аналогично устанавливается, что $S_2=S_3=\frac{1}{21}S_0$, и поэтому из (1) следует $S=\frac{1}{7}S_0$, т. е. $S_0=7S$.

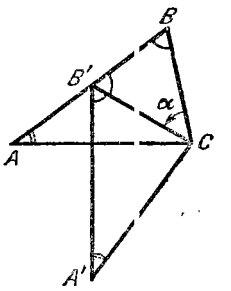


Рис. 363.

4. При повороте на угол α каждая прямая поворачивается на этот угол, следовательно, $\widehat{AB'A'}=\alpha$ (рис. 363). Тогда из условия $A'B\perp AC$ следует $\hat{A}=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Далее, так как $|CB'|=|CB|$, то треугольник CBB' равнобедренный и $\widehat{BB'C}=\hat{B}$. С другой стороны, углы ABC и $A'B'C$ конгруэнтны, т. е. $\widehat{A'B'C}=\hat{B}$. Углы $AB'A'$, $A'B'C$ и $CB'B$ образуют развернутый, поэтому $\alpha+$ $+2\hat{B}=\pi$, откуда находим $\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Угол C находим из условия, что сумма углов треугольника равна π, получаем $\hat{C}=\frac{3}{2}\alpha$.

5. Через вершины A, B и C треугольника проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 364), эти прямые в пересечении ограни-

чивают треугольник $A'B'C'$. В четырехугольниках $AC'BC$ и $ABA'B$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, это параллелограммы и $|C'B| = |AC|$, $|BA'| = |AC|$. Таким образом, точка B является серединой стороны $A'C'$. Аналогично устанавливается, что точки A и C являются серединами сторон $C'B'$ и $A'B'$.

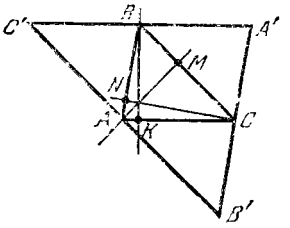


Рис. 364.

Если BK — высота треугольника ABC, то прямая BK есть серединный перпендикуляр к стороне $A'C'$ треугольника $A'B'C'$. Аналогично, если $AM \perp BC$ и $CN \perp AB$, то прямые AM и CN являются серединными перпендикулярами соответственно к сторонам $C'B'$ и $A'B'$. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, три прямые, на которых лежат высоты треугольника, также пересекаются в одной точке.

6. Пусть продолжения высот, проведенных из вершин A, B и C, пересекают окружность в точках A', B' и C' (рис. 365) и пусть

$$\overset{\frown}{C'BA'} : \overset{\frown}{A'CB'} : \overset{\frown}{B'AC'} = p : q : r. \qquad (1)$$

Обозначим углы, на которые высоты делят углы при вершинах, соответственно A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Рассмотрев вписанные углы, опирающиеся на дуги $C'BA'$, $A'CB'$ и $B'AC'$, из (1) получим:

$$(\hat{C}_1 + \hat{A}_2) : (\hat{A}_1 + \hat{B}_2) : (\hat{B}_1 + \hat{C}_2) = p : q : r. \qquad (2)$$

Пусть O — точка пересечения высот треугольника ABC. Из подобия прямоугольных треугольников AOK и BOM следует, что $A_1 = \hat{B}_2$. Аналогично устанавливается, что $\hat{C}_1 = \hat{A}_2$ и $\hat{B}_1 = \hat{C}_2$. Учитывая это, из (2) получаем

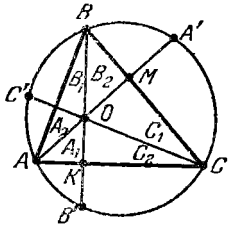


Рис. 365.

$$2\hat{C}_1 : 2\hat{A}_1 : 2\hat{B}_1 = p : q : r,$$

откуда следует:

$$\hat{A}_1 = \frac{q}{r}\hat{B}_1 \quad \text{и} \quad \hat{C}_1 = \frac{p}{r}\hat{B}_1.$$

Теперь из условия $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2(\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1) = \pi$ легко находим $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$, $\hat{A}_1$ и вычисляем величины углов треугольника:

$$\hat{A} = \frac{p+q}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad \hat{B} = \frac{q+r}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\hat{C} = \frac{p+r}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

7. Пусть O_1 и O_2 — центры большей и меньшей окружностей соответственно, D — точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью (рис. 366). Если $O_2M \perp AB$, то $|AM| = \frac{1}{2}|AD|$, и если $O_1N \perp AB$, то $|AN| = \frac{1}{2}|AB|$. Из подобия прямоугольных треугольников O_2AM и O_1AN получаем $|AO_2| : |AO_1| = |AM| : |AN|$, откуда $|AD| : |AB| = r : R$. По теореме о касательной и се-

кущей имеем

$$|BC|^2=|AB|\,|BD|=|AB|\,(|AB|-|AD|)$$

или $a^2=|AB|^2\left(1-\frac{r}{R}\right)$. Находим $|AB|=a\sqrt{R/(R-r)}$.

8. Пусть P, Q и N — точки касания окружности сторон треугольника (рис. 367). Обозначим $a=|BC|$, $3x=|BM|$. Из теоремы о касательной и секущей следует

$$|BP|=|BN|=|QM|=\sqrt{2}\,x.$$

Но так как $|CP|=|CQ|$, то $|BC|=|CM|=a$. Точка M — середина стороны AC, следовательно, $|AC|=2a$ и $|AM|=a$.

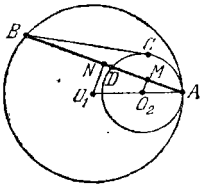


Рис. 366.

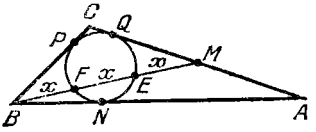


Рис. 367.

Далее, $|AN|=|AQ|=|AM|+|MQ|=a+\sqrt{2}\,x$, поэтому $|AB|=a+2\sqrt{2}\,x$.

Используя выражение для медианы через длины сторон треугольника (см. задачу 5 § 2 гл. XIII), можем записать:

$$2|BM|^2=|BC|^2+|AB|^2-\frac{|AC|^2}{2}$$

или $18x^2=a^2+(a+2\sqrt{2}\,x)^2-2a^2$. Отсюда получаем квадратное уравнение $5x^2-2\sqrt{2}\,ax=0$. Таким образом, $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}a$ и $|AB|=\frac{13}{5}a$. Итак, имеем $|BC|:|AC|:|AB|=5:10:13$.

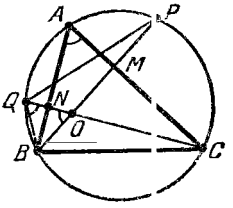


Рис. 368.

9. Пусть O — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 368). Прямоугольные треугольники BAM и BON содержат по равному острому углу при вершине B, следовательно, $\widehat{BON}=\hat{A}$. Угол BAC опирается на дугу BC, на эту же дугу опирается угол BQC, поэтому $\widehat{BQC}=\hat{A}$, треугольник BOQ равнобедренный и $|BO|=|BQ|$. Обозначим $x=|BO|$. Треугольники QOP и BOC подобны ($\widehat{CQP}=\widehat{CBP}$ и $\widehat{QPB}=\widehat{QCB}$), $\frac{|QO|}{|BO|}=\frac{|QP|}{|BC|}=\frac{6}{5}$, откуда следует $|QO|=\frac{6}{5}x$. В равнобедренном треугольнике высота является медианой, поэтому $|NO|=\frac{3}{5}x$ и $\cos A=\frac{|NO|}{|BO|}=\frac{3}{5}$. Тогда $\sin A=\frac{4}{5}$ и радиус R описанной около

треугольника ABC окружности находим по формуле (4) § 2 гл. XIII $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{5}{8}a$.

10. Пусть $DF\perp AB$ (рис. 369), тогда треугольник AFE прямоугольный и FK — его медиана. Следовательно $|FK|=|AK|$, а так как $\widehat{FAK}=60°$, то треугольник AFK — правильный. Отсюда следует, что $FK\parallel BC$ и $|FB|=|KC|$, т. е. $FBCK$ — равнобедренная трапеция, около которой может быть описана окружность.

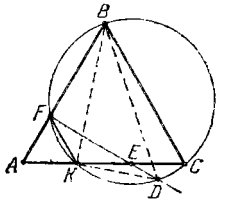


Рис. 369.

Далее, в четырехугольнике $FBCD$ противоположные углы BFD и BCD по условию прямые. Значит, около четырехугольника $FBCD$ также можно описать окружность, и BD — диаметр этой окружности.

Обе указанные окружности проходят через точки F, B и C и потому совпадают. Отсюда следует, что угол BKD опирается на диаметр и потому прямой: $\widehat{BKD}=90°$ и $\widehat{KDB}=\widehat{KCB}=60°$. Тогда $\widehat{KBD}=30°$.

11. Пусть медианы AD и биссектриса CE пересекаются в точке O (рис. 370). В треугольнике ACD биссектриса CO является высотой, поэтому (см. § 1 гл. XIII) треугольник ACD равнобедренный: $|AC|=|CD|$. Тогда из условия, что точка D — середина стороны BC, следует $|BC|=2|AC|$ и $\cos\widehat{ACB}=\frac{1}{2}|AC|:|BC|=\frac{1}{4}$.

Таким образом, $\widehat{ACB}=\arccos(1/4)$.

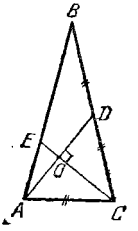


Рис. 370.

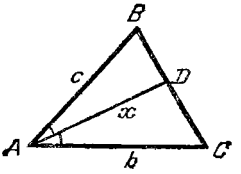


Рис. 371.

12. Пусть AD — биссектриса угла BAC (рис. 371). Обозначим $x=|AD|$. Очевидно, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и ADC, поэтому, используя формулу площади (2) § 2 гл. XIII, можно записать

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}cx\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}bx\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sin\alpha=2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ и $\sin(\alpha/2)\neq 0$, получим $2bc\cos(\alpha/2)=x(b+c)$, откуда $x=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$.

13. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 372). Вписанный угол ABC опирается на дугу AC, на которую опирается также центральный угол AOC, следовательно, $\widehat{AOC}=2\varphi$. В окружно-

сти, описанной около треугольника AOC, на дугу AC опираются вписанные углы AOC и AMC, поэтому $\widehat{AMC}=\widehat{AOC}=2\varphi$, а так как в треугольниках ABC и ACM углы при вершине A равны, то $\widehat{ACM}=\widehat{ABC}=\varphi$.

Применяем теорему синусов к треугольникам AMC и ABC, имеем

$$\frac{|AM|}{\sin\varphi}=\frac{AC}{\sin 2\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{|AC|}{\sin\varphi}=\frac{AB}{\sin 2\varphi},$$

откуда получаем $\frac{|AM|}{|AB|}=\left(\frac{\sin\varphi}{\sin 2\varphi}\right)^2=\frac{1}{4\cos^2\varphi}$.

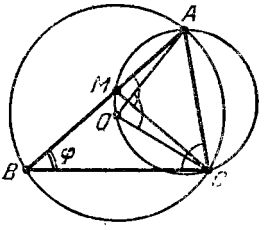


Рис. 372.

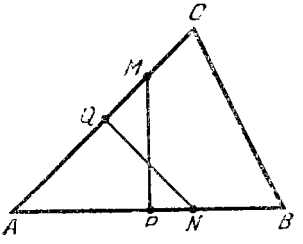


Рис. 373.

14. Пусть в треугольнике ABC точка P — середина стороны AB и точка Q — середина стороны AC (рис. 373). Положим $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, тогда $|AM|=\frac{3}{4}b$, $|MC|=\frac{1}{4}b$, $|AN|=\frac{2}{3}c$ и $|NB|=\frac{1}{3}c$. Из прямоугольных треугольников AMP и AQN следует

$$\cos A=\frac{|AP|}{|AM|}=\frac{2}{3}\frac{c}{b} \quad \text{и} \quad \cos A=\frac{|AQ|}{|AN|}=\frac{3}{4}\frac{b}{c}.$$

Отсюда получаем, что $c=\frac{3}{2\sqrt{2}}b$ и $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $\hat{A}=\pi/4$. Из треугольника ABC по теореме косинусов находим

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}b.$$

Теперь используем теорему синусов:

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\sin\hat{A}=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \sin\hat{C}=\frac{c}{a}\sin\hat{A}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Итак, $\hat{A}=\pi/4$, $\hat{B}=\arcsin(2/\sqrt{5})$, $\hat{C}=\arcsin(3/\sqrt{10})$.

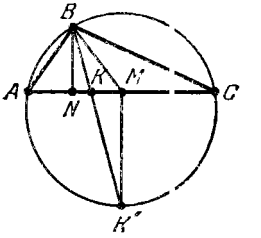


Рис. 374.

15. Пусть в треугольнике ABC длины сторон, прилежащих к вершине B, различны (иначе треугольник ABC — равнобедренный и биссектриса угла B является медианой и высотой) и пусть BK — биссектриса этого треугольника (рис. 374). Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим прямую BK до пересечения с окружностью в точке K'. Очевидно, что точка K' — середина дуги AC, поэтому, если через точку K' провести прямую, перпендикулярную хорде AC (т. е. параллельную высоте BN треугольника ABC), то она разделит хорду AB пополам. Отсюда сле-

дует, что точка K лежит между точкой M — серединой стороны AB, и точкой N — основанием высоты, т. е. биссектриса лежит между медианой и высотой.

16. Применим векторную алгебру. Пусть $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{m}$ (рис. 375), тогда $\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{5}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2). \qquad (1)$$

Если $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, откуда, используя условие задачи $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=5|\boldsymbol{c}|^2$, находим $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2}{5}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$. Подставляя это в (1), получаем $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$, а значит, и медианы AM и BN, перпендикулярны.

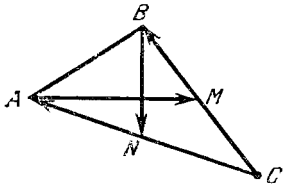


Рис. 375.

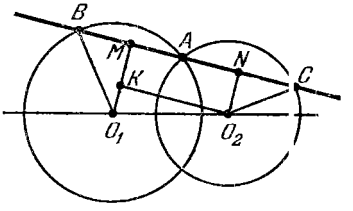


Рис. 376.

17. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 376). $OM\perp BC$ и $O_2N\perp BC$, тогда, если $|AB|=x$, то

$$|BM|=|MA|=|AN|=|NC|=x/2$$

и

$$|O_1M|=\sqrt{5-\frac{x^2}{4}},\quad |O_2N|=\sqrt{2-\frac{x^2}{4}}.$$

Проведем $O_2K\parallel CB$, тогда $O_2K\perp O_1M$ и $|O_1K|^2=|O_1O_2|^2-|O_2K|^2$, т. е.

$$\left(\sqrt{5-\frac{x^2}{4}}-\sqrt{2-\frac{x^2}{4}}\right)^2=9-x^2.$$

Решая это уравнение, находим $x=6/\sqrt{5}$, таким образом, $AB=6/\sqrt{5}$ см.

18. Обозначим $|MC|=y$ (рис. 377), тогда из условия $|CP|:|PM|=9:16$ находим $CP=\frac{9}{25}y$. По теореме о касательной и секущей имеем $|CN|^2=|CP|\,|MC|$, откуда находим $|CN|=\frac{3}{5}y$. Пусть O — центр окружности, тогда $OM\perp AB$, $ON\perp DC$ и из условия $AB\parallel CD$ следует, что точки M, O и N лежат на одной прямой. Из прямоугольного треугольника CMN находим $|MN|=\frac{4}{5}y$. Обозначим $|ME|=x$, тогда

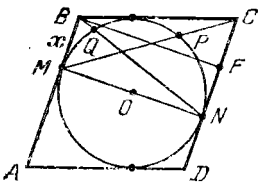


Рис. 377.

$|DN|=|MB|=x$ и $|BC|=|DC|=x+\frac{3}{5}y$. Проведем $BF\parallel MN$, очевидно, что

$|BF|=|MN|=\frac{4}{5}y$, $|CF|=\frac{3}{5}y-x$. По теореме Пифагора имеем

$$\left(\frac{3}{5}y+x\right)^2=\left(\frac{3}{5}y-x\right)^2+\left(\frac{4}{5}y\right)^2,$$

откуда находим $x=\frac{4}{15}y$.

Далее, из прямоугольного треугольника MBN получаем $|BN|=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}y$, и по теореме о касательной и секущей имеем $|MB|^2=|BN|\cdot|BQ|$, откуда $|BQ|=\frac{2}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}y$. Теперь находим

$$|BQ|:|QN|=|BQ|:(|BN|-|BQ|)=1:9.$$

19. Пусть прямая BM пересекает вторую окружность в точке K (рис. 378). Угол ANB опирается на диаметр, он прямой, поэтому диаметр QP перпендикулярен хорде KM и делит ее пополам: $|KN|=|NM|$. Далее, хорда CD перпендикулярна диаметру AB, поэтому $\overset{\frown}{CmB}=\overset{\frown}{DnB}$ и $\overset{\frown}{CNB}=\overset{\frown}{DNB}$. Пусть прямая DN пересекает вторую окружность в точке F, тогда $\overset{\frown}{KNF}=\overset{\frown}{DNB}=\overset{\frown}{CNB}$. Кроме того, при симметрии относительно диаметра PQ вторая окружность переходит в себя, и так как $KN\perp PQ$ и $|KN|=|NM|$, то точка M отображается на точку K. Углы MNC и KNF конгруэнтны, поэтому точка C отображается на точку F. Отсюда следует, что $|FN|=|NC|$. По свойству пересекающихся хорд (§ 3 гл. XIII) имеем $|KM|\cdot|NM|=|FN|\cdot|ND|$, откуда получаем $|MN|=\sqrt{|NC|\cdot|ND|}=\sqrt{ab}$.

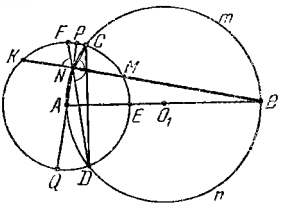


Рис. 378.

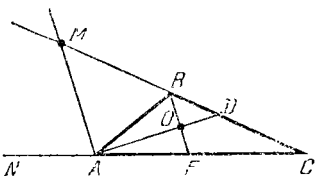


Рис. 379.

20. Пусть $BF\parallel AM$ (рис. 379); пересекая стороны угла MCA, прямые BF и AM отсекают пропорциональные отрезки:

$$\frac{|MB|}{|MC|}=\frac{|AF|}{|AC|}. \tag{1}$$

Пусть AD—биссектриса треугольника ABC, тогда $\widehat{BAD}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. но $\widehat{MAB}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{BAC}\right)$, поэтому $\widehat{MAD}=\widehat{MAB}+\widehat{BAD}=90^\circ$, т. е. биссектрисы внешнего и внутреннего углов при одной вершине треугольника перпендикулярны. По построению $BF\parallel AM$, тогда $BF\perp AD$. Таким образом, в треугольнике ABF биссектриса AO является высотой, следовательно, треугольник ABF равнобедренный: $|AF|=|AB|$. Учитывая это, из (1) получим $\frac{|MB|}{|MC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$.

Случай, когда прямую BC пересекает продолжение биссектрисы AM, рассматривается аналогично.

21. Возможны только два случая: либо точка M лежит внутри отрезка BC, либо вне отрезка BC. В первом случае (рис. 380) проведем $BK \parallel AM$, тогда $|KA| : AC = |BM| : MC$.

По условию $|BM| : MC| = |AB| : |AC|$, следовательно, $|KA| : |AC| = |AB| : AC$, откуда следует $|KA = AB|$. В равнобедренном треугольнике KAB углы при основании равны, но $\widehat{BKA} = \widehat{MAC}$ и $\widehat{KBA} = \widehat{BAM}$, поэтому $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$, т. е. AM — биссектриса треугольника ABC.

Во втором случае рассуждения аналогичны (см. рис. 379).

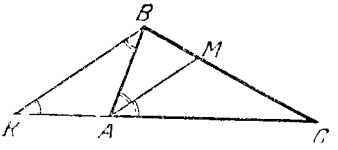


Рис. 380.

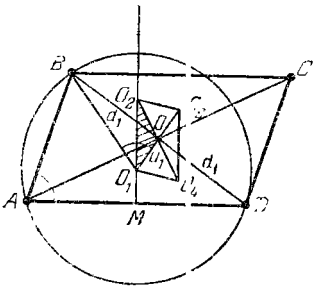


Рис. 381.

22. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 381). Центры O_1 и O_3 окружностей, описанных около треугольников DAB и DBC, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BD, но разные стороны от BD и на равном расстоянии от BD. Аналогично центры O_2 и O_4 окружностей, описанных около треугольников DAC и ABC, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC, но разные стороны от AC и на равном расстоянии от AC. Отсюда следует, что в четырехугольнике $O_1O_2O_3O_1$ его диагонали O_1O_3 и O_2O_4 пересекаясь в точке O (в точке пересечения диагоналей BD и AC параллелограмма $ABCD$), делятся пополам, следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм.

Обозначим $|BD| = 2d_1$, $|AC| = 2d_2$, $|O_1O_3| = 2u_1$, $|O_2O_4| = 2u_2$. Так как $O_1O_3 \perp BD$ и $O_2O_4 \perp AC$, то угол между диагоналями BD и AC параллелограмма $ABCD$ равен углу между диагоналями O_1O_3 и O_2O_4 параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$, поэтому

$$S_{ABCD} : S_{O_1O_2O_3O_4} = d_1d_2 : u_1u_2.$$

Пусть M — середина стороны AD, тогда точки M, O_1 и O_2 лежат на одной прямой и, как нетрудно видеть, $\widehat{ADO} = \widehat{O_2O_1O}$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Как установлено ранее, $\widehat{O_1OO_2} = \widehat{DOA}$, поэтому треугольники O_1O_2O и DAO подобны и $|CC_1| : |CO_2| = |OD| : |OA|$, т. е. $u_1 : u_2 = d_1 : d_2$. Отсюда следует, что

$$S_{ABCD} : S_{O_1O_2O_3O_4} = (d_1 : u_1)^2.$$

Заметим, что O_1 — центр окружности, описанный около треугольника DAB, поэтому вписанный угол DAB и центральный угол DO_1B опираются на одну дугу и $\widehat{DO_1B} = 2\widehat{DAB} = 2\alpha$. Далее, $O_1O \perp DB$ и $|DO| = |OB|$, следовательно, $\widehat{OO_1B} = \alpha$ и $d_1/u_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, $S_{ABCD} : S_{O_1O_2O_3O_4} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

ГЛАВА XIV

1. Заметим, что ни одна точка M, принадлежащая прямой AB или прямой BC, не может содержаться в искомом множестве. В самом деле, если $M \in (AB)$, то треугольник AMB не существует; если $M \in (BC)$, то не существует треугольник BMC.

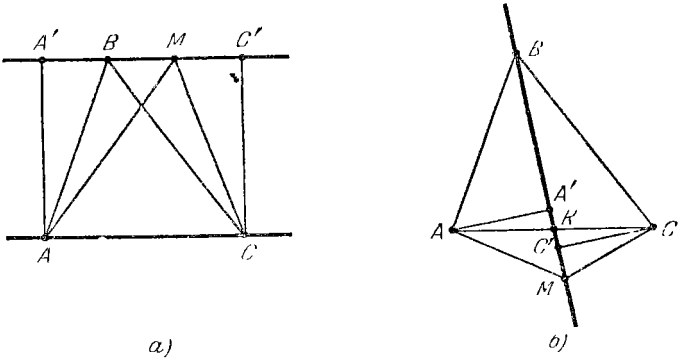


Рис. 382

Пусть M принадлежит искомому множеству. Это означает, что площади треугольников AMB и BMC равны (рис. 382). А так как у этих треугольников сторона BM общая, то высоты AA' и CC' равны, т. е. $AA' = |CC'|$. Отсюда следует, что точка M принадлежит прямой, проходящей через точку B и одинаково удаленной от точек A и C. Таких прямых, очевидно, две: одна параллельна отрезку AC (рис. 382, *а*). Другая проходит через середину K отрезка AC (рис. 382, *б*), так как тогда из равенства $|AA'| = |CC'|$ следует равенство площадей треугольников ABK и KBC, из которого вытекает, что $|AK| = |KC|$. Точка B, в которой эти прямые пересекаются, как уже отмечалось, не принадлежит искомому множеству. Из проведенных рассуждений ясно, что если точка M не принадлежит указанным прямым, то площади треугольников AMB и BMC не равны.

Таким образом, искомое множество образуют две пересекающиеся в вершине B прямые (без точки пересечения): прямая, параллельная стороне AC, и прямая, проходящая через середину стороны AC.

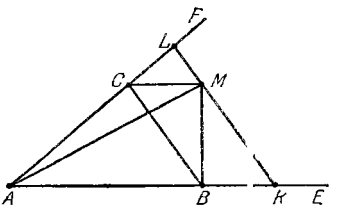


Рис. 383

2. Обозначим через Q площадь треугольника ABC и предположим для определенности, что $s > Q$. Заметим, что искомое множество не может содержать точек, расположенных на прямых AB и AC, так как в этих случаях не существует либо треугольник AMB, либо треугольник AMC.

Пусть точка M принадлежит искомому множеству. Рассмотрим сначала случай, когда M находится внутри угла EAF (рис. 383). По условию задачи

имеем $s_{\Delta AMB}+s_{\Delta AMC}=s$. Принимая во внимание очевидное равенство

$$s_{\Delta AMB}+s_{\Delta AMC}=s_{\Delta ABC}+s_{\Delta BMC},$$

получаем $s_{\Delta BMC}=s-Q$. Следовательно, в искомое множество входят такие точки M, для которых площадь треугольника BMC постоянна и равна $s-Q$. Ясно, что площадь треугольника BMC будет постоянна, если точка M будет находиться на прямой KL, параллельной стороне BC данного треугольника. Она будет равна $s-$?, если расстояние между стороной BC и прямой KL равно $2\frac{s-Q}{|BC|}$. Так как M находится внутри угла EAF, то в искомое множество входят все точки интервала KL. Если точка M расположена внутри угла EAF, но не принадлежит интервалу KL, то очевидно, что $s_{\Delta BMC}\neq s-Q$.

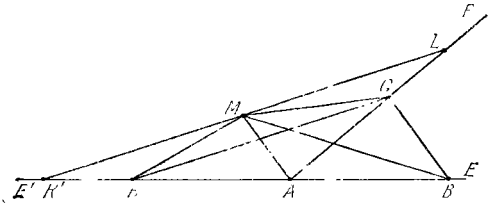


Рис. 384.

Перейдем к случаю, когда точка M лежит внутри угла FAE' (рис. 384). Отложим на луче AE' отрезок AB', конгруэнтный отрезку AB, и заметим, что $s_{\Delta AMB}=s_{\Delta AMB'}$. Последнее равенство позволяет заменить треугольник ABC треугольником $AB'C$ и тем самым прийти к случаю, который уже был рассмотрен. Следовательно, искомому множеству принадлежит и интервал $K'L$.

Рассмотрим оставшиеся два случая (рис. 385): точка M лежит внутри угла $E'AF'$ или внутри угла $F'AE$. Получим еще два интервала $K'L'$ и $L'K$, причем $[K'L']\parallel[KL]$ и $[L'K]\parallel[LK']$.

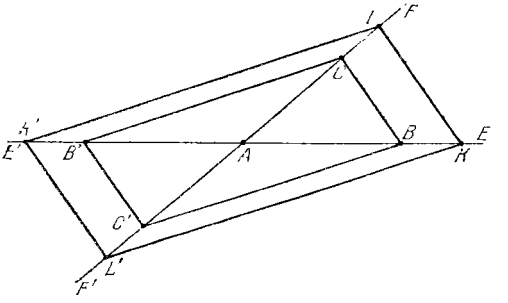


Рис. 385.

Таким образом, искомым множеством точек является граница параллелограмма $K'LKL'$, за исключением его вершин (рис. 385).

Если $s\leqslant Q$, то приведенные рассуждения нуждаются в несущественных изменениях. В этом случае в качестве искомого множества точек мы также получаем границу параллелограмма без вершин, но одна сторона параллелограмма будет находиться внутри ($s<Q$) или на границе ($s=Q$) треугольника ABC.

3. Очевидно, что точка C принадлежит искомому множеству. Пусть M — произвольная точка искомого множества, не совпадающая с точкой C (рис. 386). Рассмотрим углы MAB и MBA. Эти углы опираются в конгруэнтных окружностях на конгруэнтные дуги CM и поэтому конгруэнтны. Следовательно, $\overset{\frown}{MAB}=\overset{\frown}{MBA}$, т. е. треугольник AMB равнобедренный, причем $|MA|=|MB|$. Таким образом, если точка M принадлежит искомому множеству и не совпадает с точкой C, то она одинаково удалена от данных точек A и B, т. е. лежит на прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

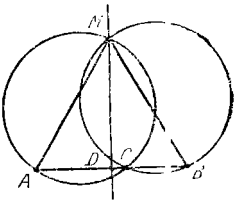


Рис. 386.

Пусть точка M принадлежит прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину точку D. Если M не совпадает с D, то M является точкой пересечения двух конгруэнтных окружностей. В самом деле, проведем через точки A, C и M одну окружность и через точки B, C и M — другую. Эти окружности удовлетворяют всем условиям задачи: первая проходит через точки A и C, вторая — через B и C; окружности пересекаются и являются конгруэнтными, так как радиус первой по теореме синусов равен $\dfrac{CM}{2\sin\overset{\frown}{MAC}}$, радиус второй равен $\dfrac{CM}{2\sin\overset{\frown}{MBC}}$. Радиусы равны из-за равенства углов: $\overset{\frown}{MAC}=\overset{\frown}{MBC}$.

Итак, искомое множество состоит из точки C и всех точек прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину, кроме середины отрезка AB.

Легко видеть, что в случае, когда точка C является серединой отрезка AB, искомым множеством является прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

4. Пусть точка M принадлежит искомому множеству, т. е. является точкой касания некоторой окружности, проходящей через точки A и B, и прямой, проходящей через точку C (рис. 387). Известно, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. Следовательно, $|CM|^2=|AC|\cdot|BC|$, т. е. точка M находится на окружности радиуса $R=\sqrt{|AC|\cdot|BC|}$ с центром в точке C.

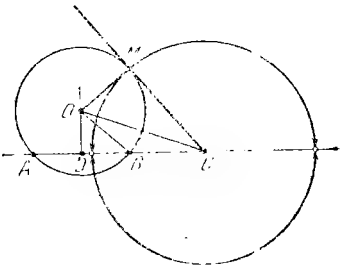


Рис. 387.

Ясно, что точка M не может лежать на данной прямой. Пусть теперь M — точка указанной окружности (рис. 387), не лежащая на данной прямой.

Проведем через M прямую, перпендикулярную к отрезку CM. Пусть O — точка пересечения этой прямой с перпендикулярной к отрезку AB прямой, проходящей через его середину. Рассмотрим окружность с центром в точке O, проходящую через точку M. Очевидно, что прямая CM является касательной

к этой окружности. Остается показать, что эта окружность проходит через точки A и B. Используя три раза теорему Пифагора, получаем

$$|OB|^2=|OD|^2+|BD|^2=|OC|^2-|DC|^2+|BD|^2=$$
$$=|OM|^2+|CM|^2-|DC|^2+|BD|^2.$$

Теперь преобразуем правую часть, применяя формулу для разности квадратов двух чисел:

$$OB|^2=|OM|^2+|CM|^2-(|DC|-|BD|)(|BD|+|DC|)=$$
$$=|OM|^2+|CM|^2-|BC||AC|.$$

Так как $|CM|^2=|BC||AC|$, то $|OB|=|OM|$.

Таким образом, искомое множество — окружность радиуса $\sqrt{|AC||BC|}$ с центром в точке C без двух точек, лежащих на данной прямой.

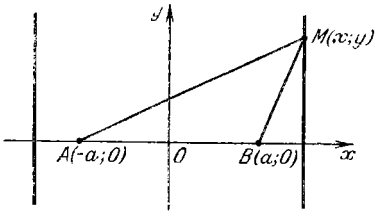


Рис. 388.

5. Пусть расстояние между данными точками A и B равно $2a$. Выберем систему координат так, как указано на рис. 388. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству, тогда

$$|AM|^2-|BM|^2=s.$$

По теореме Пифагора находим

$$|AM|^2=(x+a)^2+y^2,$$
$$|BM|^2=(x-a)^2+y^2.$$

Таким образом, искомое множество содержит точки, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению

$$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=s.$$

Упрощая это уравнение, получаем $4xa=s$. Следовательно, точка $M(x; y)$ принадлежит либо прямой $x=s/4a$, либо прямой $x=-s/4a$. Так как проделанные преобразования равносильны, то верно и обратное утверждение: каждая точка прямых $x=s/4a$ и $x=-s/4a$ принадлежит искомому множеству. На рис. 388 показано расположение прямых для случая $s=6a^2$.

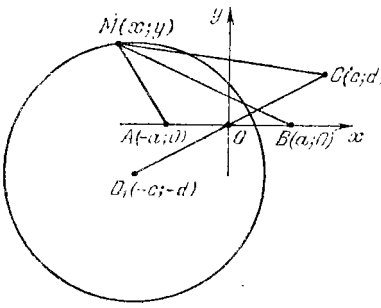


Рис. 389.

6. Обозначим первые две точки через A и B, третью через C. Выберем систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ (рис. 389). Координаты точки C в этой системе обозначим соответственно через c и d. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству. Тогда

$$|MA|^2+|MB|^2=|MC|^2 \qquad (1)$$

или

$$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=(x-c)^2+(y-d)^2.$$

Упрощая это уравнение, получаем

$$x^2+y^2+2cx+2dy=c^2+d^2-2a^2,$$
$$(x+c)^2+(y+d)^2=2c^2+2d^2-2a^2, \qquad (2)$$

Итак, координаты точки M обязаны удовлетворять уравнению (2). Верно и обратное утверждение: если координаты точки M удовлетворяют уравнению (2), то для точки M выполняется условие (1), т. е. точка M принадлежит искомому множеству.

Исследует уравнение (2). Если $c^2+d^2>a^2$, то уравнение (2) является уравнением окружности радиуса

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2d^2-2a^2}$$

с центром в точке $O_1(-c;\ -d)$. Если $c^2+d^2=a^2$, то уравнению (2) удовлетворяют только координаты точки $O_1(-c;\ -d)$. Если $c^2+d^2<a^2$, то уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Таким образом, получаем окончательный результат. Если точка C находится дальше от середины отрезка AB, чем точки A и B, то искомым множеством является окружность радиуса $R=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2d^2-2a^2}$ с центром в точке, симметричной точке C относительно середины отрезка AB. Если точка C от середины отрезка AB находится на таком же расстоянии, что и точки A и B, то искомым множеством является точка, симметричная точке C относительно середины отрезка AB. Если точка C расположена ближе к середине отрезка AB, чем точки A и B, то искомым множеством будет пустое множество.

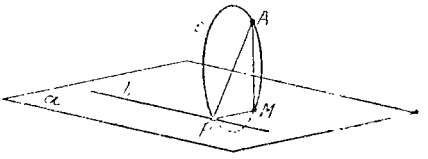


Рис. 390.

7. Пусть точка M принадлежит искомому множеству, т. е. является основанием перпендикуляра, проведенного через данную точку A к некоторой плоскости α, проходящей через данную прямую l (рис. 390).

Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую l и соединим точку A с точкой P. По теореме о трех перпендикулярах $[AP]\perp l$ и, следовательно, точка M принадлежит плоскости β такой, что $\beta\perp l$ и $A\in\beta$. Далее так как в треугольнике AMP угол AMP прямой, то точка M принадлежит окружности s с диаметром AP, лежащей в плоскости β.

Докажем обратное утверждение. Пусть M — произвольная точка окружности s. Проведем через точку M и прямую l плоскость α. Эта плоскость перпендикулярна плоскости β, в которой находится окружность s (из-за того, что $\beta\perp l$). Далее, так как AP диаметр, то $[AM]\perp[MP]$ и, следовательно, $AM]\perp\alpha$, т. е. точка M является основанием перпендикуляра, проведенного через точку A к плоскости, проходящей через данную прямую l.

Проведенное доказательство не проходит для двух точек окружности s: точки A и ее проекции на прямую l точки P.

Несмотря на это обе точки принадлежат искомому множеству. Действительно, точка A является основанием перпендикуляра, проведенного через нее к плоскости, проходящей через прямую l и точку A. Точка P — основание перпендикуляра, проведенного через точку A к плоскости, проходящей через прямую l, перпендикулярно отрезку AP.

Итак, искомое множество — окружность, расположенная в плоскости, проходящей через данную точку A перпендикулярно данной прямой l, диаметром которой является отрезок AP, где P — проекция точки A на прямую l.

8. Пусть точка M принадлежит искомому множеству, т. е. является точкой пересечения медиан некоторого треугольника ABC (рис. 391). Проведем медианы CK и SK треугольников ABC и ASB. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ASB. Соединим точку M с точкой O. Так как

$$\frac{|CM|}{|MK|}=\frac{|SO|}{|OK|}=2,$$

то $[OM]\parallel[SC]$, т. е. точка M принадлежит прямой, параллельной третьему ребру трехгранного угла и проходящей через точку O.

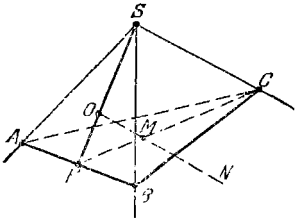


Рис. 391.

Ясно, что точки этой прямой, находящиеся вне трехгранного угла, не принадлежат искомому множеству. Точка O принадлежит множеству, так как в ней пересекаются медианы треугольника ASB (C совпадает с S)

Докажем, что все точки луча ON принадлежат искомому множеству. Пусть, M — произвольная точка этого луча. Проведем плоскость AMB. Она пересечет третье ребро в некоторой точке C.

Рассмотрим плоскость SMC. Так как $[OM]\parallel[SC]$, то плоскость SMC пересечет отрезок AB в его середине (в точке K). Следовательно, прямые CM и SO пересекаются в точке K, причем

$$\frac{|MC|}{|KM|}=\frac{|SO|}{|OK|},\quad \text{но}\quad \frac{|SO|}{|OK|}=2$$

и, следовательно, M — точка пересечения медиан треугольника AIC. Таким образом искомое множество — луч ON, сонаправленный третьему ребру трехгранного угла с началом в точке O — точке пересечения медиан треугольника ASB (S — вершина трехгранного угла).

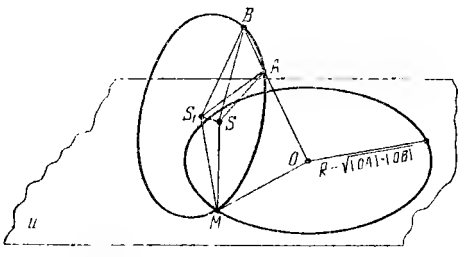


Рис. 392.

9. Пусть точка M принадлежит искомому множеству, т. е. является точкой касания некоторой сферы, проходящей через концы A и B данного отрезка, с данной плоскостью (рис. 392). Продолжим отрезок AB до пересечения с плоскостью u в точке O, соединим точку пересечения O с точкой M. Через лучи OB и OM проведем плоскость. Она пересечет сферу по окружности, касающейся луча OM в точке M. По теореме о касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, находим

$$|OM|=\sqrt{|OB|\cdot|OA|}, \qquad (1)$$

т. е. точка M находится на окружности радиуса $R=\sqrt{|OB|\cdot|OA|}$ с центром в точке O.

Докажем обратное утверждение. Пусть точка M находится на найденной окружности. Тогда справедливо равенство (1).

Проведем через три точки A, B и M вспомогательную окружность и обозначим ее центр буквой S_1. В силу условия (1) отрезок OM является касательной к этой окружности и, следовательно, $[OM] \perp [MS_1]$. Проведем теперь через точку M перпендикуляр к данной плоскости, а через точку S_1 — перпендикуляр к плоскости вспомогательной окружности. Эти два перпендикуляра расположены в плоскости, перпендикулярной к отрезку OM и проходящей через точку M. Легко видеть, что они не могут быть параллельны. Обозначим буквой S точку их пересечения. Соединим точку S с точками A и B. Проекциями отрезков SA, SB, SM на плоскость вспомогательной окружности являются соответственно ее радиусы S_1A, S_1B, S_1M. Из этого заключаем, что $|SA| = |SB| = |SM|$. Следовательно, сфера с центром в точке S и с радиусом $|SM|$ касается данной плоскости в точке M и проходит через концы отрезка AB, т. е. точка M принадлежит искомому множеству.

Итак, искомое множество найдено. Это окружность, лежащая в данной плоскости, с центром в точке O (точке пересечения продолжения данного отрезка с плоскостью) и с радиусом $R = \sqrt{OB \cdot OA}$.

10. Проведем через данную прямую l_1 плоскость α_1, параллельную прямой l_2, и через прямую l_2 плоскость α_2, параллельную прямой l_1 (рис. 393). Докажем, что искомым множеством является множество всех точек плоскостей α_1 и α_2, не принадлежащих прямым l_1 и l_2. Если точка M_1 принадлежит плоскости α_2, но не лежит на прямой l_2, и если через нее проходит прямая, пересекающая прямую l_2, то эта прямая лежит в плоскости α_2 и, следовательно, не может пересекать прямую l_1, которая лежит в плоскости α_1. Точно так же показывается, что каждая точка плоскости α_1, не лежащая на прямой l_1, принадлежит искомому множеству. Докажем, что никакие другие точки пространства не обладают нужным нам свойством, т. е. покажем, что через любую другую точку пространства можно провести прямую, пересекающую l_1 и l_2. Если точка M лежит на прямых l_1 или l_2, то это очевидно. Пусть точка M не лежит ни в плоскости α_1, ни в плоскости α_2 (рис. 394). Проведем плоскость α через точку M и прямую l_1 и плоскость β через точку M и прямую l_2. Плоскости α и β пересекутся по некоторой прямой l, которая непременно пересекает и прямую l_1 и прямую l_2. В самом деле, прямая l лежит в одной плоскости α с прямой l_1. Она не параллельна прямой l_1, так как иначе точка M лежала бы в плоскости α_1. Аналогично прямая l лежит с прямой l_2 в одной плоскости β и не параллельна l_2, так как в противном случае точка M лежала бы в плоскости α_1.

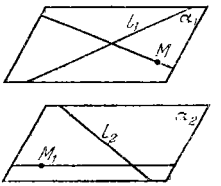


Рис. 393.

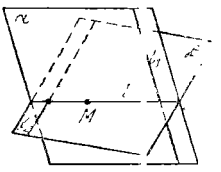


Рис. 394.

11. Применим метод подобия. Отбросим условие, что точка E лежит на стороне BC. Отложим на стороне AB произвольный отрезок AK (рис. 395). На стороне BC отложим $[CL]$, так что $|CL| = |AK|$, и через точку L прове-

дем прямую LP, параллельную стороне AC. Из точки K, как из центра, проведем окружность радиуса KA. Пусть M — точка пересечения этой окружности с прямой LP, лежащая внутри треугольника. Соединим точку M с точкой K и проведем через точку M прямую, параллельную $[BC]$. Пусть N — точка пересечения этой прямой со стороной AC. Мы получим четырехугольник $AKMN$, у которого три стороны равны $|AK| = |KM| = MN|$.

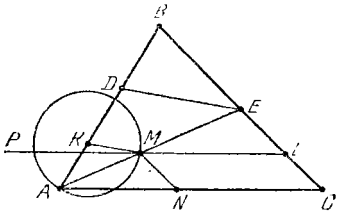


Рис. 395.

Продолжим теперь отрезок AM до пересечения со стороной BC в точке E, через точку E проведем прямую, параллельную отрезку KM и пересекающую сторону AB в точке D. Четырехугольник $ADEC$ подобен четырехугольнику $AKMN$ и, следовательно, $|AD| = |DE| = EC|$.

Задача имеет одно и только одно решение.

12. Пусть ширина канала равна h. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную каналу, и отложим на ней отрезок AA_1 длины h так, как показано на рис. 396. Соединим точку A_1 с точкой B. Пусть K — точка пересечения прямой A_1B с прямой l_1 (рис. 396, *а*). Мост надо строить в точке K, так как путь $ALKB$ является кратчайшим. В самом деле, для любого другого пути AL_1K_1B получаем

$$|AL_1| + L_1K_1| + |K_1B| = AL_1| + |LK| + L_1B_1 \geq |AL + |LK| + |LB_1| = AL + LK + |KB|.$$

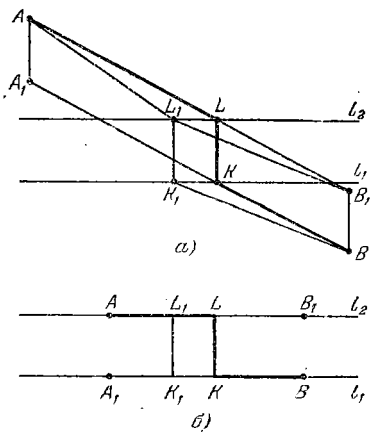


Рис. 396.

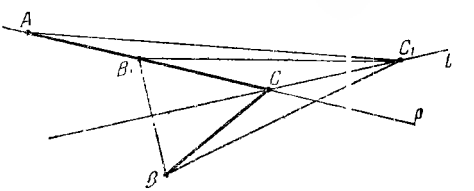


Рис. 397.

Знак равенства имеет место только тогда, когда пункты A и L расположены на берегах канала: $A \in l_2$, $B \in l_1$ (рис. 396, *б*). В этом частном случае мост можно строить в любой точке, принадлежащей отрезку A_1B.

13. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой l (рис. 397). Через точки A и B_1 проведем прямую p. Пусть $C = l \cap p$. Докажем, что точка C искомая. Рассмотрим произвольную точку $C_1 \in l$, не совпадающую с C. Тогда

$$|AC_1 - |BC_1| = |AC_1 - B_1C_1| < |AB_1| = |AC| - |B_1C| = AC| - |BC|,$$

т. е. для любой точки C_1 ($C_1 \neq C$) прямой l разность $|AC_1| - |BC|$ меньше разности $|AC| - |BC|$.

14. Построим сначала точку M_1, симметричную точке M относительно стороны AO, затем точку N_1, симметричную точке N относительно стороны BO (рис. 398). Проведем прямую M_1N_1. Отметим точки K и L — точки пересечения прямой M_1N_1 со сторонами угла. Из конгруэнтности треугольников MPK и M_1PK и треугольников NQL и N_1QL следует, что луч света нужно направить из точки M в точку K.

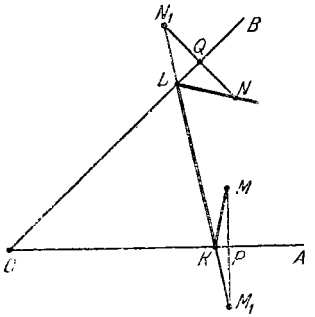


Рис. 398.

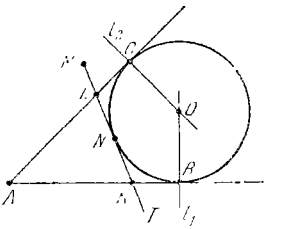


Рис. 399.

15. Отложим от вершины A на сторонах угла отрезки AB и AC длины p (рис. 399). Через точки B и C проведем прямые l_1 и l_2, перпендикулярные сторонам угла. Пусть $O=l_1\cap l_2$. Построим окружность с центром в точке O радиуса $r=|OB|=|OC|$. Из данной точки M проведем касательную MT к этой окружности. Треугольник KLA, где K и L — точки пересечения касательной со сторонами угла, имеет периметр равный $2p$, т. е. является искомым. Докажем это:

$$|AK|+|KL|+|AL|=|AK|+|KN|+|NL|+|AL|=$$
$$=|AK|+|KB|+|LC|+|AL|=|AB|+|AC|=2p.$$

ГЛАВА XV

1. а) Середины ребер тетраэдра обозначим $S_1, S_2, \ldots, S_6$ (рис. 400), точки пересечения медиан граней — M_1, M_2, M_3, M_4. Отрезки DM_1 и AM_2 лежат в плоскости ADS_1 и, очевидно, пересекаются, их точку пересечения обозначим O. Поскольку $[M_1M_2]\parallel[DA]$ и $|M_1M_2|:|DA|=1:3$, то из подобия треугольников M_1OM_2 и DOA следует, что $DO:OM_1|=|AO|:|OM_2|=|DA|:|M_1M_2|=3:1$. Аналогично (из рассмотрения треугольников BS_5D и CS_3D) доказывается, что и отрезки BM_3 и CM_4 пересекают отрезок DM_1 в точке, делящей его в отношении $3:1$, считая от вершины, т. е. в той же точке O. Отрезки BM_3 и CM_4 разделены этой точкой в таком же отношении.

б) Докажем, что точка O является серединой отрезка S_1S_2. Рассмотрим треугольник ADS_1 (рис. 400, 401). Обозначим $O'=[DM_1]\cap[S_1S_2]$ и докажем, что $O'=O$. Отрезок S_1S_2 — медиана в треугольнике DS_1A, и поскольку $[M_1M_2]\parallel[AD]$, отрезок S_1S_2 пересекает отрезок M_1M_2 в его середине K (рис. 401). Учитывая, что $|KM_1|:|S_2D|=|M_1M_2|:|DA|=1:3$, из подобия треугольников KM_1O' и S_2DO' получаем, что $|KO'|:|S_2O'|=|M_1O'|:|DO'|=1:3$. Из последнего равенства и следует, что $O'=O$. Кроме того, получаем,

что $|O'S_2| = \frac{3}{4}|KS_2|$, а поскольку $|KS_2| = \frac{2}{3}|S_1S_2|$, то $|O'S_2| = \frac{1}{2}|S_1S_2|$. Таким образом, точка O ($O = O'$) является серединой отрезка S_1S. Из рассмотрения треугольников CS_3D и BS_6D аналогично доказывается, что точка O — середина отрезков S_3S_4 и S_5S_6.

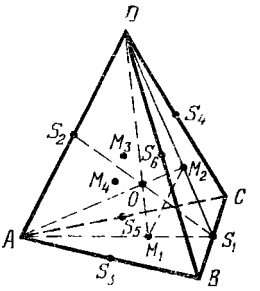


Рис. 400.

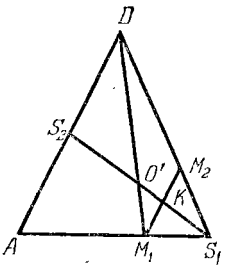


Рис. 401.

2. Построение сечения показано на рис. 402: 1) $S = (MN) \cap (AC)$, 2) $Q = (SP) \cap [AB]$.

Обозначим $BQ_1 = xa$ и проведем $[QQ_1] \parallel [AC]$. Тогда $|QQ_1| = |BQ_1| = xa$, и так как $BP = \frac{4}{5}a$, то $|Q_1P| = \left(\frac{4}{5} - x\right)a$. Из подобия треугольников SPC и QPQ_1 следует, что $|SC| : |QQ_1| = |CP| : |Q_1P|$, откуда $|SC| = \frac{x}{4-5x}a$. Проведем $[MM_1] \parallel [AC]$. Рассуждая аналогично, найдем, что $|SC| = a/3$. Значит, $x/(4-5x) = 1/3$, откуда $x = 1/2$, $|BQ| = a/2$.

Ответ: $a/2$.

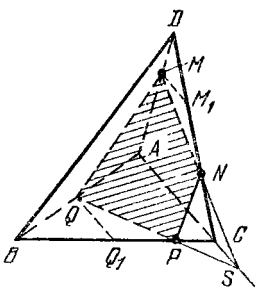


Рис. 402.

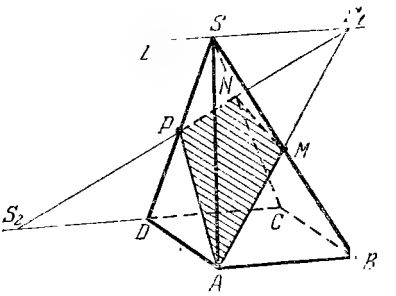


Рис. 403.

3. Строим точку пересечения прямой AM с плоскостью SCD. Так как $(AB) \parallel (CD)$, то $(AB) \parallel (SCD)$, и значит, плоскости SAB и SCD пересекаются по прямой, параллельной (AB) (на рис. 403 $l \parallel (AB)$). Находим $S_1 = AM) \cap l = (AM) \cap (SCD)$, $N = (S_1P) \cap [SC]$. Сечение — четырехугольник $AMNP$.

Пусть $S_2 = (S_1P) \cap (CD)$. Поскольку M и P — середины отрезков SB и SD, то $|S_1S| = |AB|$, $|S_2D| = |S_1S|$. А так как $|CD| = |AB|$, то $|S_2D| = |CD|$,

а $|S_2C|=2|CD|$. Теперь из подобия треугольников SNS_1 и CNS_2 получаем $|SN|:|NC|=|SS_1|:|CS_2|=1:2$.

Ответ: 1 : 2, считая от вершины.

4. Рассмотрим плоскость NQP. Она пересекает грань BCC_1B_1 по отрезку CQ. Плоскость сечения пересекает плоскость NQP по прямой, параллельной прямой NQ. Проводим в плоскости NQP прямую $(PT)\parallel(NQ)$ (рис. 404). Точка $T=(PT)\cap(CQ)$ принадлежит плоскости сечения. Отметим, что так как $|CP|=|PN|$, то и $|CT|=|TQ|$. Дальнейшие построения: $S_1=(MP)\cap(BC)$, $S_2=(S_1T)\cap[CC_1]$, $S_3=(S_1T)\cap[B_1C_1]$, $S_4=(S_1T)\cap(BB_1)$, $S_5=(MP)\cap(AB)$, $S_6=(S_4S_5)\cap[A_1B_1]$, $S_7=(S_4S_5)\cap[AA_1]$. Сечение — шестиугольник $MPS_2S_3S_6S_7$.

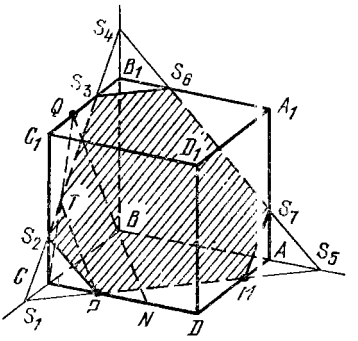


Рис. 404.

Найдем площадь сечения. Легко видеть, что $|S_1C|=|S_5A|=a/3$. Поскольку T — середина отрезка CQ, то $|QS_3|=|S_1C|=a/3$ и $|S_3B_1|=a/3$. Из подобия треугольников S_1S_2C и $S_3S_4B_1$ треугольнику $S_3S_2C_1$ следует, что $|S_2C|=|S_3B_1|=a/3$. Таким образом, $BS_1|=|BS_4|=|BS_5|=4a/3$, а отсюда следует, что треугольник $S_1S_1S_5$ правильный и длина его стороны равна $4\sqrt{2}\,a/3$, а площадь равна $8\sqrt{3}\,a^2/9$. Каждый из треугольников S_1S_2P, $S_4S_6S_3$, S_5MS_7 подобен треугольнику $S_1S_4S_5$ с коэффициентом, равным 1/4. Значит, площадь каждого из этих треугольников равна $\frac{1}{16}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$. Теперь находим площадь сечения: $\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}a^2=\frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$.

Ответ: $\frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$.

5. Пусть $MNPQ$ — сечение тетраэдра плоскостью, параллельной прямым AC и BD (рис. 405, $[MN]\parallel[QP]\parallel[AC]$, $[MQ]\parallel[NP]\parallel[BD]$). Тогда $\widehat{(MN, MQ)}=\widehat{(AC, BD)}=\varphi$, а значит, $\widehat{QMN}=\varphi$ или $\widehat{QMN}=\pi-\varphi$. В обоих случаях $\sin\widehat{QMN}=\sin\varphi$. Обозначим $|AM|:|AB|=x$, тогда $|MQ|=x|BD|=xb$, а так как $|MB|=(1-x)|AB|$, то $|MN|=(1-x)|AC|=(1-x)a$. Находим площадь сечения: $S=|MQ|\,|MN|\sin\varphi=x(1-x)ab\sin\varphi$, где $0<x<1$. Функция $x(1-x)$ (это квадратный трехчлен $-x^2+x$) имеет наибольшее значение при $x=1/2$, и оно равно 1/4. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через середины ребер AB, BC, CD и AD, и эта площадь равна $\frac{1}{4}ab\sin\alpha$.

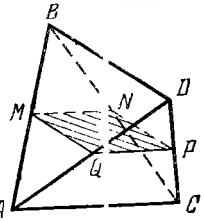


Рис. 405.

Ответ: $\frac{1}{4}ab\sin\alpha$.

6. Необходимость. Пусть $a \parallel \gamma$, тогда лучи $[A_1A_2)$, $[MN)$, $[MP)$ (рис. 406) лежат на прямых, параллельных плоскости γ. Это означает, что векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$ компланарны. Поскольку векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$ не коллинеарны (точки M, N и P не лежат на одной прямой), вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ разлагается по этим векторам: $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$.

Достаточность. Пусть $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$. От точки M отложим вектор $\overrightarrow{MQ} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$. Если $\beta = 0$, то $\overrightarrow{MQ} = \alpha\overrightarrow{MN}$ и точка Q лежит на прямой MN. Так как $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MQ}$, то направления этих векторов совпадают, а это значит, что лучи $[A_1A_2)$ и $[MQ)$, задающие эти направления, лежат на параллельных прямых, т. е. $a \parallel (MN)$. Отсюда следует, что $a \parallel \gamma$. Аналогично, если $\alpha = 0$, получим, что $a \parallel (MP)$, т. е. $a \parallel \gamma$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то согласно правилу параллелограмма точка Q принадлежит плоскости γ. Значит, и $(MQ) \subset \gamma$. Из того, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MQ}$, как и ранее, получаем, что $a \parallel (MQ)$, т. е. $a \parallel \gamma$.

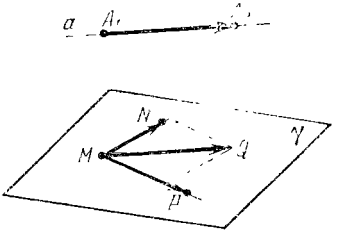


Рис. 406.

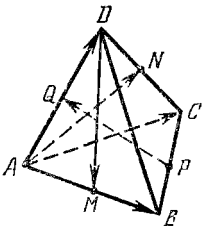


Рис. 407.

7. Пусть $Q \in [AD]$, обозначим $AQ : AD = x$ (рис. 407). Поскольку прямые DM и AN параллельны плоскости, проведенной через прямую PQ, то векторы $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ компланарны. А так как векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AN}$, очевидно, не коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{PQ}$ разлагается по этим векторам, т. е. существуют числа α и β такие, что

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\overrightarrow{DM} + \beta\overrightarrow{AN}. \qquad (1)$$

Разложим векторы $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AN}$ по некомпланарным векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Имеем $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AD}$. Подставляя эти разложения в (1), получаем $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AD} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{AD}$, откуда находим, что $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $x = 1/2$. Значит, $AQ = AD/2$, а $AQ : QD = 1 : 1$.

Ответ: 1 : 1.

8. Векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ коллинеарны вектору $\overrightarrow{AC_1}$ (рис. 408). Поэтому $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC_1}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{A_1P} = -\overrightarrow{AA_1} + x\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC_1}$. Поскольку $(A_1P) \perp (AC_1)$, то $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$, откуда $x =$

$= \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|^2}$. Так как $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, то $|AC_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ и $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = c^2$. Значит, $x = c^2/(a^2+b^2+c^2)$. Аналогично находим, что $y = a^2/(a^2+b^2+c^2)$. Далее, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (y-x)\overrightarrow{AC_1}$, и значит, $|PQ| = |y-x| \cdot |AC_1| = |c^2-a^2|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ответ: $|c^2-a^2|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

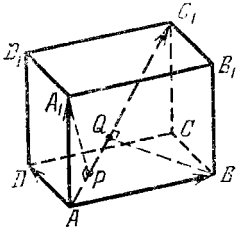


Рис. 408.

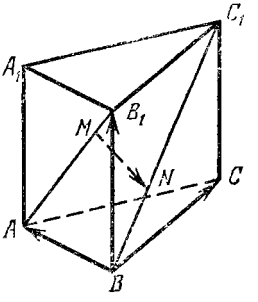


Рис. 409.

9. Поскольку $(MN) \perp (AB)$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. Разложим вектор $\overrightarrow{MN}$ по некомпланарным векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ (рис. 409). Обозначим $|MB_1| : |B_1B| = x$, $|BN| : |BC_1| = y$. Имеем $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BB_1} + y\overrightarrow{BC_1} = x(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BB_1} + y(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) = -x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} + (x+y-1)\overrightarrow{BB_1}$. Из того что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ и $\overrightarrow{MN}^2 = a^2/3$, учитывая, что $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BB_1}| = a$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2/2$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$, получаем

$$\begin{cases} -xa^2 + \dfrac{y}{2}a^2 = 0, \\ x^2a^2 + y^2a^2 + (x+y-1)^2a^2 - xya^2 = a^2/3. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y = 2x$, и поэтому из второго уравнения получаем $36x^2 - 18x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/6$. Соответственно находим, что $y_1 = 2/3$; $y_2 = 1/3$. Отсюда легко найти, что либо $|AM| : |MB_1| = |BN| : |NC_1| = 2:1$, либо $|AM| : |MB_1| = 5:1$, $|BN| : |NC_1| = 1:2$.

Ответ: $|AM| : |MB_1| = |BN| : |NC_1| = 2:1$, или $|AM| : |MB_1| = 5:1$, $|BN| : |NC_1| = 1:2$.

ГЛАВА XVI

1. Пусть $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$. Нужно доказать, что $\gamma \perp c$.

На прямой c возьмем точку M и проведем через нее в плоскости α перпендикуляр c_1 к a, а в плоскости β — перпендикуляр c_2 к b. Тогда $c_1 \perp \gamma$, $c_2 \perp \gamma$, и так как через одну точку M можно провести только один перпендикуляр к γ, то $c_1 = c_2$. Поскольку $c_1 \subset \alpha$, а $c_2 \subset \beta$, то $c_1 = c_2 = \alpha \cap \beta = c$. Значит $c \perp \gamma$, что и требовалось доказать.

2. Докажем, что из а) следует б). Пусть $|SA_1|=|SA_2|=\ldots=|SA_n|=l$ (рис. 410), SO — высота пирамиды, $|SO|=H$. Имеем $\sin\widehat{SA_1O}=\sin\widehat{SA_2O}=\ldots$ $\ldots=\sin\widehat{SA_nO}=H/l$, откуда $\widehat{SA_1O}=\widehat{SA_2O}=\ldots=\widehat{SA_nO}$, т. е. боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания.

Докажем, что из б) следует в). Пусть $\widehat{SA_1O}=\widehat{SA_2O}=\ldots=\widehat{SA_nO}=\varphi$. Тогда $|OA_1|=|OA_2|=\ldots=|OA_n|=H\operatorname{ctg}\varphi$, значит, окружность с центром O и радиусом $R=H\operatorname{ctg}\varphi$ описана около основания пирамиды.

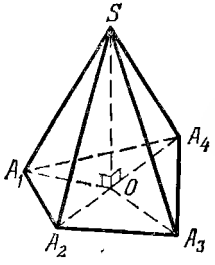


Рис. 410.

Наконец, докажем, что из в) следует а). Пусть O — центр окружности, описанной около основания, тогда $|OA_1|=|OA_2|=\ldots=|OA_n|=R$ — радиус окружности. Поскольку SO — высота пирамиды, то $|SA_1|=|SA_2|=\ldots$ $\ldots=|SA_n|=\sqrt{R^2+H^2}$, т. е. боковые ребра имеют равные длины. Таким образом, доказано, что а) влечет б) б) влечет в), а в) влечет а). Отсюда и следует, что любые два из этих трех утверждений равносильны.

3. Плоскость, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему, является множеством всех точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

Пусть O — центр окружности, описанной около грани ABC тетраэдра (рис. 411), l — прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC. Каждая точка прямой l равноудалена от точек A, B, C. Действительно, $|OA|=|OB|=|OC|$, и если $S\in l$, $S\neq O$, то из прямоугольных треугольников SOA, SOB и SOC получаем, что $|SA|=|SB|=|SC|$. Пусть плоскость α проходит через середину ребра AD и перпендикулярна ему. Докажем, что α и l пересекаются. Предположим, что $\alpha\parallel l$. Из того, что $AD)\perp\alpha$, а $l\parallel\alpha$, следует, что $(AD)\perp l$. Поскольку еще $l\perp(AB)$, то $l\perp(ABD)$. Получили, что через точку A проведены две разные плоскости ABC и ABD, перпендикулярные прямой l. Но это невозможно, следовательно, утверждение, что $l\parallel\alpha$, неверно, т. е. $l\not\parallel\alpha$. Пусть $S=l\cap\alpha$. Тогда $|SD|=|SA|$, так как $S\in\alpha$, и $|SB|=|SC|=|SA|$, так как $S\in l$. Значит, точка S равноудалена от всех точек A, B, C и D, а потому принадлежит каждой плоскости, проходящей через середину ребра тетраэдра и перпендикулярной этому ребру.

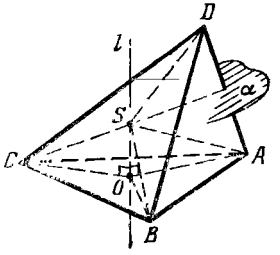


Рис. 411.

4. В плоскости ASC через середину M ребра SC проведем перпендикуляр к этому ребру, он будет лежать в плоскости сечения. Точку пересечения этого перпендикуляра с AC обозначим K и найдем $|KC|$. Из треугольника SOC (рис. 412, *а*, *б*) имеем $\cos\varphi=|OC|:|CS|=a:\sqrt{2}\,l$, следовательно, а) $\cos\varphi=1/\sqrt{3}$, б) $\cos\varphi=1/\sqrt{5}$. Теперь из треугольника KMC находим: а) $|KC|=|MC|:\cos\varphi=\frac{3}{4}a\sqrt{2}=\frac{3}{4}|AC|$, б) $|KC|=\frac{5}{4}a\sqrt{2}=\frac{5}{4}|AC|$. Отправляясь от найденной точки K, строим сечение. Плоскость α сечения и прямая BD

перпендикулярны ребру SC, поэтому они параллельны. Значит, и линия пересечения плоскостей α и $ABCD$ параллельна (BD). Проводим $(EF) \parallel (BD)$ затем (EM) и (FM). В результате получаем сечения: а) пятиугольник $MNPQR$; б) четырехугольник $MNPQ$.

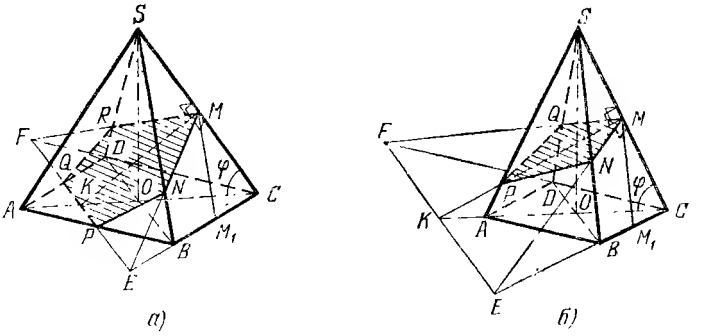


Рис. 412.

Найдем площади сечений.

а) Имеем $|MK| = |MC| \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $|EF| = 2|KC| = \frac{3}{\sqrt{2}}a$, $S_{EFM} = \frac{1}{2}|EF| \cdot |MK| = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^2$. Легко видеть, что $|CE| = \frac{3}{2}|BC|$, а $|BE| = \frac{1}{3}|CE|$, отсюда $|EP| = \frac{1}{3}|EF|$. Проведем $[MM_1] \parallel [SB]$, тогда $|EB| = |BM_1|$, и значит, $|EN| = \frac{1}{2}|EM|$. Из того, что $|EP| = \frac{1}{3}|EF|$ и $|FN| = \frac{1}{2}|EM|$, следует, что $S_{EPN} = \frac{1}{6}S_{EFM}$. Из симметрии всех фигур относительно плоскости SAC следует, что $S_{FQR} = S_{EPN} = \frac{1}{6}S_{EFM}$. Значит, площадь сечения равна $S_{EFM} - S_{FPN} - S_{FQR} = \frac{2}{3}S_{EFM} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2$.

б) Аналогично находим $|KM| = \sqrt{\frac{5}{2}}a$, $|EF| = \frac{5}{\sqrt{2}}a$, $S_{EFM} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a^2$. В ΔPSM имеем $\widehat{PSM} = \pi - 2\varphi$, $\operatorname{tg}\widehat{PSM} = -\operatorname{tg}2\varphi = 4/3$, $|PM| = |MS| \cdot \operatorname{tg}\widehat{PSM} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}a$. Значит, $|PM| = \frac{2}{3}|KM|$. Проведем $[MM_1] \parallel [SB]$. Имеем $|EC| = \frac{5}{2}|BC|$, $|EM_1| = 2|BC|$, $|BM_1| = \frac{1}{2}|BC|$, значит, $|MN| : |ME| = |M_1B| : |M_1E| = 1 : 4$. Из того, что $|MP| = \frac{2}{3}|MK|$, $|MN| = \frac{1}{4}|ME|$, следует, что $S_{MNP} = \frac{1}{6}S_{MEK}$, т. е. $S_{MNPQ} = \frac{1}{6}S_{MEF} = \frac{5\sqrt{5}}{24}a^2$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$, б) $\frac{5\sqrt{5}}{24}a^2$.

5. Диагональ A_1C куба перпендикулярна плоскости BDC_1 (рис. 413), поэтому плоскость сечения параллельна прямой A_1C. Исходя из этого, строим сечение следующим образом: в плоскости A_1DCB_1 через ее точку O пересечения с диагональю AD_1 проводим прямую, параллельную A_1C, до пересечения с ребром CD в точке K, в результате получаем сечение — треугольник AD_1K. Поскольку $|DO|=|OA_1|$, то и $|DK|=|KC|$. Обозначим длину ребра куба через a. Объем пирамиды D_1ADK равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DK|\cdot|DD_1|=\frac{1}{12}a^3$. Отсюда следует, что отношение объемов частей куба, на которые он разделен сечением, равно 1 : 11.

Ответ: 1 : 11.

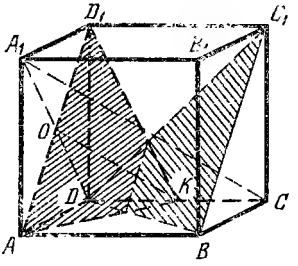


Рис. 413.

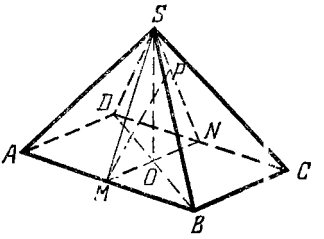


Рис. 414.

6. Обозначим $|SB|=a$ (рис. 414). Найдем длину h перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость SCD, т. е. расстояние от этой точки до плоскости SCD. Так как $(AB)\parallel(SCD)$, то расстояние от середины M ребра AB до плоскости SCD также равно h. Пусть N — середина ребра CD, тогда $(SMN)\perp(SCD)$, и если $[MP]\perp(SN)$, то $[MP]\perp(SCD)$, а значит, $|MP|=h$. Найдем $|MP|$ как высоту треугольника SMN. Так как $\widehat{SBO}=\pi/4$, то $|SO|=|OB|=a/\sqrt{2}$, и значит, $|MO|=a/2$, $|MN|=a$, $|SN|=\sqrt{|SO|^2+|ON|^2}=a\sqrt{3}/2$. Теперь находим $h=|MP|=|SO|\cdot|MN|:|SN|=\sqrt{2/3}a$. Отсюда, если α — угол между (SB) и (SCD), то $\sin\alpha=h/a=\sqrt{2/3}$.

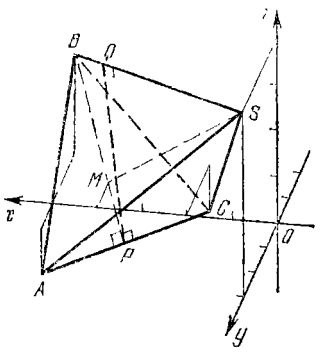


Рис. 415.

Ответ: $\arcsin\sqrt{2/3}$.

7. Если $M_0\in\alpha$, то и $\rho=0$, и $ax_0+by_0+cz_0+d=0$, значит, в этом случае формула верна. Пусть $M_0\notin\alpha$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на α. Обозначим $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM}_0=(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OM}_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, где O — начало координат. Равенство $ax_1+by_1+cz_1+d=0$ можно переписать в виде $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1+d=0$, где $\boldsymbol{n}=(a;\ b;\ c)$ — вектор, перпендикулярный плоскости. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$ и

$\boldsymbol{n}$ коллинеарны, поэтому $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{n}$, откуда $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{n}$. Тогда $(\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}+d=0$, и значит, $\lambda=-\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0+d}{|\boldsymbol{n}|^2}$. Теперь имеем

$$\rho=|\overrightarrow{M_0M_1}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{n}|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0+d|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

8. Пусть M — центр основания ABC (рис. 415), тогда $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(4;\ -1;\ 0)$. Точка S имеет координаты $S(0;\ y;\ z)$, поэтому $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}=(-4;\ y+1;\ z)$. Находим $\overrightarrow{AB}=(0;\ -3;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;\ -3;\ 0)$. Поскольку $(MS)\perp(ABC)$, то $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Записывая эти равенства в координатах, получаем $-3(y+1)+3z=0$, $12-3(y+1)=0$, откуда $y=3$, $z=4$.

Пусть P — середина ребра AC, PQ — перпендикуляр к (SB) в плоскости SBP. Так как $(AC)\perp(SBP)$, то $(AC)\perp(PQ)$, и значит, PQ — общий перпендикуляр к прямым AC и SB, а $|PQ|$ — расстояние между этими прямыми. Имеем $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=(7/2;\ -1/2;\ -1)$, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(-3/2;\ 3/2;\ -3)$, $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OB}=(-5;\ 5;\ 2)$, $\overrightarrow{MS}=(-4;\ 4;\ 4)$. Отсюда $|BP|=\sqrt{27/2}$, $|BS|=\sqrt{54}$, $|MS|=\sqrt{48}$, а $|PQ|=|BP|\cdot|MS|:|BS|=2\sqrt{3}$.

9. Пусть l — ребро двугранного угла (рис. 416). Проведем плоскости $(APM)\perp l$ и $(BQN)\perp l$, тогда $\widehat{APM}=\widehat{BQN}=\pi/3$. Проведем еще перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскостям граней γ_2 и γ_1 угла. Поскольку двугранный угол острый, точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах PM и QN линейных углов. По условию $\widehat{BAB_1}=\pi/6$, $\widehat{ABA_1}=\arcsin 0{,}7$. Пусть $(AC)\parallel l$, тогда $(AC)\perp(BQN)$, и значит, $\widehat{BCA}=\pi/2$. Угол BAC — острый, его величина и равна углу между (AB) и l. Обозначим $AB=a$.

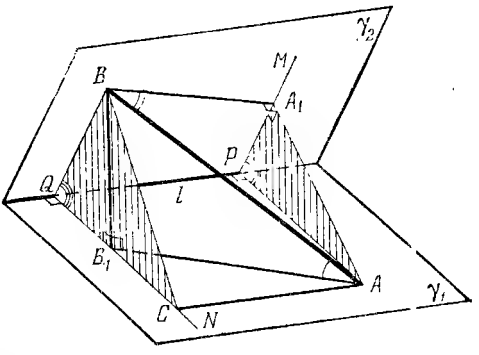


Рис. 416.

Находим $|BB_1|=a\cdot\sin\widehat{BAB_1}=a/2$, $|QB_1|=|BB_1|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BQB_1}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $|AA_1|=a\cdot\sin\widehat{ABA_1}=0{,}7a$, $|PA|=|AA_1|:\sin\widehat{APA_1}=7a/5\sqrt{3}$. Поскольку $|QC|=|PA|$, то $B_1C=|PA|-|QB_1|=9a/10\sqrt{3}$, В $\triangle AB_1C$ имеем $|AB_1|=a\cdot\cos(\pi/6)=a\sqrt{3}/2$, $|AC|=\sqrt{|AB_1|^2-|B_1C|^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}a$. Следовательно, $\cos\widehat{BAC}=|AC|:|AB|=2\sqrt{3}/5$.

Ответ: $\arccos(2\sqrt{3}/5)$.

10. Строим сечение $ABMN$ (рис. 417, $[MN]\parallel[AB]\parallel[CD]$). Объем пирамиды $SABCD$ обозначим V, объем пирамиды $SABMN$ — V_1. Объем V_1 равен сумме

объемов V_2 и V_3 пирамид $SBMN$ и $SBAN$. Сравним объемы пирамид $SBMN$ и $SBCD$. Примем за основания этих пирамид грани SMN и SCD точка B — общая вершина пирамид. Поскольку $|SM| = \frac{1}{2}|SC|$, то $S_{SMN} = \frac{1}{4} S_{SCD}$, и значит, $V_2 = \frac{1}{4} V_{SBCD}$. Очевидно, $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V$, поэтому $V_2 = \frac{1}{8} V$.

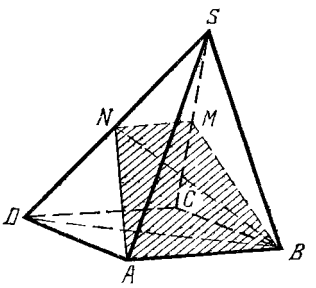


Рис. 417.

Рассмотрим пирамиды $SBAN$ и $SBAD$. За их основания примем грани SAN и SAD, точка B — общая вершина этих пирамид. Поскольку N — середина ребра SD, то $S_{SAN} = \frac{1}{2} S_{SAD}$, и значит, $V_3 = \frac{1}{2} V_{SBAD} = \frac{1}{4} V$. Теперь находим объем $V_1 = V_2 + V_3 = \frac{3}{8} V$. Объем другой отсеченной части равен $\frac{5}{8} V$, а отношение объемов частей равно 3 : 5.

11. Ясно, что тетраэдр и параллелепипед имеют общую вершину, которую обозначим D (рис. 418). Ребра параллелепипеда, выходящие из этой вершины, лежат на ребрах тетраэдра. Грани ABC тетраэдра может принадлежать лишь вершина параллелепипеда, не лежащая с вершиной D в одной грани. Такая вершина только одна, ее обозначим F_1. Рассмотрим сечения тетраэдра плоскостями $D_1E_1F_1G_1$ и DD_1F_1F. Обозначим $|CF_1| : CK| = y$, $|MF_1| : MN| = x$. H — высота тетраэдра из вершины C, h — высота параллелепипеда на основание $DEFG$. Высота тетраэдра CD_1MN из вершины C равна $H - h$. Этот тетраэдр гомотетичен тетраэдру $CDAB$ с центром C и коэффициентом y. Поэтому $S_{D_1MN} = y^2 \cdot S_{DAB}$, $H - h = yH$, т. е. $h = (1 - y)H$. Треугольники ME_1F_1 и MD_1N подобны с коэффициентом x, поэтому $S_{ME_1F_1} = x^2 \cdot S_{MD_1N}$, а треугольники NG_1F_1 и ND_1M подобны с коэффициентом подобия $1 - x$, поэтому $S_{NG_1F_1} = (1 - x)^2 S_{ND_1M}$. Отсюда следует, что $S_{D_1E_1F_1G_1} = S_{D_1MN} - S_{ME_1F_1} - S_{NG_1F_1} = 2x(1 - x) S_{D_1MN} = 2x(1 - x) y^2 S_{DAB}$. Находим объем параллелепипеда: $V_п = S_{D_1E_1F_1G_1} \cdot h = 2x(1 - x) y^2 (1 - y) S_{DAB} \cdot H$. Поскольку $S_{DAB} \cdot H = 3V$, то $V_п = 6x(1 - x) y^2 (1 - y) V$, где $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Функция $x(1 - x)$ имеет наибольшее значение при $x = 1/2$, и оно равно $1/4$. Для функции $y^2(1 - y)$ легко установить, что на интервале $]0; 1[$ наибольшее значение она принимает при $y = 2/3$, и оно равно $4/27$. Значит, $x(1 - x) y^2 (1 - y) \leqslant (1/4)(4/27) = 1/27$ при $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, причем равенство имеет место при $x = 1/2$, $y = 2/3$. Таким образом, наибольшее значение объема параллелепипеда равно $6 \cdot \frac{1}{27} V =$

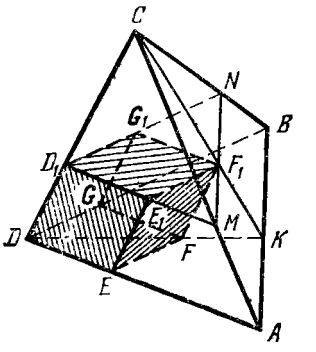


Рис. 418.

$= \frac{2}{9}V$. Наибольший объем имеет параллелепипед, у которого вершина F_1 совпадает с точкой пересечения медиан грани ABC.

Ответ: $\frac{2}{9}V$.

ГЛАВА XVII

1. △ Пусть R — радиус круга, r — радиус основания конуса, тогда $2\pi r = R\alpha$, откуда $r = R\alpha/2\pi$. Находим высоту конуса и его объем: $H = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$. Обозначим $\alpha^2/4\pi^2 = x$, $0 < x < 1$, и $V_0 = \pi R^3/3$. Тогда $V = V_0 x\sqrt{1-x}$. Находим производную $V' = V_0 \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ и критическую точку $x_0 = 2/3$. Легко видеть, что в этой точке функция V имеет наибольшее значение.

Ответ: При $\alpha = 2\pi\sqrt{2/3}$. ▲

2. △ При вращении прямоугольной трапеции $MNBC$ (рис. 419) получим усеченный конус с высотой $H = |BD| = a\sqrt{3}/2$ и радиусами оснований $R = |MC| = b + (a/2)$ и $r = |NB| = b$. Объем этого конуса равен

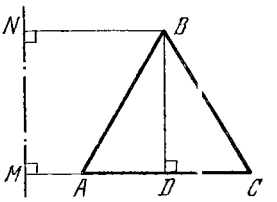


Рис. 419.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi H}{3}\left(3b^2 + \frac{3}{2}ab + \frac{a^2}{4}\right).$$

Аналогично находим объем усеченного конуса, полученного вращением прямоугольной трапеции $MNBA$:

$$V_2 = \frac{\pi H}{3}\left(b^2 + b\left(b - \frac{a}{2}\right) + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi H}{3}\left(3b^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{a^2}{4}\right).$$

Объем заданной фигуры вращения равен разности объемов этих конусов: $V = V_1 - V_2 = \pi Hab = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}ba^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}ba^2$. ▲

3. △ Из условия вытекает, что одна из боковых граней призмы вписана в основание конуса (рис. 420). Эта грань — прямоугольник со сторонами длины 1,6 дм и 1,2 дм, следовательно, радиус основания конуса равен $R = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}6^2 + 1{,}2^2} = 1$ дм. Прямоугольные треугольники CDK и SOK подобны, поэтому $|SO| : |CD| = |OK| : |DK|$. Отсюда, учитывая, что $|CD| = 0{,}8\sqrt{3}$ дм, $|OK| = 1$ дм, $|DK| = |OK| - |OD| = 0{,}4$ дм, получаем, что $|SO| = 2\sqrt{3}$ дм. Теперь находим объем конуса: $V = \frac{\pi}{3}R^2 \cdot |SO| = 2\pi/\sqrt{3}$ дм³. ▲

4. △ Введем систему координат, как показано на рис. 421. Точки B, C_1, M (середина ребра AD) и N (центр грани CC_1D_1D) имеют координаты $B(a; a; 0)$,

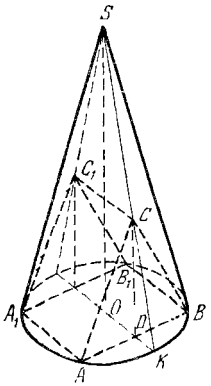


Рис. 420.

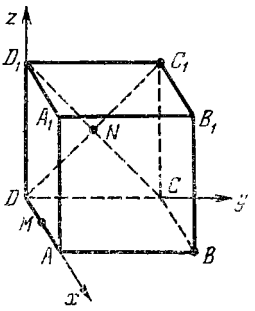


Рис. 421.

$C_1(0; a; a)$, $N(0; a/2; a/2)$, $M(a/2; 0; 0)$. Подставив эти координаты в уравнение сферы

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a-x_0)^2+(a-y_0)^2+z_0^2=R^2, \\ x_0^2+(a-y_0)^2+(a-z_0)^2=R^2, \\ \left(\dfrac{a}{2}-x_0\right)^2+y_0^2+z_0^2=R^2, \\ x_0^2+\left(\dfrac{a}{2}-y_0\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}-z_0\right)^2=R^2 \end{cases}$$

относительно x_0, y_0, z_0 (координат центра сферы) и R — ее радиуса. Вычтя второе уравнение из первого, а четвертое из второго и третьего, после упрощений будем иметь

$$\begin{cases} z_0=x_0, \\ y_0+z_0=\dfrac{3}{2}\,a, \\ x_0=y_0+z_0-\dfrac{a}{4}. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_0=z_0=5a/4$, $y_0=a/4$. Подставив эти значения в любое из уравнений исходной системы, получим, что $R=a\sqrt{35}/4$ ▲.

5. △ Пусть O — центр сферы (рис. 422). Из того, что $|OC|=|OA|=r$, $|AC|=\sqrt{2}\,r$, следует, что $\widehat{AOC}=\pi/2$. Через точку B проведем плоскость $\beta\perp(CD)$, и пусть $N=\beta\cap(CD)$. Проведем также прямую $(AP)\parallel(CD)$, $P\in\alpha$. Тогда $(CD)\perp(PN)$, и значит, $(PN)\parallel(AO)$, а потому $|ON|=|AP|$. Поскольку $\widehat{APB}=\pi/2$, $\widehat{BAP}=(\widehat{AB, CD})=\pi/3$, то $|AP|=|AB|\cos(\pi/3)=r/2$. Значит, плоскость β проходит через середину одного из радиусов OC или OD. Если предположить, что плоскость β проходит через середину M радиуса OC, то из

того, что в треугольнике OBC высота BM является и медианой, следует, что $|BC|=|OB|=r$, а это противоречит условию $|BC|>|AC|$. Значит, плоскость β проходит через середину N радиуса OD, и тогда $|BD|=r$.

Ответ: r. ▲

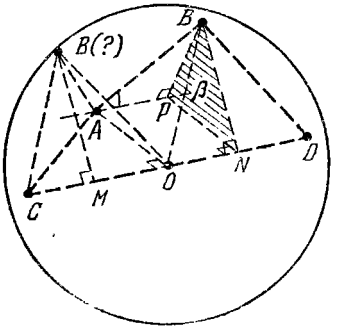


Рис. 422.

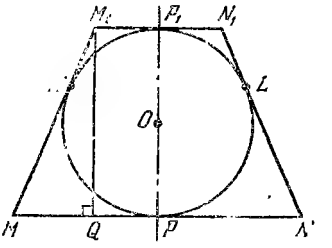


Рис. 423

6. △ Сфера касается оснований конуса в их центрах, значит, высота конуса равна $2R$. Обозначим радиусы оснований конуса r и r_1 ($r>r_1$). Рассмотрим сечение данных фигур плоскостью, проходящей через ось PP_1 конуса (рис. 423). Сечение сферы — большая окружность, сечение конуса — равнобедренная трапеция MM_1N_1N, описанная около этой окружности. Пусть K — точка касания, тогда по свойству касательных имеем $MK|=MP|=r$, $M_1K|=M_1P_1|=r_1$. Но $|MK|+|KM_1|=a$, значит,

$$a=r+r_1. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике MM_1Q имеем $|M_1Q|=2R$, $|MQ|=r-r_1=\sqrt{|MM_1|^2-|M_1Q|^2}=\sqrt{a^2-4R^2}$. Отсюда из (1) находим

$$r=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4R^2}\right),\quad r_1=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4R^2}\right).$$

Объем конуса равен $\frac{\pi}{3}\cdot 2R\,(r^2+rr_1+r_1^2)=$

$=\frac{2}{3}\pi R\,(a^2-R^2)$. ▲

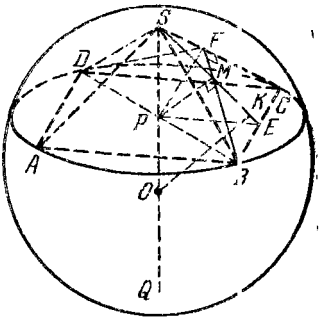


Рис. 424.

7. △ Легко установить, что центр сферы, касающейся боковых граней пирамиды, лежит на луче SP (рис. 424), где P — центр основания $ABCD$. Из того, что вторая сфера касается не только боковых граней, но и сферы, описанной около пирамиды, следует, что центр второй сферы лежит на диаметре SQ описанной сферы, а Q — точка касания этих сфер. Пусть O — центр второй сферы, K — точка ее касания с гранью SBC, r — радиус этой сферы. Обозначим еще $\widehat{OSK}=\alpha$. Имеем

$$|OQ|=|OK|=r,\quad |SO|=2R-r,\quad |OK|=|SO|\sin\alpha,$$

т. е. $r=(2R-r)\sin\alpha$, откуда $r=2R\sin\alpha/(1+\sin\alpha)$.

Найдем $\sin\alpha$. Пусть $[BF]\perp(SC)$, тогда $\widehat{BFD}=120°$, $\widehat{PFB}=60°$, $\widehat{PBF}=30°$. Пусть $[SE]\perp[BC]$, $M=(BF)\cap(SE)$, тогда $[PM]\perp(SBC)$, поскольку $(BFD)\perp\perp(SBC)$, $(SPE)\perp(SBC)$, а $(PM)=(BFD)\cap(SPE)$. Таким образом, $[PM]\perp[BF]$, и из прямоугольного треугольника PMB находим $|PM|=\frac{1}{2}|PB|$. Учитывая, что $|PE|=\frac{1}{\sqrt{2}}|PB|$, получаем, что $\sin\widehat{PEM}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда следует, что $\widehat{PEM}=45°$, а значит, и $\alpha=\widehat{PSE}=45°$. Теперь легко находим, что $r=2(\sqrt{2}-1)R$.

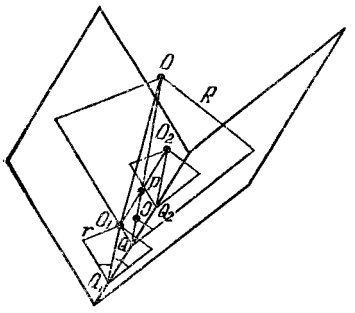


Рис. 425.

Ответ: $2(\sqrt{2}-1)R$. ▲

8. △ Обозначим центры данных сфер O_1 и O_2, центр третьей сферы O, радиус этой сферы R (рис. 425). Точка O принадлежит биссектору данного угла и плоскости, проходящей через середину P отрезка O_1O_2 и перпендикулярной ему. Следовательно, точка O принадлежит пересечению биссектора с этой плоскостью — лучу QP. Имеем $|OQ|=R/\sin\alpha$, $|PQ|=|O_1Q_1|=r/\sin\alpha$, $|OP|=\left|\frac{R}{\sin\alpha}-\frac{r}{\sin\alpha}\right|$, $|O_1P|=r$, $|OO_1|=R+r$. Из прямоугольного треугольника O_1OP по теореме Пифагора получаем $|OP|^2=|O_1O|^2-|O_1P|^2$, откуда $R^2\cos^2\alpha-2r(1+\sin^2\alpha)R+r^2=0$ и

$$R=\frac{1+\sin^2\alpha\pm\sqrt{3\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}}{\cos^2\alpha}r. \qquad (1)$$

Ответ: R дается формулой (1). ▲

9. □ Необходимость. Если призма вписана в сферу, то каждая ее грань, и, в частности, основание, вписана в окружность — сечение сферы плоскостью этой грани. Каждая боковая грань такой призмы — параллелограмм, вписанный в окружность, значит, боковые грани — прямоугольники. Отсюда следует, что боковые ребра призмы перпендикулярны плоскостям оснований, т. е. призма — прямая.

Достаточность. Пусть AA_1 — боковое ребро призмы, P и P_1 — центры окружностей, описанных около оснований (рис. 308 гл. XVII, с. 444). Параллельный перенос $\overrightarrow{AA_1}$ отображает одно основание призмы на другое, при этом точка P_1 является образом точки P. Значит, $\overrightarrow{PP_1}=\overrightarrow{AA_1}$, а потому прямая PP_1 перпендикулярна основаниям призмы. Отсюда следует, что середина O отрезка PP_1 равноудалена от всех вершин призмы, т. е. данная призма вписана в сферу с центром O и радиусом $R=|OA|$. ■

10. △ Пусть сфера с центром O касается ребер SB и SC пирамиды (рис. 426) в точках K_1 и K_2, продолжения ребра SA за вершину S в точке Q и плоскости ABC в точке P. Пусть $[OL]\perp(SBC)$. Тогда из того что $[OK_1]\perp\perp[SB]$, $[OK_2]\perp[SC]$, следует, что $[LK_1]\perp[SB]$, $[LK_2]\perp[SC]$. Из равенств

$|OK_1|=|OK_2|=R$, где R — радиус сферы, следует, что $|LK_1|=|LK_2|$. Отсюда и из того, что основания перпендикуляров LK_1 и LK_2 к прямым SB и SC принадлежат отрезкам SB и SC, вытекает, что точка L лежит на биссектрисе SD угла BSC. Плоскость SAD и прямая OL перпендикулярны плоскости SBC, значит, точка O лежит в плоскости ASD, а точка P — на луче AD. Из равенства $|OP|=|OQ|$, следует, что AO — биссектриса угла SAD. Треугольник SAD равнобедренный, поэтому биссектриса AO проходит через середину стороны SD и перпендикулярна ей. Учитывая, что $(OL)\perp(SD)$, получаем, что прямые OL и AO совпадают, и значит, L — середина стороны SD.

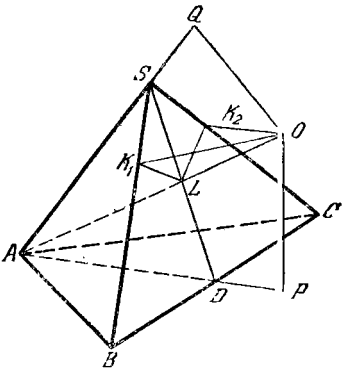


Рис. 426.

Найдем $|LK_1|$. В треугольнике SBD имеем

$$|BD|=a/\sqrt{3},\quad |SD|=\sqrt{2/3}\,a,$$

$$|SL|=a/\sqrt{6},$$

$$|LK_1|=|BD|\frac{|SL|}{|SB|}=\frac{a}{3\sqrt{2}}.$$ Из треугольника DAL находим $\sin\widehat{DAL}=1/\sqrt{6}$, $|AL|=\sqrt{5/6}\,a$, а из треугольника AOP находим $|AO|=|OP|/\sin\widehat{DAL}=\sqrt{6}R$, тогда $|LO|=\sqrt{6}R-\sqrt{5/6}\,a$. Теперь из треугольника OLK_1 получаем

$$\sqrt{|OK_1|^2-|LK_1|^2}=|LO|,\quad \sqrt{R^2-\frac{a^2}{18}}=\sqrt{6}R-\sqrt{\frac{5}{6}}\,a.$$

Это уравнение имеет единственное решение $R=4a/(3\sqrt{5})$.

Ответ: $4a/(3\sqrt{5})$. ▲

11. △ Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ASB, D и K — точки касания ее со сторонами AB и SA, r — радиус этой окружности (рис. 427). Из подобия треугольников SBD и SO_1K находим, что $r=a/(2\sqrt{7})$. Пусть SP — высота пирамиды. Из треугольника SDP находим $|SP|=a/3$. Радиус R сферы, касающейся ребер пирамиды, находим, как и в задаче 9 § 3 гл. XVII, получим $R=a/(2\sqrt{3})$. Радиус окружности, вписанной в основание ABC пирамиды, также равен $a/(2\sqrt{3})$, поэтому центр сферы совпадает с центром P основания. Вне пирамиды расположены три сферических сегмента, отсеченных боковыми гранями, и полусфера, отсеченная основанием. Площадь этой полусферы равна $2\pi R^2=\pi a^2/6$. Площадь сегмента находим по формуле $S_{\text{сегм}}=2\pi Rh$, где $h=R-|PO_1|$ — высота сегмента. Имеем $|PO_1|=\sqrt{R^2-r^2}=$

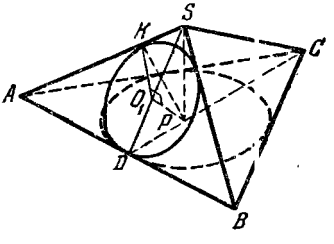


Рис. 427.

$= \frac{a}{\sqrt{21}}$, $h = \frac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{21}}a$, $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi(\sqrt{7}-2)}{6\sqrt{7}}a^2$. Площадь части сферы, лежащей вне пирамиды, равна $3S_{\text{сегм}} + \frac{\pi a^2}{6} = \frac{\pi(2\sqrt{7}-3)}{3\sqrt{7}}a^2$.

Ответ: $\frac{\pi(2\sqrt{7}-3)}{3\sqrt{7}}a^2$.

12. △ Пусть M и N — точки пересечения отрезка AB соответственно со сферами S_1 и S_2 (рис. 428), $|AM| = x$, $|MN| = y$, $|NB| = z$, $|AB| = a$. Пусть K — точка касания сферы S_1 с гранью β, L — точка касания сферы S_2 с гранью α.

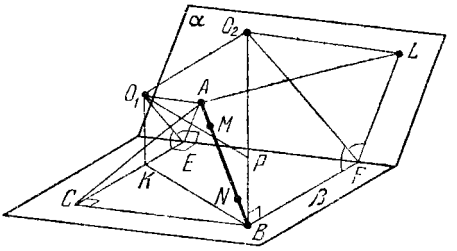


Рис. 428.

По свойству касательных и секущих к сфере имеем $(a-x)\cdot a = |BK|^2$, $(a-z)a = |AL|^2$. Обозначим радиусы сфер соответственно r_1 и r_2 и проведем $[O_1P] \parallel [KB]$. В треугольнике O_1O_2P имеем $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_2P| = r_2 - r_1$, $|O_1P| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_1P|^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Значит, и $|BK| = 2\sqrt{r_1r_2}$. Из симметрии относительно плоскости биссектора ясно, что $|AL| = |BK| = 2\sqrt{r_1r_2}$. Таким образом, $(a-x)a = (a-z)a = 4r_1r_2$, откуда $x = z = \frac{a^2-4r_1r_2}{a}$ и $y = a - x - z = \frac{8r_1r_2-a^2}{a}$. Значит, $x : y : z = (a^2-4r_1r_2) : (8r_1r_2-a^2) : (a^2-4r_1r_2)$.

Найдем $a = |AB|$ из треугольника ABC, где $[BC] \perp [EC]$. Имеем $|AE| = r_1 \operatorname{ctg}\varphi$, $|CE| = |BF| = r_2 \operatorname{ctg}\varphi$, и из треугольника AEC получаем, что

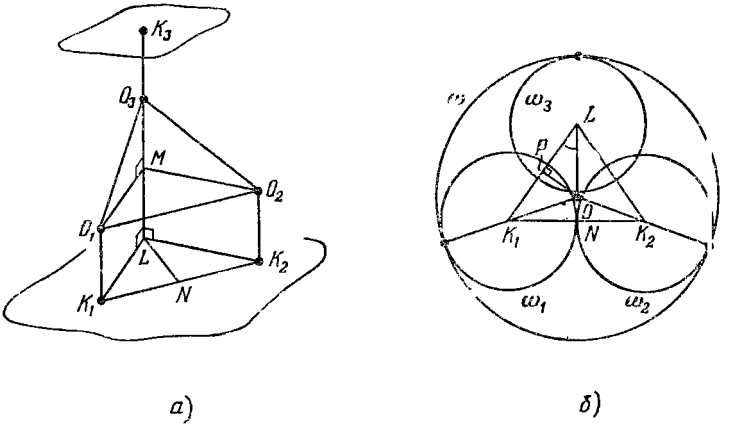
$$|AC|^2 = r_1^2 \operatorname{ctg}^2\varphi + r_2^2 \operatorname{ctg}^2\varphi - 2r_1r_2 \operatorname{ctg}^2\varphi \cos 2\varphi.$$

Из треугольника BKC находим $|BC|^2 = |BK|^2 - |KC|^2 = 4r_1r_2 - (r_2-r_1)^2 \operatorname{ctg}^2\varphi$. Отсюда $a^2 = |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = 4r_1r_2(1+\cos^2\varphi)$. Подставляя это выражение в отношения $x : y : z = (a^2-4r_1r_2) : (8r_1r_2-a^2) : (a^2-4r_1r_2)$ и, упрощая, получим, что $x : y : z = 1 : \operatorname{tg}^2\varphi : 1$. ▲

13. Центры сфер обозначим O_1, O_2, O_3 (рис. 429, *а*), точки касания двух сфер с нижним основанием цилиндра обозначим K_1, K_2, точку касания третьей сферы с верхним основанием — K_3. Имеем $|O_1K_1| = |O_2K_2| = |O_3K_3| = r$, $|O_1O_2| = |O_1O_3| = |O_2O_3| = 2r$. Из точки O_3 опустим перпендикуляр O_3L на плоскость нижнего основания цилиндра, тогда $|O_3L| = 2r$. Пусть $[O_1M] \perp [O_3L]$, тогда $|ML| = |O_3M| = r$, и из прямоугольного треугольника O_1O_3M находим, что $|O_1M| = \sqrt{3}r$. Очевидно, и $|MO_2| = \sqrt{3}r$.

Рассмотрим ортогональные проекции сфер и боковой поверхности цилиндра на плоскость его нижнего основания. Проекциями сфер являются круги радиуса r

с центрами K_1, K_2 и L (рис. 429, *б*), окружности этих кругов обозначим ω_1, ω_2, ω_3. Проекцией боковой поверхности цилиндра будет окружность его нижнего основания, которую обозначим ω. Точка касания боковой поверхности цилиндра с первой сферой спроектируется в точку, принадлежащую и ω и ω_1, причем это будет *единственная* общая точка этих двух окружностей. Значит, окружности ω и ω_1 внутренне касаются. Точно так же ω касается и окружностей ω_2 и ω_3. Таким образом, центр O окружности ω удален от каждой из



а) *б)*

Рис. 429.

точек K_1, K_2, L на расстояние $R-r$, где R — радиус ω. Значит, O — центр окружности, описанной около треугольника K_1LK_2. Из треугольника K_1LN ($[LN] \perp [K_1K_2]$) находим $|LN| = \sqrt{2}r$, $\cos\widehat{K_1LN} = \sqrt{2}/3$, $|LO| = \frac{1}{2}|K_1L| : \cos\widehat{K_1LN} = 3r/2\sqrt{2}$. Отсюда $R = |LO| + r = (3\sqrt{2}+4)r/4$. ▲

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ РАЗДЕЛА II И ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА I

1. $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 12\}$, $B \cap C = \{5\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3;\ 5\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

2. $A \cup B = \{1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 21\}$, $B \cap C = \{3;\ 7\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3;\ 7\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

3. Например: а) $A =]-\infty;\ a]$, $B =]\ a;\ +\infty[$, где a — любое действительное число. б) B — подмножество любого множества A.

4. $A \cup B = [0;\ 5[$, $A \cap B = [1;\ 3]$, $A \cap C = \{0\}$, $B \cup C =]-2;\ 0] \cup]1;\ 5[$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = \{0\}$.

5. $A \cup B =]-\infty;\ +\infty[$, $A \cap B = \{1\}$, $A \cap C =]0;\ 1[$, $B \cup C =]0;\ +\infty[$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C =]\,0,\ 1\,[$.

6. $A \cup B = [-3;\ 1] \cup [2;\ +\infty[$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = [-3;\ -2[$, $B \cup C =]-\infty;\ -2[\cup]\,2;\ +\infty[$, $(A \cup B) \cap C = [-3;\ -2[$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

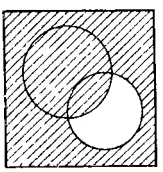
7. $A \cup B =]-1;\ 2[$, $A \cap B = \{0\}$, $A \cup \bar{B} =]-\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty[$, $\bar{A} \cap B =]0;\ 2[$, $\overline{A \cup B} =]-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty[$.

8. $A \cup B =]-1;\ +\infty[$, $A \cap B = [0;\ 3[$, $A \cup \bar{B} =]-\infty;\ -1] \cup [0\ \ 3[$, $\bar{A} \cap B =]-1;\ 0[\cup [3;\ +\infty[$, $\overline{A \cup B} =]-\infty;\ -1]$.

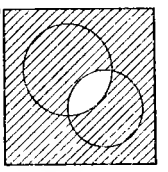
9. $A \cup B =]-\infty;\ 1]$, $A \cap B =]-\infty;\ 3[$, $A \cup \bar{B} =]-\infty;\ +\infty[$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $\overline{A \cup B} =]1;\ +\infty[$.

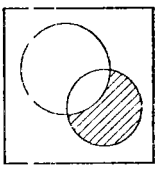
10. $A \cup B = [-1;\ +\infty[$, $A \cap B =]0;\ 1[$, $A \cup B =]-\infty;\ -1 \cup]0;\ +\infty[$, $\bar{A} \cap B = [-1;\ 0]$, $\overline{A \cup B} =]-\infty;\ -1[$.

11. а)

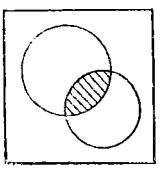


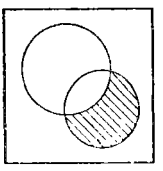
б)



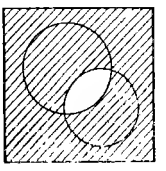


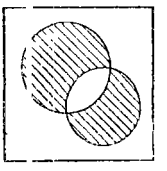
в)





г)



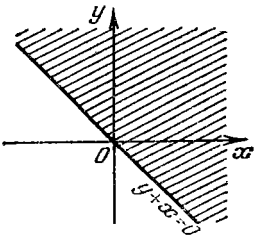


12. 125. 13. 81. 14. 10%. 15. 30; 7; 18; 5. 16. 4. 17. 22.

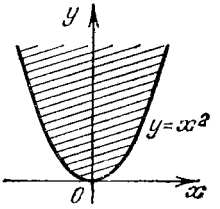
18. Только книгу A — 6, только книгу B — 5, только книгу C — 4; не прочитали ни одной — 3.

19. 94; 65. 20. $12n+6$ ($n=0, 1, 2, \ldots$).

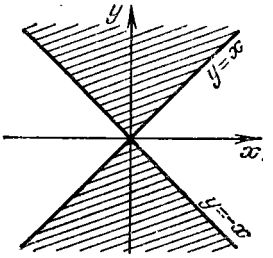
21.



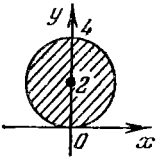
22.



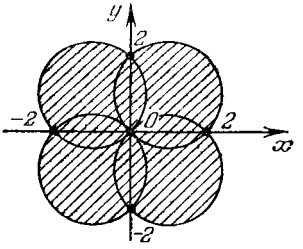
23.



24.

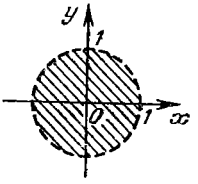


25.

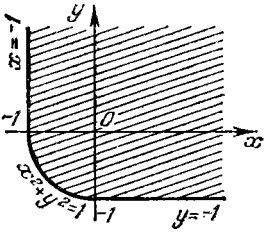


26. Прямая $y=x+\frac{1}{2}$.

27.



28.



29. $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$. 30. $[0; 1[$.

31. $\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right[\cup \left]2\pi n; 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

32. $[1; 2[$. **33.** $]-\infty; 1-\sqrt{2}]\cup]1; 1+\sqrt{2}]$.

34. $]0; 1/2[$. **35.** $]-\infty; -2]\cup[2; +\infty[$.

36. $]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$.

37. $\left]-6; -\frac{5}{3}\pi\right]\cup\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{1}{6}\right[$. **38.** $]0; 125]$.

39. $]-1; +1]$. **40.** $\{1\}$. **41.** $[-\sqrt{26}; +\sqrt{26}]$.

42. $]-\infty; -2]\cup[2; +\infty[$. **43.** $[0; 2]$. **44.** $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

46. $-\sqrt{x+1}$. **47.** $\frac{x+1}{x-1}$. **48.** x^4, $x\in[0; +\infty[$. **49.** $\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

50. $-1+\sqrt{1+x}$ при $x\geqslant 0$, $1-\sqrt{1-x}$ при $x<0$.

51. Да, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-x}$.

52. Нет (например, $y(1)=y(-1)=0$).

53. Нет (например, $y(0)=y(2)=-3$).

54. Нет (например, $y(0)=y(2)=-8$).

56. $d=-a$. **57.** ± 1.

ГЛАВА II

1. а) Есть хотя бы одно попадание. б) Все три выстрела попали в цель. в) Мишень поражена одним и только одним выстрелом.

2. Смит.

3. В экспедицию следует взять E — биологом, B — гидрологом, C — радистом, D — врачом, F — синоптиком, H — механиком.

4. а) Да, может. Такой контрольной будет, например, контрольная, в которой количество задач равно количеству учеников, причем первый ученик решил только первую задачу, второй — только вторую, третий — только третью и т. д.

б) Нет, не может. Из того, что существует ученик, решивший все задачи, следует, что каждая задача решена хотя бы одним учеником (например, тем, который решил все задачи).

5. Да, есть. Равносильными являются второй и четвертый ответы.

6. $n=45$. **7.** $x=2$, $x=(3\pm\sqrt{5})/2$. **8.** $[-1/2; 1/4]$.

9. а) $[-36/5; 9]$, б) $[-27/5; 0]$.

11. 1 и 4, 2 и 5 являются взаимно обратными; 2 и 3, 4 и 6 — взаимно противоположными; 1 и 6, 3 и 5 являются противоположными обратным.

Теоремы 1 и 6 верны, остальные неверны.

12. Прямая теорема и противоположная обратной неверны. Обратная и противоположная — верны.

13. Обратная теорема: если функция непрерывна в точке x, то она дифференцируема в этой точке.

Противоположная теорема: если функция не дифференцируема в точке x, то она не может быть непрерывной в этой точке.

Противоположная обратной: если функция не является непрерывной в точке x, то она не дифференцируема в этой точке.

Прямая теорема и противоположная обратной верны. Обратная и противоположная неверны (контрпример $y(x)=|x|$, $x=0$).

14. а) необходимо; б) достаточно; в) достаточно; г) необходимо и достаточно; д) необходимо и достаточно

21. а) $n \geqslant 4$; б) $n \geqslant 7$. **23.** $n^2 - n + 2$.

ГЛАВА III

1. $\{0,5\}$. **2.** $\{1; -0,75\}$. **3.** $\{-0,8\}$.

4. $\{-6; 2; -2-\sqrt{6}; -2+\sqrt{6}\}$.

5. $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$. **6.** $\varnothing$. **7.** $\{4\}$.

8. $x \in [1; 2]$. **9.** $\{(-7+\sqrt{13})/3\}$. **10.** $\{-1; 1\}$ **11.** $\{-3; -4\}$.

12. 6,25. **13.** $\{(1; 2; 1)\}$.

14. $\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}z; \frac{1}{2}-\frac{3}{2}z; z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$.

15. Система несовместна. **16.** $\{3; 1; 1\}$. **17.** Система несовместна.

18. $\{(-1-x_2+x_4; x_2; 2-x_4; x_4), x_2 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

19. $\{(4; 5), (5; 4)\}$. **20.** $\{(7; -3), (-7; 3)\}$.

21. $\{(3; 1), (-3; -1), (-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (\sqrt{2}; -2\sqrt{2})\}$.

22. $\{(0; 0), (1; 1), ((1 \mp \sqrt{5})/6; (1 \pm \sqrt{5})/6)\}$.

23. $\{(1/4; -3), (27/4; -1/3)\}$.

24. $\{(1; 2), (-1; -2); (\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$.

25. $\{(-3; -2), (3; 2), (-2; -3), (2; 3)\}$.

26. $\{(2; 3), (23/4; -9/2)\}$. **27.** $\{(6; 4), (36/5; 5)\}$.

28. $\{(5; 4), (-0,5; -0,4)\}$. **29.** $\{(4; 1)\}$. **30.** $\{(5; 7)\}$.

31. Если $a = 1/2$, то 4 решения, если $a = 1$, то 4 решения, если $1/2 < a < 1$, то 8 решений. При остальных a нет действительных решений.

32. 5/2. **33.** $\{(0; 0; 0), (-6/5; 8/5; -2/5), (0; -4/3; 2/3)\}$.

34. $\{(2; -1; -1), (-3/2; 9/2; 3/2), (x; 0; 0), x \in \mathbb{R}\}$.

35. $\{(0; 0; 0), (0; -1; 1)\}$. **36.** $\{(0; 0; 0), (7; 7; 7), (5/2; 5; 15/2)\}$.

37. $\{(1; -1; 2), (-1; 1; -2), (3\sqrt{2}/5; 5\sqrt{2}/8; 1\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}/5, -5\sqrt{2}/8, -1\sqrt{2})\}$.

38. $\{(3/2; 2; 5/2), (-3/2; -2; -5/2)\}$.

39. $\{(-1; 0; 1/2), (1; 0; -1/2), (i/\sqrt{3}, -2i/\sqrt{3}, i/2\sqrt{3}), (-i/\sqrt{3}, 2i/\sqrt{3}, -i/2\sqrt{3})\}$.

40. 63. **41.** 30% и 60% **42.** $mn/(m+n)$ кг.

43. 60 м³; 2,4 м³ и 2 м³. **44.** 0,425.

45. 336 и 280. **46.** 18 ч и 24 ч.

47. 28 дней и 21 день. **48.** 20 и 15. **49.** $3 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$.

50. 56 с. **51.** 21 м/с и 147 м. **52.** 14 мин. и 56/3 мин

53. 0,5. **54.** 1 час. **55.** 4 часа. **56.** 1,4. **57.** 13 мин.

ГЛАВА IV

1. Неравносильны. **2.** Неравносильны. **3.** Равносильны. **4.** Неравносильны.

5. Равносильны. **6.** $]1/3; 4[$. **7.** $\{-2\} \cup [2; 5/2]$.

8. $]5-\sqrt{5}; 3[\cup]4; 5+\sqrt{5}[$. **9.** $]-\infty; -1[\cup]3; 7[$.

10. $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ 0[$. 11. $]-1;\ 0[\cup]1;\ 4[$.
12. $]-4;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$. 13. $]-1;\ 2[\cup]2;\ 5[$.
14. $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]7;\ +\infty[$.
15. $]2;\ +\infty[$. 16. $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 2]$.
17. $]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$. 18. $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[$.
19. $]-5;\ -3]\cup]3;\ 4]$. 20. $]-1;\ 2[$. 21. $[-5/2;\ 2[$.
22. $]-\infty;\ 0]\cup]9/2;\ +\infty[$. 23. $]-\infty;\ -3]\cup]13;\ +\infty[$.
24. $]-\infty;\ -1]\cup]8;\ +\infty[$. 25. $]-\infty;\ -2]\cup[5;\ 74/13[$.
26. $]-\infty;\ (\sqrt{37}-13)/6[$. 27. $[15/8;\ 2[\cup]3;\ +\infty[$.
28. $]-\infty;\ -2/3]\cup[1/2;\ +\infty[$.
29. $](5-\sqrt{30})/10;\ (5-\sqrt{20})/10[\cup](5+\sqrt{20})/10;\ (5+\sqrt{30})/10[$.
30. $]2/3;\ 3/2[\cup]3/2;\ 4[$. 31. $[-1;\ -\sqrt{3}/2]\cup[\sqrt{3}/2;\ 1]$.
32. $]-\infty;\ -2]\cup]0;\ +\infty[$. 33. $[-4;\ (1-\sqrt{1431})/10]\cup]0;\ 4[$.
34. $[2;\ (-7+\sqrt{146})/2[$. 35. $\{2\}$. 36. $\{-1,\ 1\}$. 37. $[-2;\ 0[\ ]\cup]0;\ 8/5[$.
38. $]1;\ 2/\sqrt{3}]$. 39. $]-2;\ -1]\cup[-2/3;\ 1/3[$. 40. $\{7\}$.

41. При $|a|>3$ $\left]-\infty;\ \frac{1}{a-3}\right[$, при $|a|<3$ $\left]\frac{1}{a-3};\ +\infty\right[$, при $a=-3$ решений нет, при $a=3$ $]-\infty;\ +\infty[$.

42. При $a<\frac{3}{2}$ $\left]-\infty;\ \frac{a^2-12a-2}{2a-3}\right]$, при $a=\frac{3}{2}$ $]-\infty;\ +\infty[$, при $a>\frac{3}{2}$ $\left[\frac{a^2-12a-2}{2a-3};\ +\infty\right[$.

43. При $a>3$ $\left]2;\ \frac{2a+1}{a-3}\right]$, при $a<3$ $\left[\frac{2a+1}{a-3};\ 2\right[$, при $a=3$ решений нет.

44. При $a\leqslant 0$ $]-\infty;\ 0[$; при $a>0$ $\left]-\frac{1}{\sqrt{a}};\ 0\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{a}};\ +\infty\right[$.

45. Если $a=0$, то $x\in]-1;\ 0[$, если $a>0$, то $x\in\left]\frac{-1-|\sqrt{1+4a}}{2};\ a\right]$.

46. Если $b<2|a|$, то решений нет, если $2|a|\leqslant b\leqslant 3|a|$, то $x\in[-b+2|a|;\ b-2|a|]$, если $b>3|a|$, то $x\in[-b/3;\ b/3]$.

47. $a<71/24$. 48. $-1<a<5$. 49. $a=7/4$.
50. $a\geqslant 1/3$. 51. $3\leqslant a\leqslant 18/5$. 52. $|a|<1/2$.

59. 12; 24/5. 60. 1250 м². 61. $\frac{6+\sqrt{3}}{132}p^2$.

62. Покупатель получил больше двух кг товара. 63. 2.

64. Расстояние между автомашинами будет наименьшим через 8,4 минуты после полудня. Первая машина в этот момент будет находиться в 1,6 км от перекрестка. Вторая машина минует перекресток и удалится от него на 1,2 км.

65. Первый турист.

66. Скорость первого велосипедиста больше 10 км/ч и меньше 40 км/ч.

67. Скорость лодки должна быть больше

$$\frac{a+\sqrt{a^2+v^2t^2}}{t}.$$

68. При $x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ g принимает наименьшее значение $2\sqrt{2}-2$.
69. 18. **70.** 4 ящика первого типа и 25 ящиков второго типа.

ГЛАВА V

5. 10^5. **6.** 6. **7.** 1. **8.** 2/5. **9.** 1/2. **10.** 1. **11.** 2.
12. 1 $\left(\text{использовать } \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. **13.** 1.
14. 0 $\left(\text{использовать } \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\right)$.
16. а) $ad-bc>0$; б) $ad-bc<0$.
18. а) 1 (показать, что (a_n) — возрастающая и ограниченная); б) 1.
19. а) $a_n=1+\frac{1}{2^{n-2}}$ (см. задачу 7, раздел I), $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$; б) $a_n=4-\frac{3}{2^{n-1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$; в) $a_n=\frac{3}{2-4^{n-1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
20. а) 2; б) 7/33; в) 5/14. **21.** 40. **22.** 38. **23.** 1/3. **24.** -2.
25. -2. **26.** 3; 6; 12; **18.** **27.** 1/5. **28.** 28. **29.** 1/2.
30. 4; 2; 1 и 1; 2; 4. **31.** 6; 18; 54 и 26; 26; 26. **32.** 24. **33.** 1/3.
34. 64; 64/3. **35.** 81/2. **36.** 9. **37.** 26. **38.** 4/3. **39.** 2/3. **41.** 2.
42. 3. **43.** 1/2. **44.** -1. **45.** 1/2. **46.** 1/2.
47. $3\ (x^6-1=(x-1)(x^2+x^6+\ldots+1)$, $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.
48. 2. **49.** 1/2. **50.** 0. **51.** 1/2. **52.** 1; 0. **53.** -1; 1. **54.** 1; 0.
55. а) 3; 1/3. б) 1/3; 3. **57.** $+\infty$; 0. **58.** $+\infty$; 1. **59.** $\frac{x+3}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.
60. $(2-x)\sin x$. **61.** $\frac{x+6\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$. **62.** $\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$.
63. $\ln(x^2-1)+\frac{2x^2}{x^2-1}$. **64.** $2^x(1-x)\ln 2-2^x$. **65.** $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$.
66. $(1-\ln 2)/2$. **67.** $]-1;\ 0[\cup]0;\ +1[$. **68.** $y=2x+0{,}25$. **69.** 135°.
70. $y=8x+4$. **71.** а) $y=2$; б) $y+x=5/2$.

ГЛАВА VI

1. f_1, f_4, f_7, f_8 — четные, f_2, f_6 — нечетные, f_3, f_5 — ни четные, ни нечетные.
2. Функции f_1, f_3, f_4 имеют представление $f_i=\varphi_i(x)+\psi_i(x)$, где $\varphi_i(x)=\frac{f_i(x)+f_i(-x)}{2}$ — четная функция, $\psi_i(x)=\frac{f_i(x)-f_i(-x)}{2}$ — нечетная функция $(i=1,\ 3,\ 4)$; функция f_2 не имеет такого представления, так как область ее определения несимметрична относительно начала координат.
4. а) Неверно; б) неверно. **5.** а) Нет; б) да; в) нет.
6. а) $e^{|x|}$; б) $e^{|x|}\operatorname{sign} x$.
7. f_1, f_3 непериодические; f_2 периодическая, $T=6\pi$; f_4 периодическая, $T=\pi/2$.
8. Может.

10. 1) $x=1$, $x=-1$, $y=0$; 2) $x=2/3$; 3) $x=1$, $y=0$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in$ $\in \mathbb{Z}$; 5) $x=0$, $y=0$; 6) $y=0$.

11. 1) Функция периодическая с периодом 2π; прямые $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — вертикальные асимптоты; на $\left]2\pi n-\frac{\pi}{2};\ 2\pi n\right[$ и $\left]2\pi n;\ 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right[$ функция убывает, на $\left]2\pi n+\frac{\pi}{2};\ 2\pi n+\pi\right[$ и $\left]2\pi n+\pi;\ 2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right[$ возрастает; $x=$ $=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ — точки максимума, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ — точки минимума. 2) Функция определена при $x>0$; $x=e^{2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки максимума; $x=e^{\pi+2\pi n}$ — точки минимума; $f_2(e^{2\pi n})=1$, $f_2(e^{\pi+2\pi n})=-1$; асимптот нет. 3) Функция определена на $\mathbb{R}$, нечетная, периодическая с периодом 2π; $f_3(x)=x$ на $]-\pi/2;\ \pi/2[$, $f_3(x)=\pi-x$ на $]\pi/2;\ 3\pi/2[$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки максимума, $x=\frac{3\pi}{2}+$ $+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, — точки минимума. 4) Функция определена на $\mathbb{R}$, четная; $x=$ $=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и $x=-\frac{\pi}{2}-2\pi n$, где $n=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$, — точки максимума; $x=$ $=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ и $x=-\frac{3\pi}{2}-2\pi n$, где $n=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$, — точки минимума; прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота. 5) Функция четная, периодическая с периодом 1; $f_5(x)=x$ для $x\in[0;\ 1/2]$, $f_5(x)=1-x$ для $x\in[1/2;\ 1]$.

12. 1) Функция определена для всех $x\neq-1$; $x=-1$ и $y=1$ — асимптоты; $x=-3$ — точка минимума; $]-\infty;\ -3[$ и $]-1;\ +\infty[$ — интервалы убывания, $]-3;\ -1[$ — интервал возрастания. 2) Функция определена для всех $x\neq$ $\neq\pm\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=-x$ — асимптоты; $]-\infty;\ -3[$ и $]3;\ +\infty[$ — интервалы убывания, $]-3;\ -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}[$, $]\sqrt{3};\ 3[$ — интервалы возрастания; $x=-3$ — точка минимума, $x=3$ — точка максимума. 3) Функция определена для всех x; $\left]-\infty;\ -\frac{2}{5}\right[$ и $]0;\ +\infty[$ — интервалы возрастания; $\left]-\frac{2}{5};\ 0\right[$ — интервал убывания; $x=-\frac{2}{5}$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума; при $x=0$ график функции имеет вертикальную касательную. 4) Функция определена вне интервала $]0;\ 4[$; асимптоты: $y=1$ при $x\to-\infty$ и $y=-1$ при $x\to+\infty$; функция убывающая. 5) Функция периодическая с периодом $\pi/2$; $x=k\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$, — точки максимума, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, — точки минимума. 6) Функция определена для $x>0$; $x=1$ — точка пересечения графика функции с осью абсцисс; $y=0$ — асимптота при $x\to+\infty$, $x=0$ — вертикальная асимптота; $]0;\ e^2[$ — интервал возрастания, $]e^2;\ +\infty[$ — интервал убывания; $x=e^2$ — точка максимума.

13. При $a\leqslant-3$ и $a\geqslant1$. **14.** 2.

15. $\max f=f(6)=132$, $\min f=f(3)=-57$.

16. $\max f=f(3)=-\log_3 10$, $\min f=f(6)=-\log_3 40$.

17. $x=-1$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума; $\max f=f(4)=e^6$, $\min f=f(2)=-e^3$. **18.** $\max f=5$, $\min f=2{,}75$. **19.** $\sqrt[4]{V/2\pi}$. **20.** 0.8.

ГЛАВА VII

1. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$. 2. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})$

3. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}$.

4. $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{DA_1}$.

5. $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM})/3$.

6. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

7. $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1M}=-\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

8. а) Да, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — любые неколлинеарные векторы либо одинаково направленные ненулевые; б) да, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — противоположно направлены или хотя бы один из них нулевой вектор; в) нет.

10. а) $x=3$; б) $x=-3$. 11. $x=3/2$, $y=1/2$.
12. $x=4$; $y=-2$. 13. $x=3$ или $x=-2$. 14. -1.
15. 2/5. 16. $x=4$, $y=-1$. 17. $(-6/7;\ 3/7;\ -2/7)$.
18. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=6$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=14$. 19. 24. 20. 7.
21. $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$, $|3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{50}$. 22. 90°. 23. $\arccos(11/15)$.
24. -3, 7, 19, 1. 25. -13. 26. $(-4;\ 6)$. 27. -25.
28. $\pm(1/\sqrt{5};\ -2\sqrt{5})$. 29. -20. 30. $-3/2$. 31. 60°.
32. $(-2;\ 2;\ -4)$. 33. $\pm(\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$. 34. $m=4$; $n=-3/2$. 35 1.
36. $\pm(1;\ 2)$. 37. 2/3; $-1/3$; $-2/3$. 38. $-11/2$.
39. $\arccos(-3/\sqrt{11})$. 40. $(6/7;\ 2/7;\ -3/7)$. 41 60°. 42. 45°.
43. $(-4;\ 3;\ -1)$; $(8;\ -6;\ 2)$. 44. $M_1(1;\ 2;\ -5)$; $M_2(1;\ -2;\ -5)$.
45. $\arccos(-9/25)$. 46. 5/2. 47. $\sqrt{5}$. 48. 13; -524. 49. 90°.
50. 15; $\sqrt{593}$. 51. $\arccos(63/65)$. 52. $(2\sqrt{5};\ \sqrt{5};\ -5)$.
53. $(48;\ -64;\ 60)$. 54. $\pm(2;\ 0;\ 3)$. 55. $\pm(1/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$.
56. $\pm(1;\ 1;\ 1)$. 57. $(-24;\ -32;\ 30)$. 58. $m=-31/12$; $n=41/12$.
59. $\pm(0;\ 1;\ 1)$. 60. $\pm(2/3;\ 2/3;\ -1/3)$. 61. $x-2y+5z=0$.
62. $2x+y+2z-3=0$. 63. 1) Перпендикулярны, 2) параллельны.
64. -1. 65. 2. 66. 30°. 67. 60°.

ГЛАВА VIII

1. а) $z_1+z_2=3-2i$, $z_1z_2=37-9i$, $z_1-z_2=1+12i$, $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$;

б) $z_1+z_2=2\sqrt{2}$, $z_1z_2=5$, $z_1-z_2=-2\sqrt{3}i$, $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$.

2. а) i; б) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$; г) $-117+44i$.

3. $z=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

4. $z_1=1-i$, $z_2=i$. 5. $(-2;\ -2)$; $(-2;\ 2)$.

6. Докажите равенства для двух чисел, затем примените метод математической индукции.

7. а) $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$; в) $z=2-\frac{3}{2}i$; г) $z=0$, $z_k=\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k=0$, 1, 2, 3, 4; д) $z=c\pm\sqrt{3}ci$, где c — произвольное действительное неположительное число.

8. $z=\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$. 10. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

11. а) Прямая, проходящая через точки $z=0$ и $z=1+i$. б) Прямая, проходящая через точки $z=0$ и $z=-1+i$. в) Точка $z=-1-2i$. г) Действительная отрицательная полуось $z=x$, $x<0$. д) Полуплоскость (вместе с границей), ограниченная прямой, проходящей через точки $z=0$ и $z=1+i$, и содержащая точку $z=-i$. е) Окружность радиуса $R=\sqrt{3}$ с центром в точке $z=-2+i$. ж) Круг радиуса $R=10$ с центром в точке $z=-i$ без границы круга и без центра. з) Угол (без границы) с вершиной в точке $z=-i$, стороны которого проходят через точки $z=1$ и $z=0$. и) Окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=0$.

12. а) $z=i$; б) $z=\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$.

13. а) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $\cos\pi+i\sin\pi$; в) $\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}$; г) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$.

14. а) $z=-\sqrt{2}$; б) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; в) $z=(-1)^n$; г) $z=-2^7i$.

15. а) 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; в) $2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $2\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $2\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; г) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{32}\pi+i\sin\frac{8k+1}{32}\pi\right)$, $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

16. а) $2n$; б) n.

17. а) $z_1=2+i$, $z_2=-2+i$; б) $z_1=13-i$, $z_2=7+i$; в) $z_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{6k+1}{15}\pi+i\sin\frac{6k+1}{15}\pi\right)$, $k=0$, 1, 2, 3, 4; г) $z_k=\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}$, $k=1$, 2, 3, 4, 5; д) $z_1=1$, $z_2=3$, $z_3=2i$, $z_4=-2i$; е) $z_1=1-\sqrt{3}i$, $z_2=-1+\sqrt{3}i$, $z_3=-2$; $z_4=-1-\sqrt{3}i$, $z_5=1-\sqrt{3}i$.

18. Воспользуйтесь формулами задачи 6.

19. $z_2=1-i$; $z_3=\frac{\sqrt{13}-1}{6}$; $z_4=\frac{-\sqrt{13}-1}{6}$.

20. $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 21. $\frac{i}{2}z+\frac{1}{2}+i$.

22. Нет, не может. Указание. Докажите, что все вершины находятся внутри круга радиуса $R=\left|\frac{1}{1-z}\right|$ с центром в точке $\frac{1}{1-z}$.

ГЛАВА IX [1])

1. $\pi(1+2n)/8$, $\pi(1+2n)/4$. **2.** $\pi(1+2n)/2$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

3. $\pi(1+2n)/8$, $\pi(1+2n)/4$. **4.** $\pi(8n-1)/16$, $\pi(8n+1)/24$.

5. $\pi(1+4n)/6$, $2\pi n$. **6.** $\pi n/2$, $\pi(1+2n)/8$. **7.** $\pi(12n-1)/12$, $\pi(12n-5)/12$.

8. $\pi(8n\pm3)/4$. **9.** $\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n$. **10.** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{21}-1}{4}+\pi n$.

11. $\pi(1+2n)/2$. **12.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **13.** $\pm\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{12}+2\pi n$.

14. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **15.** $\pm\arccos(-1/2\sqrt{2})+2\pi n$.

16. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$. **17.** $\pm\arccos(-1/4)+2\pi n$. **18.** π, $4\pi/3$.

19. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **20.** $\frac{\pi}{4}(1+2n)$, $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin(2\sqrt{2}-2)+\frac{\pi n}{2}$.

21. πn, $\pi(4n-1)/4$. **22.** πn, $\pi(3n-1)/3$. **23.** $p\geqslant 1/\sqrt{3}$.

24. $\arccos(3/5)+\pi(2n+1)$. **25.** $\pi(2n+1)/2$. **26.** $3/4$.

27. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **28.** $-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$. **30.** $\pi(1+2n)/2$.

31. πn, $\pi(3n-1)/3$. **32.** $\frac{\pi}{4}(1+2n)$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$.

33. $\pi(1+2n)/2$, $\pi(1+2n)/4$.

34. $\pi(4n+1)/4$, $\pi(24n+1)/12$, $\pi(24n+5)/12$.

35. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}}+\pi n$.

36. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **37.** $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$

38. Если $a\geqslant 1$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a}+\pi n$; если $|a|<1$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

39. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **40.** $\pi(1+4n)/4$. **41.** $\pi n/4$.

---

[1]) Здесь в ответах для кратности указаны только значения переменного, целочисленные параметры обозначены буквами m, n, ... Например, запись «1. $\frac{\pi(1+2n)}{8}$, $\frac{\pi(1+2n)}{4}$» следует понимать так: «1. $\left\{\frac{\pi(1+2n)}{8},\ \frac{\pi(1+2n)}{4}\right|$ $n\in\mathbb{Z}\}$».

42. $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi n$. **43.** $\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **44** $\pi n/3$.

45. $\pi(1+2n)/12,\ \pi(1+2n)/2$. **46.** $\pi(1+2n),\ \pi(6n\pm 1)/3$.

47. $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi n$. **48.** $2\pi(3n\pm 1)/3$. **49.** $\pi(1+2n)$.

50. $\pi(1+6n)/6$. **51.** $\pi n/3,\ \pi(1+2n)/7$.

52. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2-4}\right),\ n\neq -1,\ 0$.

53. $-2,\ -\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}(-7\pm 3\sqrt{5})$. **54.** $\pi(16n\pm 1)/8$.

55. $\pi(1+2n)/6$. **56.** $\pi(1+4n)/4$. **57.** $\pi n,\ \pi(6n\pm 1)/9$.

58. $\pi(1+2n)/4,\ \pi(3n\pm 1)/3$. **59.** $\pi n/2$. **60.** $\pi n,\ \pi(6n\pm 1)/6$.

61. $\pi(1+2n)/2,\ \pi(6n\pm 1)/3$. **62.** $\pi(6n\pm 1)/3,\ 4\pi n$.

63. $\pi(1+2n)/2,\ \pi(1+4n)/18$. **64.** $\pi n/2,\ 2\pi(3n\pm 1)/3$.

65. $\pi(1+2n)/14,\ \pi(1+2n)/4$.

66. а) $\arccos(1/\sqrt{3})+\pi(1+4n)/2$; б) $\pi(2n+1)-\operatorname{arctg} 3$.

67. $\pi n/2$. **68.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **69.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$.

70. $\pi n,\ \pi(1+2n)/16$. **71.** $\pi(1+2n)/7,\ n\neq 7m+3,\ m\in\mathbb{Z}$.

72. $\pi(6n\pm 1)/6$. **73.** $\pi(1+2n)/5,\ n\neq 5m+2,\ m\in\mathbb{Z}$. **74.** $\pi(\ +2n)/2$.

75. $\pi(16n+3\pm 2)/8,\ \pi(8n-3)/4,\ \pi(24n-3\pm 2)/12$.

76. $2\pi n,\ \pi(1+2n)/2,\ \pi(6n-1)/6$. **77.** $|a|\geqslant 10$.

78. Если $|a\geqslant 1/2$, то $x=(\operatorname{arctg}(4a\pm 2\sqrt{4a^2-1})+\pi n)/2$; если $a<1/2$, то решений нет.

79. Если $a\in\left]\frac{1}{3};\ 1\right[$, то $x=\pi(1+2n)/2$; если $a\notin\left]\frac{1}{3};\ \right[$, то $x=$ $=\pi(1+2n)/2,\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2a-1}+\pi n$.

80. Если $|a|>\sqrt{5}$, то $x=\pi n/2$; если $a|\leqslant\sqrt{5}$, то $x=\pi n/2,\ x=$ $=\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{a}{\sqrt{5}}+\pi n\right)$.

81. $\pi n,\ \pi(8n-3)/4$. **82.** $2\pi n,\ \pi(4n-1)/2$. **83.** $\pi(12n-5)/6$.

84. $\pi(3n\pm 1)/6$. **85.** $\pi(1+2n)/4$.

86. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ -\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi n$. **87.** $|a|\leqslant 1$.

88. а) $1\leqslant a\leqslant\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; б) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}-1)/2\leqslant a<(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)/2$, $a=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

89. $\pi n/3$. **90.** $\pi(6n+1)/18$.

91. $\pi(4n-1)/2,\ \frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$.

92. $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n,\ 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

93. $2\pi n/3$. **94.** $\pi n/2$. **95.** 0. **96.** $2n-\frac{1}{2}$. **97.** $\pi(1+2n)/2$.

98 [1]). $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \left(\frac{5}{2}\mp\frac{2}{3}\right)\pi-2\pi n\right)$.

99. $\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi n;\ \pi n\right)$, $\left(\left(\frac{3}{2}\mp\frac{1}{3}-2n\right)\pi;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

100. Если $a=2\pi n$, то $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+m)$, $y=\mp\frac{\pi}{3}+\pi(n-m)$; если $a=(2n+1)\pi$, то $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi\left(n+m+\frac{1}{2}\right)$, $y=\mp\frac{\pi}{6}+\pi\left(n-m+\frac{1}{2}\right)$; если $a\neq\pi n$, то решений нет.

101. $(\mp 0{,}5;\ \pm 0{,}5)$, $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ \pm 1)$.

102. $(\operatorname{arctg}(2\pm 0{,}8\sqrt{5})+\pi m;\ \operatorname{arctg}(2\mp 0{,}8\sqrt{5})+\pi n)$.

103. $(\pi(8m\pm 1)/2;\ 2\pi(2n+1))$, $(2\pi(2m+1);\ \pi(8n\pm 1)/2)$.

104. $\left(-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m;\ -\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi n\right)$.

105. $(\pi(2m-1)/4;\ \pi(2m+8n+1)/4)$.

106. $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi m;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$.

107. $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi(m+n);\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi(m-n)\right)$, знаки берутся произвольно.

108. x — любое число, не равное $\pi(1+2m)/4$, $y=\pi(1+2n)/2$.

109. $\left(\frac{\pi}{2}(1+2m);\ \frac{\pi}{2}(1+2n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}(1+2m);\ 2\pi n-\frac{\pi}{4}(1+2m)\right)$.

110. $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi m;\ \mp(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi m}{5};\ \pi n\right)$.

111. $((-1)^n\arcsin(7/8)+\pi(n+2m);\ (-1)^n\arcsin(1/4)+\pi n)$.

112. $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2};\ \frac{\pi}{2}+\pi(2n-m)\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi m;\ (-1)^{m+1}\frac{\pi}{4}+\pi(2n-m)\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \pi(2n-m)\right)$.

113. $\left((-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left((-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi m;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$.

114. $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi m;\ (-1)^{m+n+1}\arcsin\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}+\pi n\right)$, $\left(\pi m;\ (-1)^m\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi m;\ (-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$.

115. $(\pi m;\ \pi(1+2n)/4)$, $(\pi(1+2m)/4;\ \pi n)$.

116. $(\pi m;\ \pi n)$, $\left(\pi m;\ \pm\frac{\pi}{4}+\pi(m+2n+1)\right)$.

117. $\left(\mp\frac{\pi}{3}+2\pi m;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$.

118. $(\pi m;\ \operatorname{arctg}2+\pi n)$, $\left(\frac{\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi m;\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$.

---

[1]) Если в записи решений x, y системы встречаются двойные знаки, то, если нет специального указания, следует брать и для x и для y одновременно либо верхние, либо нижние знаки.

119. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi m;\ \pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \frac{3\pi}{4}+\pi(2n-m)\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 2+\right.$ $\left.+\pi(2m+n);\ -\operatorname{arctg} 2+\pi n\right)$.

120. $(\pi m;\ 2\pi n)$, $\left(\mp \arccos\frac{1}{7}+2\pi m;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$.

121. $\left(\pi(2m+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(2m+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

122. $(\pi m;\ \pi n;\ \pi(2p-m-n))$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi(2m-n-p);\ \pm\frac{\pi}{4}+\pi n;\right.$ $\left.\pm\frac{\pi}{4}+\pi p\right)$.

123. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \pi(2n+m);\ \frac{3\pi}{4}+\pi(2p+m)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi m;\ \frac{\pi}{2}+\pi(2n+m);\right.$ $\left.\frac{\pi}{4}+\pi(2p+m)\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi m}{2};\ \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi\left(2n-\frac{m}{2}\right);\ -\frac{\pi}{2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi\left(2p+\frac{m}{2}\right)\right)$.

124. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi m;\ \frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi(2p-m-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi m;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n;\right.$ $\left.\frac{\pi}{3}+\pi(2p-m-n+1)\right)$.

125. $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$. 126. $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n$.

127. $2\operatorname{arctg} 2+2\pi n<x<2\pi(n+1)$.

128. $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n$.

129. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n\leqslant x\leqslant\pi(2n+1)$.

130. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n\leqslant x<\pi n$.

131. $n-\frac{1}{2}<x\leqslant n-\frac{1}{3}$, $n-\frac{1}{4}<x\leqslant n$, $n+\frac{1}{4}<x\leqslant n+\frac{1}{3}$.

132. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$.

133. $2\pi n<x<\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{8}+$ $+2\pi n$, $\frac{7\pi}{8}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $\frac{9\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{8}+2\pi n$, $\frac{13\pi}{8}+2\pi n<x<$ $<\frac{15\pi}{8}+2\pi n$.

134. $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n$.

135. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2\pi n$.

136. $\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x\leqslant\operatorname{arctg} 3+\pi n$.

137. $\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$, $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{7\pi}{8}+2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi n$.

138. $2\pi n \leqslant x < \arcsin(\sqrt{5}-\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}-\arcsin(\sqrt{5}-\sqrt{2})+2\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$.

140. $\sin^2(\alpha+\beta)$. **144.** а) a^3; б) 225/128. **145.** $(a+b)^{-3}$.

146. а) $4/5$; б) $-1/8$; в) $2/\sqrt{5}$; г) $-2/\sqrt{5}$; д) 9/25. **148.** π.

149. $a=4$, $a>5$. **150.** $n \pm \frac{1}{6}$. **151.** $\pi(1+2n)/2$, $\pm \operatorname{arctg}(1/2)+\pi n$.

152. 6; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \geqslant 2$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \leqslant 0$.

153. $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{3}+2n$, $n \geqslant 1$; $\pm\frac{2}{3}+2n$, $n \leqslant -1$.

154. $-2\pi/3$; $-\pi/3$; $4\pi/3$; $5\pi/3$. **156.** 35.

157. $-15/2$; $-3/10$; $3/2$.

158. $a_n = \pm\left(2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$, $x_n = 2\pi n-\frac{\pi}{2}$, $n \geqslant 1$.

159. $12\pi-1$. **160.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$.

161. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$. **162.** $\sqrt{2\pi}$, $(\sqrt{1+8\pi}-1)/2$.

163. 1/2. **164.** -1. **165.** $-\operatorname{arctg}(1/2)$, $-\operatorname{arctg}(1/3)$.

166. $a=\frac{\pi^3}{32}$, $\frac{\pi^3}{8} < a \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$.

167. а) x — любое число, $y=2\pi n$; б) $x=\pi m$, $y=\pi n$; в) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; г) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi m$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(2n+m)$, комбинация знаков произвольна.

168. $\left(0;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$.

170. При $a=\frac{\operatorname{tg}^2 1+2}{2(2\operatorname{tg} 1-1)}$ три решения: $x=0$, $x=\pm 2\pi$; при $a=-1/2$ четыре решения: $x=\pm\sqrt{3\pi^2 \pm 2\pi\arccos\frac{\pi}{4}-\left(\arccos\frac{\pi}{4}\right)^2}$, комбинация знаков произвольна.

ГЛАВА X

1. 0,6. **2.** 1,5. **3.** 2; $\log_5 0{,}1$. **4.** 2. **5.** 3.

6. а) $\frac{b+1}{2-ab}$; б) $\frac{2b-1}{3(2a+2b-ab-3)}$. **7.** $\pi(2n+1)/2$. **8.** $\pi(2n+1)/4$.

9. $\pi(2n+1)/4$. **10.** 1/2. **11.** $-2-\sqrt{10}$. **12.** 2. **13.** $-2-\sqrt{10}$.

14. -1. **15.** 1. **16.** $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$. **17.** 7; 14. **18.** 9; 1/9.

19. 3. **20.** 3. **21.** 6. **22.** $\pm \frac{\pi}{3}+2\pi n$.

23. $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$. **24.** -5. **25.** $5\pi/4$. **26.** $\pi/4$.

27. а) $\log_2 11$; б) $\sqrt{6}$. **28.** πn; $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$. **29.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$.

30. 5. **31.** $-0{,}5$. **32.** $(-1)^n \frac{\pi}{8}+\pi n$. $(-1)^n \frac{3\pi}{8}+\pi n$.

33. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. **34.** 3; $\sqrt{3}/2$. **35.** $\sqrt{2}$. **36.** 2^{12}. **37.** $2-\sqrt{2}$.

38. 0,25. **39.** 9; 1/9. **40.** -3; -8. **41.** 15; 1.

42. Если $a \neq 1$, $n \neq 0$, то $x=1$, $x=a^{(2-n)/(n-1)}$; если $a \neq 1$, $n=0$ $x=1$; если $a=1$, то решений нет.

44. $\sqrt{6}$; $\sqrt{2}$. **45.** 20. **46.** 3; $\sqrt{2}$. **47.** 2. **48.** 4.

49. 1/9. **50.** 8. **51.** 5/12. **52.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **53.** $2\pi n$. **54.** 2; -2.

55. $a=-7/4$, $a<-2$. **56.** Два решения. **57.** 2. **58.** 9.

59. (9; 7), (7; 9). **60.** (10; 0,1). **61.** (4; 1), (1; 9). **62.** (3; 2).

63. (5; -1). **64.** (3; $\log_3 2$). **65.** (1; 1), $(1/\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9})$.

66. $\left((-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm \frac{\pi}{3}+2\pi m\right)$. **67.** (1/2; 1/4), (1/8; 64).

68. $(\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, (2;1). **69.** (9; 27), (1/9; 1/3).

70. (3; 2). **71.** (1; 2). **72.** (5,5; 2,5). **73.** (16; 4)

74. $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}};\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. **75.** (2; 3), $(c;\ 1)$, где $1<c<3$.

76. (25; 13). **77.** $(10^{-1};\ 10^{-4})$, $(10^{-4};\ 10^{-1})$.

78. (1,5; 0,5), (0,5; 1,5). **79.** $(-0{,}5;\ -0{,}5)$.

80. (0; 0), (4; 4), $(2 \pm \sqrt{7};\ 3)$, $(2 \pm \sqrt{7};\ 1)$.

81. (0; 1; 2), (1; 0; 2), (0; 2; 1), (2; 0; 1), (2; 1; 0), (1; 2; 0)

82. $(\pm 3;\ \pm 2;\ \pm 1)$.

83. (9; 3; $\sqrt{3}$), (9; 1/3; $1/\sqrt{3}$), (1/9; 1/3; $\sqrt{3}$), (1/9; 3; $1/\sqrt{3}$).

84. $\left(\frac{2}{\sqrt{21}};\ \frac{2}{\sqrt{35}};\ \frac{2}{\sqrt{15}}\right)$. **85.** (1; -1). **86.** $a>-1$. **87.** $a=-1$.

88. а) $\log_{\log_3 2} 0{,}5>0$; б) $\log_3 2>\frac{5}{8}$. **89.** $]0;\ 0{,}5[\cup]4;\ +\infty[$.

90. $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$. **91.** $]-\infty;\ -2[\cup]5/8;\ +\infty[$.

92. $]-1;\ -0{,}5[\cup]1;\ 2[$. **93.** $]1;\ +\infty[$. **94.** $]6/5;\ 4/3[$.

95. $]2-\sqrt{2};\ 3/4]\cup[13/4;\ 2+\sqrt{2}[$. **96.** $]-19/4;\ -3[\cup]4;\ 23/4[$.

97. Если $a>1$, то $|x|>\sqrt{a}$ или $0<x<1/\sqrt{a}$; если $0<a<1$ $0<x<\sqrt{a}$ или $x>1/\sqrt{a}$.

98. $]-\infty;\ [\cup]1;\ +\infty[$. **99.** $[0;\ 1]$. **100.** $]-\infty;\ -1[$.

101. $[0{,}5;\ 2]$. **102.** $]0;\ 10]\cup[10^5;\ +\infty[$.

103. $]0;\ \log_3 28-3[\cup]\log_3 4;\ +\infty[$.

104. $]-\infty;\ \log_3\log_3 2[\cup]0;\ +\infty[$. Неверно.

105. $]3;\ +\infty[$. **106.** $[1-\sqrt{5};\ -1/3[\cup[1+\sqrt{5};\ +\infty[$.

107. $\frac{\pi}{24}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{24}+2\pi n$. **108.** $]-2;\ 4[$.

109. $]1;\ 1+\sqrt{2}]$. **110.** $]1;\ 2[\cup[3;\ 4[$.

111. $]-\infty;\ -2[\cup]1;\ 2[$. **112.** $[\log_3 0{,}9;\ 2[$.

113. $]-\infty;\ 0[\cup]2;\ +\infty[$. **114.** $]0;\ 1/\sqrt{6}]\cup[1;\ +\infty[$.

115. $]-1;\ -0{,}5[\cup]0;\ 1[$. **116.** $]1;\ 2^{\sqrt{2}}[\cup]2^{-\sqrt{2}};\ 0{,}5[$.

117. Если $0<a<1$, то $a^2<x<1$, $a^3<x$; если $a>1$, то $1<x<a^2$, $0<x<a^{-3}$.

118. $]2;\ 3[\cup]\sqrt{10};\ +\infty[$. **119.** $[0{,}2;\ 5]$. **120.** $[0;\ 1[$.

121. Если $0<a<1$, то $0<x<a$, $a^{-2}<x$; если $1<a$, то $a^{-2}<x<a$.

122. $]-1;\ 0[\cup]1{,}5;\ 4[$. **123.** $]-0{,}5;\ -0{,}25]\cup]0;\ 0{,}5]$.

124. $]3;\ (5+\sqrt{7})/2]\cup]4;\ 4{,}5]$. **125.** $]1;\ 2[\cup[4;\ +\infty[$.

126. $]1;\ \sqrt{(\sqrt{69}-3)/2}[$. **127.** $]1;\ \sqrt{2}[\cup]2;\ +\infty[$.

128. $[7;\ +\infty[$. **129.** $]1;\ 2]\cup[16;\ +\infty[$.

130. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+2\pi n$.

131. Если $0<a<1$, то $a^{-a\sqrt{2-a^2}}<x\leqslant a^{-1}$; если $1<a$, то решений нет.

132. Если $a<0$, то $1<x<(1+\sqrt{1-4a})/2$; если $a=0$, то решений нет; если $0<a\leqslant 1/4$, то $a<x<(1-\sqrt{1-4a})/2$, $(1+\sqrt{1-4a})/2<x<1$; если $1/4<a<1$, то $a<x<1$; если $1\leqslant a$, то решений нет. Указание. Построить для наглядности графики функций x^2 и $x-a$.

133. $]1;\ 1{,}5[$. **134.** $a<-2$. **135.** $|a|>2$.

137. а) $\log_3 30>\log_4 60$; б) $\log_3 75>\log_2 11$. **139.** $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$

144. $x_1=\pi$, $y_1=0$; $x_2=\arccos(1/3)$; $y_2=(\pi-\arccos(1/3))^2$; $x_3=\pi-\arccos(1/3)$, $y_3=(\arccos(1/3))^2$.

145. $(2;\ 2)$. **146.** $]1;\ 2[$.

147. а) Открытый луч с началом в точке $(8/7;\ 9/7)$, проходящий через точку $(5;\ 0)$. б) Внутренние точки четырехугольника $ABCD$ с вершинами $A(-2;\ 3)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 2)$, $D(1;\ 3)$ и точки интервала BC.

148. $(0;\ 1)$. **149.** 5.

ГЛАВА XI

1. а) 1/15; б) $k(k+1)$, если $k\geqslant n$.

2. а) 27; б) 2; в) 3; 14; г) 10, если $k\leqslant 10$; д) 3; е) $\{0;\ 1;\ 2\}$; ж) $\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 27\}$.

3. а) $\{1;\ 2;\ 3\}$; б) $\{1;\ 9;\ 14;\ 15;\ 35\}$. **4.** а) 870; б) 435.

5. 12. **6.** 16. **7.** 210. **8.** 576. **9.** 18; 10. **10.** 18. **11.** 4060.

12. 72. **13.** а) 120; б) 60; в) 420; г) 83 160. **14.** $\frac{28!}{(7!)^4}$.

15. 5040. **16.** 15 625. **17.** 12. **18.** 16. **19.** $(n+1)!\,m!$.

20. 945. **21.** 330. **22.** Может не хватить.

23. Если $n<7$, то чисел с цифрой 9 меньше; если $n\geqslant 7$, то чисел с цифрой 9 больше.

24. а) $(x+1)^7=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$;

б) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5=a^{5/2}b^{-5/2}-5a^{3/2}b^{-3/2}+10a^{1/2}b^{-1/2}-10a^{-1/2}b^{1/2}+5a^{-3/2}b^{3/2}-a^{-5/2}b^{5/2}$.

25. а) $89\sqrt{3}-109\sqrt{2}$; б) 16.

26. а) $1716a^3\sqrt{a}\,b^2$; б) 5005; в) $153\sqrt{2}\,x^8$; г) $C_{100}^{80}x^{1080}$.

27. а) 60; б) 625; 7000; 7000; 1120; 16. 28. 32.

29. а) 27/64; б) $\sqrt{10}\,50^3C_{20}^7$. 30. а) 378; б) 245.

31. а) -1; б) 1/16. 33. а) 1/4; б) 1/3; в) 0; г) 5/12. 34. 5/36.

35. 93/168 36. 120/343. 37. 29/52. 38. 164/1081.

39. а) 9/17; б) 8/17.

ГЛАВА XII

1. а) $\frac{1}{3}e^{3x+2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{4}-2x^{3/2}+C$; б) $\frac{1}{2\ln 2}2^{2x}-\frac{3}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}+\frac{3}{4}(2x-1)^{2/3}+C$; в) $\frac{3}{2}\ln|2x+5|+4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\sin 3x+C$.

2. а) $2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{2}\cos 3-1$; б) $\ln x-3+\frac{1}{2}e^{2x+1}+2-\ln 2-\frac{1}{2}e^3$.

3. $F(x)=\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{3}{4}\cos x+\frac{5}{3}$. 4. $f(x)=\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{7}{3}$.

5. В промежутке $]-3;\ 1[$ имеем $F(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+C$; в промежутке $]1;\ 3[$ имеем $F(x)=-\varphi(x)+C$ при $x<2$ и $F(x)=\varphi(x)-\frac{20}{3}+C$ при $x\geqslant 2$, где $\varphi(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x$.

6. 2. 7. Не всегда

8. Не всегда, например, $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x+3$. 9. Да.

10. а) $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$; б) $-\frac{1}{14}\cos 7t-\frac{1}{10}\cos 5t+C$; в) $\frac{2}{7}x^{7/2}+2x+\frac{1}{2}x^2+C$; г) $\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}+\frac{12}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}+C$; д) $\frac{1}{2}\ln|2u-1|+\frac{9}{8}(4u+1)^{2/3}+C$; е) $\frac{x^2}{2}-x+C$, если $x>1$, и $-\frac{x^2}{2}+x-1+C$, если $x\leqslant 1$; ж) $-\ln|1+\cos x|+C$.

11. а) $-x\cos x+\sin x+C$; б) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$; в) $(x^2-2x+3)e^x+C$; г) $\left(\frac{x}{3\ln 2}-\frac{1}{(3\ln 2)^2}\right)2^{3x}+C$.

12. а) 3,5; б) 1; в) $\frac{56}{3\ln 2}-\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 2)$; г) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$; д) $\frac{5}{6}(8^{4/5}-2^{4/5})$; е) $\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{-4})$; ж) $\sin 1+\cos 1-1$; з) $1/(2\ln 2)$; и) 1.

13. 1. **14.** $A=\frac{1}{\ln 2}$, $B=\frac{7}{3}-\frac{7}{3(\ln 2)^2}$. **15.** $\sqrt{2\pi}$, $\frac{-1+\sqrt{1+8\pi}}{2}$.

16. а) $(x+1)e^x$; б) $-2^{t^4}2t\ln(1+t^4)$; в) $-\sin u\cdot e^{\cos u}\cdot\sin^3(2\cos u+5)-$ $-\cos u\cdot e^{\sin u}\cdot\sin^3(2\sin u+5)$.

17. а) 1; б) 5/12; в) $e+\frac{1}{e}-2$; г) $\frac{\pi}{2}+2$; д) 8/3; е) $3-\frac{3}{4\ln 2}$; ж) $7\ln 3$; з) $\frac{37\sqrt{37}-55}{54}$; и) $9-4\ln 4$; к) $\frac{15}{4}-\ln 2$.

18. $\ln 2-\frac{5}{8}$. **19.** $0<a<1/6$. **20.** 200/243.

21. 1/8. **23.** $\frac{\pi}{7}(3^7-15)$. **24.** $\frac{3}{8}\pi^2$.

25. а) $\frac{\pi}{2\alpha+1}$; б) $\frac{2\pi}{2+\alpha}$; в) $\pi\frac{3\alpha+1}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}$; г) $\frac{2\pi}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$; д) $\frac{3\pi\alpha\sqrt{2}}{2(2+\alpha)(1+2\alpha)}$, если $\alpha>1$, $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, если $0<\alpha\leqslant 1$.

ГЛАВА XIII

2. $\frac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$. **3.** $2a^2$. **4.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$. **5.** $\frac{\pi}{4}ab$. **6.** 1 : 4.

7. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$; $(2-\sqrt{3})a$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$. **8.** $\frac{\sqrt{mn}}{2}b$. **9.** 3 : 1; 1 : 3.

10. 7 : 1. **11.** $\sqrt{n+2}$. **12.** 20 см². **13.** 2 : 1.

14. $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$. **15.** 1 : 2. **16.** $\sqrt{\frac{na^2+mb^2}{m+n}}$.

17. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+6ab}$. **19.** $\frac{2rh}{\sqrt{h(h-r)}}$.

20. $m(p+1)+p(n+1)+n(m+1)+1$. **21.** $\frac{1}{9}S$. **22.** $\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}$.

23. 5 : 8; 4 : 1. **24.** $\frac{6}{5}a$. **25.** $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$. **26.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}R^2$.

27. Указание. Через точки D и A провести прямую до пересечения с прямой BM. Показать, что DM — медиана образовавшегося треугольника.

28. $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{4a}$. **29.** $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. **30.** $R/3$; $3R$. **31.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}R$. **32.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

33. $a/2$; $a^2/2b$. **34.** $\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}R$. **35.** 6 см². **36.** $\sqrt{3}/2$. **37.** 3/2.

38. $(n-m)/2m$. **39.** $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$. **40.** 144 см².

41. $\sqrt{m^2+mn}$; $\sqrt{n^2+mn}$. **42.** $\frac{35}{2}(5\sqrt{2}\pm 4\sqrt{3})$. **43.** 13/20.

44. Использовать векторную алгебру. 45. Использовать результат задачи 44.

46. $a\sqrt{(R+r)/R}$. 47. 2. 48. 20/17. 49. 8 см. 50. 12 см.

51. $\sqrt{7}/2$ см. 52. 3/2. 53. 8 : 7. 54. $(2n+1):1$.

55. $\pi/2$; $\pi/3$; $\pi/6$. 56. $\dfrac{b(b+m-n)}{b-n}\sqrt{mn}$.

57. $\pi/4$. 58. 3. 59. $\sqrt{4\sqrt{3}-3}$. 60. $\pi/3$; $\pi/12$; $7\pi/12$.

61. $\dfrac{b}{8(1-\cos\alpha)}$. 62. $\dfrac{5}{24}R$. 63. $\dfrac{3}{10}S$; $\dfrac{3}{2}S$.

64. $2\operatorname{arctg}(6/7)$. 65. $2\sin^2\alpha$. 66. $2\operatorname{ctg}^2\alpha$. 67. $2\sin^2\alpha$.

68. $\dfrac{4a\cos^2\alpha}{1+4\cos^2\alpha}$. 69. $\pi/3$. 70. $\dfrac{\sin 2\alpha}{4}a^2$. 71. $\dfrac{4}{3}R$.

72. $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{8}$; $\dfrac{3\pi}{8}$ (см. решение задачи 15 раздела I).

ГЛАВА XIV

1. Окружность с диаметром AO, где A — данная точка, O — центр данной окружности.

2. Окружность с центром в середине отрезка AO (A — данная точка, O — центр данной окружности) и с радиусом вдвое меньшим радиуса данной окружности.

3. Окружность с диаметром AB.

4. Окружность с радиусом $|AB|$ и с центром в точке B.

5. Треугольник OM_1M_2, где M_1 и M_2 — точки, расположенные на сторонах данного угла на расстоянии l от вершины O.

6. Отрезок.

8. Окружность с радиусом $\dfrac{\sqrt{2s-|AB|^2}}{2}$ и с центром в середине отрезка AB, если $2s>|AB|^2$; точка (середина отрезка AB), если $2s=|AB|^2$; пустое множество, если $2s<|AB|^2$.

9. Окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.

10. Отрезок, соединяющий середину основания с серединой высоты, опущенной на основание.

11. Четыре точки: центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, и три точки, являющиеся центрами окружностей, каждая из которых касается одной стороны указанного треугольника и продолжений двух других сторон этого треугольника.

12. Окружность с центром в точке C и с радиусом AC, за исключением точки A.

13. Прямая, содержащая гипотенузу.

14. Восьмиугольник, четыре стороны которого конгруэнтны и параллельны сторонам квадрата и удалены от центра квадрата на расстояние равное $\dfrac{3}{2}a$.

15. Прямая пересечения плоскостей, перпендикулярных сторонам трапеции и проходящих через их середины.

16. Четыре прямые, перпендикулярные плоскости α и проходящие соответственно через те четыре точки этой плоскости, которые указаны в ответе к задаче 11.

17. Если $A \notin l$, то прямая, лежащая в плоскости, проходящей через l и A, параллельная l, не проходящая через A и удаленная от l на расстояние равное расстоянию от A до l_2. Если $A \in l$, то прямая l.

18. Прямая, перпендикулярная l и проходящая через A.

19. Если $A \notin l$, то окружность с диаметром AA_1, где A_1 — точка симметричная точке A относительно прямой l. Если $A \in l$, то точка A.

20. Сфера с центром в точке B и с радиусом $|AB|$.

21. Сфера с центром в точке B и с радиусом $|AB|$.

22. Дуга окружности с диаметром OA (O — центр шара, A — точка пересечения данной прямой l с плоскостью α, перпендикулярной l и проходящей через O), лежащая в плоскости α и заключенная внутри шара.

23. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, центр которой совпадает с центром данной сферы.

24. Пусть h — расстояние между l_1 и l_2. Если $h=0$, то окружность с центром в точке пересечения прямых l_1 и l_2 и с радиусом $a/2$ (задача 2, § 2). Если $0<h\leqslant a$, то окружность, лежащая в плоскости, равноотстоящей от параллельных плоскостей, содержащих l_1 и l_2, с центром в середине общего перпендикуляра прямых l_1 и l_2 и с радиусом $\sqrt{a^2-h^2}/2$ (при $h=a$ окружность вырождается в точку). Если $h>a$, то пустое множество.

40. Точка касания окружности, проходящей через A и B, со стороной угла.

42. Указание. Рассмотрите точки, симметричные точке M относительно сторон угла.

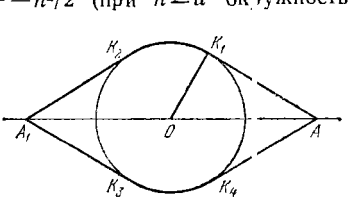


Рис. 430.

44. Пешеход может оказаться в любой точке фигуры, ограниченной двумя дугами AK_1, K_2A_1, A_1K_3, K_4A. В начальный момент пешеход находился в точке O; $|OA|=6$ км, $|OK_1|=3$ км.

ГЛАВА XV

2. Не следует.

6. Если $\alpha \parallel \beta$, то γ следует провести так, что $\gamma \cap \alpha \neq \emptyset$; если $\alpha \nparallel \beta$, то γ следует провести параллельно линии пересечения плоскостей α и β.

7. Если данные прямые не параллельны.

9. Пусть $\alpha \supset a$, $\alpha \parallel b$; $\beta \supset b$, $\beta \parallel a$. Задача не имеет решения, если $M \in \alpha$, но $M \notin a$, или если $M \in \beta$, но $M \notin b$.

10. Не единственна. **11.** а) Могут; б) не могут.

12. а) Может; б) может; в) не может.

13. а) Не может; б) не может; в) может. **19.** $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$.

20. 1 : 2. **21.** $m-n+p$. **22.** 2 : 1, считая от точки M.

23. 1 : 5. **24.** 2 : 3; 1 : 1. **25.** 2 : 9. **26.** 3 : 1, считая от точки A.
27. 2 : 3, считая от вершины S. **28.** 2 : 1, считая от вершины S.
29. 3 : 7, считая от вершины A_1. **30.** 5 : 1, считая от вершины B.
31. $\frac{7\sqrt{6}}{16}a^2$. **32.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.
33. Сечение, проходящее через середину ребра AB. **34.** $mp : n$.
35. $\frac{al\sqrt{2}}{3}$. **36.** 1. $\frac{\sqrt{5}}{3}a$; 2. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **37.** 3 : 4. **38.** 1 : 3. **39.** $\frac{2}{3}a$.
40. $\frac{3}{4}a$. **41.** $\frac{ma}{3}$. **45.** $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{9}(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})$.
46. $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{CD}$. **49.** 1 : 1; 3 : 1.
50. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **51.** 2 : 3. **54.** $\arccos(2/3)$; $\arccos(1/3)$.
55. а) $\arccos(1/\sqrt{10})$; б) $\arccos(1/\sqrt{10})$; в) $\arccos\sqrt{2/5}$. **56.** $\arccos(1/2\sqrt{3})$.
57. $\alpha/2$; $(\pi-\alpha)/2$. **58.** а) $\arccos(1/6)$; б) $\arccos(5/6)$.
59. $(3-\sqrt{3}):2$. **60.** $a\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$. **61.** Не существует.
64. $\arccos\left(\frac{1}{4}+\cos^2\alpha\right)$. **65.** $\arccos(5/(3\sqrt{6}))$. **67.** $\pi/3$.
68. $\sqrt{b^2-2a^2(1\pm\cos\alpha)}$; $b>\sqrt{2}\,a$. **69.** $a/\sqrt{2}$.
70. $1/\sqrt{2}$. **71.** $\frac{\sqrt{2}}{3}a$. **72.** $\frac{\sqrt{10}}{3}a$. **73.** а) $\frac{\sqrt{38}}{4}a$; б) $\frac{\sqrt{11}}{6}a^2$.
74. $n^2 : 1$, считая от вершин A и D.
75. 3 : 2, считая от вершин D и B. **76.** $a/\sqrt{10}$.
77. $\frac{\sqrt{23}}{6}a$. **78.** a; $3a$. **79.** a; $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. **81.** $\frac{5\sqrt{3}}{36}a^2$.
82. $\arccos(\cos\beta-\cos\alpha)$. **83.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **84.** $-3a^2$.
86. Пусть M и N — середины отрезков AC и BD, $p=\frac{1}{2}(|AC|^2-|BD|^2)$.
Если $M=N$, то искомое множество: а) при $y_0=p$ — все пространство; б) при $y_0\neq p$ — пустое множество. Если $M\neq N$, то искомое множество — плоскость, перпендикулярная прямой MN.
87. $8b^2+4a^2(2+\sqrt{2})$.
88. Середина отрезка PQ, где P и Q — середины отрезков AB и CD (если отрезок вырождается в точку, то его серединой считается эта точка).

ГЛАВА XVI

1. $B\left(\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{3};\ \frac{7\mp2\sqrt{3}}{3};\ \frac{7\pm\sqrt{3}}{3}\right)$,
$C\left(\frac{-3\mp2\sqrt{3}}{9};\ \frac{21\pm2\sqrt{3}}{9};\ \frac{21\mp\sqrt{3}}{9}\right)$.
6. $\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** $a\sqrt{1-2\cos\alpha}$.

8. $\frac{\sqrt{5}}{4}a$. 9. $\overrightarrow{SH}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. 10. a.

13. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}S\operatorname{ctg}(\alpha/2)$; б) $\sqrt{3}S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 14. $\frac{\sqrt{14}}{3}a$. 15. $\frac{2}{9}a^3$.

17. $\frac{1}{2}a^2$. 18. $\sqrt{b^2-7a^2}$, $\sqrt{b^2-3a^2}$. 19. $\frac{2}{3}a$.

20. а) $\frac{2}{5}\sqrt{10}a$; б) $\frac{1}{8}\sqrt{10}a$. 21 $\sqrt{\frac{7}{3}}a$.

22. а) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$; б) $\frac{41}{96}a^2$. 23. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 24. а) $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$; б) $\frac{3\sqrt{15}}{16}a^2$.

25. $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha$. 26. 1 : 2, считая от вершины S. 27. $a^3/6$.

28. $2\sqrt{2}a$. 30. $2a\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}$. 31. $\pi/6$.

32. а) $\alpha_x=\alpha_y=\alpha_z=\arccos(1/\sqrt{3})$; б) $\arcsin(1/\sqrt{3})$.

33. $\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\beta}$. 34. $c/\sqrt{6}$; $a/2\sqrt{6}$.

35. а) 2 : 1; б) 14 : 1; 2 : 3, считая от вершины A.

36. $\arcsin(1/3)$. 38. 7. 39. 37/30; 0. 40. (0; 0; 3), (0; 0; $-2{,}5$).

41. $D(1;\ 4;\ 1)$, $A_1(1;\ 3;\ 3)$, $B_1(3;\ 4;\ 2)$, $D_1(1;\ 6;\ 3)$; $\sqrt{3}$. 42. $-\frac{a}{4\sqrt{2}}$.

43. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$, 44. $\frac{2}{\sqrt{5}}H$. 45. $\frac{4}{9}a^3$. 46. $2/\sqrt{3}$. 47. 4,5 см.

48. $0{,}3a$. 49. $\sqrt{10}/6$ см. 50. 1,5 a.

51. Если $0<l\leqslant a\sqrt{3}$, то $\rho=\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}al+l^2}$, если $l>a\sqrt{3}$, то $=\sqrt{\frac{9}{4}a^2+l^2}$.

52. $\arcsin\left(\sin\varphi\cdot\cos\frac{\psi}{2}\right)$. 53. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\varphi\right)$. 54. $\arccos\sqrt{-\cos\alpha}$.

55. а) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\arccos\frac{8}{9}$; г) $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$.

56. $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. 57. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{2}{3}$.

58. а) $\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4\cos\alpha}$; б) 6 см^3. 59. $\arccos(\pm\operatorname{ctg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\psi)$.

60. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\cdot\sin\psi\right)$. 61. $3a$. 63. $\frac{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)^{3/2}}{(1+2\cos\alpha)^2}a^2$.

64. $\frac{a^3}{3}$. 65. $3a^3$, 66. $\arccos\frac{1}{6}$. 67. $2\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$.

69. $3\sqrt{3}a$. **70.** $a\sqrt{\dfrac{1-2\cos\varphi}{3}}$. **71.** $2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

72. $\dfrac{a^3}{12}$ во всех случаях. **73.** $\dfrac{2}{3}a^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. **74.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}a^3$.

75. $\dfrac{b^3}{8}\sin 2\alpha$. **76.** $\dfrac{b^3}{3}\sin^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$. **77.** $\dfrac{1}{6}S\sqrt{S\sin\alpha}\operatorname{tg}\beta$,

78. 3 : 1. **80.** $\dfrac{a^3}{24}$. **81.** mnp : 1. **82.** а) 13 : 23; б) 5 : 19; в) 19 : 41.

85. 9 : 5. **86.** $q^2(3+q):(1+3q)$. **87.** $\dfrac{a}{3}\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}$.

88. $\dfrac{27}{4}$ см^3; $\dfrac{25\sqrt{5}}{4}$ см^3. **89.** $\dfrac{7}{18}V$. **90.** $\dfrac{4}{3}a^3$.

91. $\dfrac{a^3}{12}\cdot(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi)^3\operatorname{tg}\varphi$; $\varphi=\operatorname{arctg}(3-\sqrt{3})$.

92. $4V$. **93.** $\dfrac{125}{27}$. **94.** $\dfrac{1}{2}V$. **95.** $\dfrac{3\sqrt{2}-2}{21}V$.

96. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\sqrt{2}c}\right)^{-1}$, а также $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{2}c}\right)^{-1}$, если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{2}c}>0$.

97. $(20-14\sqrt{2}):1$. **98.** $\dfrac{125}{12}V$. **99.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}a^3$.

100. а) $2a$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}a$. **101.** $(4+3\sqrt{6}):19$. **102.** $\dfrac{6}{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$ см.

ГЛАВА XVII

1. $r=h=\sqrt[3]{V/\pi}$. **2.** $2a^3/\sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{\pi}{18}V$. **4.** $a/\sqrt{3}$.

5. $\pi a^2\sqrt{23}/9$. **6.** $7a/8\sqrt{3}$. **8.** $20\pi/9\sqrt{3}$. **9.** $\sqrt{11}R/3$, $\sqrt{3}R$.

10. Один цилиндр радиуса $a(3\sqrt{2})$ и три цилиндра радиуса $a/\sqrt{2}$.

11. $2\operatorname{arctg}(2/\sqrt{3})$. **12.** $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

13. Если $2\alpha\leqslant\pi/2$, то наибольшую площадь, равную $\dfrac{1}{2}l^2\sin 2\alpha$, имеет осевое сечение; если $2\alpha>\pi/2$, то наибольшую площадь, равную $\dfrac{1}{2}l^2$, имеет сечение плоскостью, составляющей с осью угол, равный $\arccos(\sqrt{2}\cos\alpha)$.

14. $S(5/2;\ 5/2;\ 1)$, $S_{\text{сеч}}=5\pi/18$. **15.** $22{,}5\pi$. **16.** $\dfrac{9}{8}\pi a^3$.

17. $\dfrac{32}{15}a^3$. **18.** $\arccos(-1/71)$. **19.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin(\alpha/2)}$. **20.** $25\sqrt{5/3}\,\pi$ см^3.

21. $7\pi/6\sqrt{3}$. **22.** $2(\sqrt{2}-1)R$. **23.** $16\sqrt{3}r^3$. **24.** 1 : 2.

27. $\dfrac{64}{81}R^3$. **28.** $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}V$. **29.** $\pi/5\sqrt{3}$. **30.** $\dfrac{6\sqrt{3}+4\pi}{27}a^2$.

31. $\frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}a^3$. 32. $\frac{18\sqrt{2}-20}{31}\pi$. 34. $\frac{\sqrt{41}}{8}a$. 35. $\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha}{3(1+\sin^2\alpha)^{3/2}}R^3$.

36. a. 37. $\frac{5+\sqrt{7}}{4}a$. 38. $\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{4(\sin\alpha+\sin\beta)}$. 39. $\frac{3a}{4\sqrt{2}}$. 40. $\sqrt{3}r$.

41. $\frac{2}{3}$ см. 42. $\frac{4}{5}$ см. 43. а) $r:R=2\sqrt{3}-3$; б) 30°. 47. $\frac{15}{2\sqrt{2}}r$.

48. $\sqrt{1{,}5}\,a$. 49. $\frac{6-\sqrt{3}}{16}a^2$. 50. $\frac{3\sqrt{17}}{16}a^2$. 51. $\frac{8}{375}$ см^3. 52. $\frac{\sqrt{3}\pm1}{4\sqrt{2}}a$.

53. $\frac{a}{2}$; $2a$. 54. $\frac{40}{7}$ см; $\frac{104}{7}$ см. 55. $\frac{4r}{\sqrt{3}}$. 56. $\frac{2\sqrt{2}a}{5\pm\sqrt{11}}$.

57. $\arccos\frac{3}{5}$. 58. Верно. 59. $\frac{16\pi}{27}$. 60. $\frac{Rr}{R\pm r}$. 61. а) $8a^2$; б) $2r^2$; в) $8a^2$.

62. R^2. 63. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r$. 64. $\frac{5}{16}$.

65. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}\pi a^2$. Указание. Рассмотреть тетраэдр, гомотетический данному, с центром A и коэффициентом 2. 67. $4{,}5\,\pi a^3$.

68. Длина основания равна $\frac{1}{4}P$, длина боковой стороны $\frac{3}{8}P$.

69. $\frac{(n+1)(m-1)}{(n-1)(m+1)}$. 70. $V/\sqrt{3}$. 71. $\frac{8}{27}V$. 72. $2S$. 73. $\arccos(\sqrt{5}-2)$.

75. $\arcsin\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$. 76. $\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$. 77. $1:9$.

78. $\frac{3\sqrt{2}+1\pm\sqrt{10+6\sqrt{2}}}{9}R$ (внешнее касание), $\frac{3\sqrt{2}-1\pm\sqrt{10-6\sqrt{2}}}{9}R$ (внутреннее касание).

79. $ab/2c$, $bc/2a$, $ca/2b$.

80. $d_A=d_B=r\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$, $|AB|=2r\cos\alpha$. 81. $0{,}5\sqrt{n(n+2)}\,a$.

82. $1:(2\sqrt{2}+2):1$; $17:(6\sqrt{2}+2):17$. 83. $0{,}5r$; $1{,}5r$.

84. $r(\sqrt{1{,}5}\pm1)$. 85. $1:2:1$. 86. $\frac{\pi}{3}$. 87. $\frac{5}{\sqrt{3}}r$.

88. $(6+3\sqrt{2})V$. 89. $2\operatorname{arctg}\sin\alpha$. 90. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. -10. 2. $\left\{\sqrt{2\pi}, \frac{\sqrt{8\pi+1}-1}{2}\right\}$. 3. $9/2$. 4. $a<-1$.

5. 3. 6. $\{-1\}\cup[2;+\infty[$. 7. $-\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 8. $y=-x-\frac{5}{2}$.

9. $\{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$. 10. $(3-\sqrt{5})/4$.

11. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 12. $114\frac{1}{3}$. 13. $x_1=-63/4$, $x_2=-23/8$.

14. $\pi/4$, $\pi/4$, $3\pi/4$; $3\pi/4$. 15. $11/\sqrt{170}$. 16. $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

17. $\sqrt{7}$ м. **18.** Точка минимума e; промежутки убывания $]0;\ [$ и $]1;\ e]$; промежуток возрастания $[e;\ +\infty[$.

19. 60 км/ч. **20.** $\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $-\frac{7\pi}{12}+2\pi l$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$.

21. Точка $x=0$ — точка минимума, промежутки убывания: $]-\infty;\ 0]$ и $]1;\ +\infty[$, промежуток возрастания $[0;\ 1[$.

22. $310\frac{2}{7}\pi$. **23.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **24.** $]-\infty;\ -14/3[\cup]4;\ +\infty[$.

25. $\{1/16,\ 1\}$. **26.** 40 коп., 60 коп., 80 коп. и 1 руб. **27.** -6.

28. -1. **29.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}7+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$. **30.** $13\frac{1}{3}$.

31. 164850. **32.** При $\alpha\in]0;\ \pi/2]$, $\beta\in]0;\ \pi/2]$, $\alpha\neq\beta$ два решения: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{V}{\sin|\alpha-\beta|}$; при $\alpha\in]0;\ \pi/2]$, $\beta\in]0;\ \pi/2]$, $\alpha=\beta$, одно решение: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$; здесь $V=\frac{4a^3}{75}\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

33. $\{(15;\ -12)\}$; **34.** $\left\{-6\pi,\ -\frac{9\pi}{2},\ 0\right\}$. **35.** 100.

36. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **37.** $]0;\ 8/5[\cup]5/2;\ +\infty[$.

38. $z=3$. **39.** $-27/8$. **40.** $]-\infty;\ -4[\cup[-3;\ 3[\cup[6;\ -\infty[$.

41. 24; 0. **42.** 64/3. **43.** $3\pi R^3$. **44.** 100 столов и 400 стульев.

45. $\{0,\ 4/3\}$. **46.** $[0;\ 1]\cup[4;\ 16]$. **47.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\operatorname{arctg}2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

48. -24. **49.** $\pi/3$. **50.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

51. $A'=(6;\ 3)$, $M'=M$, $C'=(7;\ 9)$. **52.** $C_{11}^6<C_{11}^3+C_{11}^4$, $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$.

53. $e+\frac{2}{e}+4$, $\frac{10-7\ln 2}{2}$. **54.** б) $[10/3;\ +\infty[$.

55. $\pi+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$. **56.** $\{10\}$. **57.** 9. **58.** $2a$.

59. 0. **60.** $12-5\ln 5$.

61. Указание. При гомотетии с центром $[AC]\cap[BD]$ и коэффициентом $-|CD|/|AB|$ квадрат, построенный на $[AB]$, перейдет в квадрат, построенный на $[CD]$.

62. $]-3;\ -1[$; **63.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}+2\pi l$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$.

64. Отношение объемов «верхнего» и «нижнего» многогранников равно 3/5.

65. $]-1;\ +\infty[$. **66.** $\{(1/2;\ 1/4),\ (1/8;\ 64)\}$.

67. $5\pi/12$, $5\pi/12$, $7\pi/12$, $7\pi/12$. **68.** $\frac{\pi k}{3}$, $2\pi k-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

69. Если $V_1/V_2=2$, то $t_1/t_2=2/3$. **70.** $\arcsin 2(\sqrt{2}-1)$.

71. $-\frac{1}{8}$. **72.** $\{(\sqrt[4]{3};\ 1),\ (\sqrt[4]{3};\ -1)\}$.

73. $\sqrt{3}-1$. **74.** $\left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right\}$.

75. Если основание равнобедренного треугольника, полученного в сечении, лежит на плоскости $ABCD$, то $S=\frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; если оно лежит на плоскости CDD_1C_1 (или на плоскости BCC_1B_1), то $S=\frac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

76. $b>0$, $a\in\left]-\sqrt[4]{\frac{128}{3}b};\ -\sqrt[4]{b}\right[\cup\left]\sqrt[4]{b};\ \sqrt[4]{\frac{128}{3}b}\right[$ или $b\leqslant 0$, a — любое число. **77.** 294840.

78. При $a\in[0;\ 4[$, $x=\pi k$, при $a\notin[0;\ 4[$, $x=\pi k$ и $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+2}{2(a-1)}$, $k\in\mathbb{Z}$.

79. $\frac{a\sin^2(\alpha/2)}{\sqrt{2}\cos(\alpha/2)\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)}$. **80.** $a=(2;\ -2;\ -2)$. **81.** 0.

82. $2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **83.** $[1;\ 3]$. **85.** $6+6$.

86. 3 сына и 2 дочери. **87.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **88.** $\{20\}$.

89. 2, -10. **90.** $\frac{np(np+1)}{2}$. **91.** $\frac{4a}{t}$ м/с, $\frac{a}{t}$ м/с.

92. πk, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **93.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$ см, $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ см. **94.** $\{1/2\}\cup]-\infty;\ 0[$.

95. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$, $\frac{\sqrt{15}}{4}a^3$. **96.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **97.** $]0;\ +\infty[$.

98. $b=2a/3$, $V=\frac{4}{27}a^2H$. **99.** 13. **100.** $V=\frac{4}{3}r^3\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$, $\varphi=\operatorname{arctg}2$.

101. 32. **102.** $]0;\ 1/2]\cup]8;\ 16[$. **103.** 576. **105.** $8\sqrt{2}$.

106. $\left[\frac{-7-2\sqrt{11}}{5};\ \frac{-7+2\sqrt{11}}{5}\right]$. **107.** $]-1/6;\ \pi/3]\cup[5\pi/3;\ 6[$.

108. $\frac{4}{3}R$.

109. 720. **110.** $]1;\ \sqrt{2}[\cup]2;\ +\infty[$. **111.** $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

СПИСОК ФОРМУЛ

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

1°. Формулы для решений уравнений:

$\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $(|a| \leqslant 1)$;

$\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $(|a| \leqslant 1)$;

$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R})$;

$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R})$;

$\sin x = 0$, $x = \pi n$;

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$,

где $n \in \mathbb{Z}$.

2°. Некоторые значения обратных тригонометрических функций

a	$\arcsin a$	$\arccos a$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

a	$\operatorname{arctg} a$	$\operatorname{arcctg} a$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

3°. Формулы приведения:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin\alpha; \qquad \cos(\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos\alpha,$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

4°. Формулы, являющиеся верными равенствами для всех значений переменных:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos\alpha)/2; \qquad \cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos\alpha)/2;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(2\cos 2\alpha + 1) = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha);$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2};$$

для всех $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\beta\in\mathbb{R}$.

5°. Формулы, являющиеся верными равенствами ***на для всех*** 3 переменных:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

для $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$;

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

для $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

для $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi l$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $k,\ l,\ m\in\mathbb{Z}$;

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

для $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi l$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $k,\ l,\ m\in\mathbb{Z}$;

$$\sin^2\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha};\qquad \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(в указанных формулах, кроме последней, $a > 0$, $a \neq 1$):

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{для} \quad b > 0;$$

$$\log_a a^b = b \quad \text{для} \quad b \in \mathbb{R};$$

$$\log_a b^c = c \log_a b \quad \text{для} \quad b > 0, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a (-b) \quad \text{для} \quad b < 0, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{для} \quad b > 0, \quad c > 0;$$

$$\log_a bc = \log_a (-b) + \log_a (-c) \quad \text{для} \quad b < 0, \quad c < 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{для} \quad b > 0, \quad c > 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a (-b) - \log_a (-c) \quad \text{для} \quad b < 0, \quad c < 0;$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \quad \text{для} \quad b > 0;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{для} \quad b > 0, \quad c > 0, \quad c \neq 1;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{для} \quad b > 0, \quad b \neq 1;$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b \quad \text{для} \quad c \neq 0, \quad b > 0;$$

$$\log_{a^{2n}} b = \frac{1}{2n} \log_{(-a)} b \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0, \quad a < 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБЪЕМА ФИГУР

Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c:

$$V = abc;$$

объем призмы:

$$V = HS,$$

где H — высота, S — площадь основания призмы;

$$V = lS_{\perp},$$

где l — длина бокового ребра, $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения призмы;

объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} HS,$$

где H — высота, S — площадь основания пирамиды;

объем усеченной пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2),$$

где H — высота, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды;
объем цилиндра:

$$V=\pi R^2H,$$

где R — радиус основания, H — высота цилиндра;
объем конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

где R — радиус основания, H — высота конуса;
объем усеченного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+\sqrt{Rr}+r^2),$$

где H — высота, R и r — радиусы оснований усеченного конуса;
объем шара:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара;
объем шарового сегмента:

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

где H — высота сегмента, R — радиус шара;
объем шарового сектора;

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

где R — радиус шара, H — высота сегментной части сектора;
объем фигуры вращения: пусть криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс, тогда объем фигуры, полученной при вращении этой трапеции вокруг оси абсцисс, вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Площадь ортогональной проекции многоугольника:

$$S_{\text{пр}} = S \cos \varphi,$$

где S — площадь многоугольника, $S_{\text{пр}}$ — площадь проекции, φ — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций;

площадь боковой поверхности призмы:

$$S = P_{\perp} \cdot l,$$

где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра (для прямой призмы $P_{\perp}$ — периметр основания);

площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot h,$$

где P — периметр основания, h — апофема;

площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) h,$$

где P_1 и P_2 — периметры оснований, h — апофема;

площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания, H — высота цилиндра;

площадь боковой поверхности конуса:

$$S = \pi Rl,$$

где R — радиус основания, l — длина образующей;

площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$S = \pi (R_1 + R_2) \cdot l,$$

где R_1, R_2 — радиусы оснований, l — длина образующей;

площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2,$$

где R — радиус;

площадь сферического сегмента:

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус сферы, H — высота сегмента.

α°	sin α	tg α	ctg α	cos α	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0175	0175	57,3	1,000	89
2	0349	0349	28,6	0,999	88
3	0523	0524	19,1	999	87
4	0698	0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	1045	1051	9,51	995	84
7	1219	1228	8,14	993	83
8	139	141	7,11	990	82
9	156	158	6,31	988	81
10	0,174	0,176	5,67	985	80
11	191	194	5,145	982	79
12	208	213	4,705	978	78
13	225	231	4,331	974	77
14	242	249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	276	287	487	961	74
17	292	306	271	956	73
18	309	325	3,078	951	72
19	326	344	2,904	946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	358	384	605	934	69
22	375	404	475	927	68
23	391	424	356	921	67
24	407	445	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	438	488	2,050	899	64
27	454	510	1,963	891	63
28	469	532	881	883	62
29	485	554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	515	601	664	857	59
32	530	625	600	848	58
33	545	649	540	839	57
34	559	675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	588	727	376	809	54
37	602	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α	ctg α	tg α	sin α	α°

α°	a радианов	$\sin a$	$\operatorname{tg} a$	α°	a радианов	$\sin a$	$\operatorname{tg} a$
0	0	0,000	0,000	91,7	1,6	1,000	−24,23
5,73	0,1	0,100	+0,100	97,4	1,7	0,992	−7,697
11,5	0,2	0,199	+0,203	103,1	1,8	0,974	−4,286
17,2	0,3	0,296	+0,309	108,9	1,9	0,946	−2,927
22,9	0,4	0,389	+0,423	114,6	2,0	0,909	−2,185
28,7	0,5	0,479	+0,546	120,3	2,1	0,863	−1,710
34,4	0,6	0,565	+0,684	126,1	2,2	0,808	−1,374
40,1	0.7	0,644	+0,842	131,8	2,3	0,746	−1,119
45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707	+1,000	135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707	−1,000
45,8	0,8	0,717	+1,030	137,5	2,4	0,675	−0,916
51,6	0,9	0,783	+1,260	143,2	2,5	0,598	−0,747
57,3	1,0	0,841	+1,557	149,0	2,6	0,516	−0,602
63,0	1,1	0,891	+1,965	154,7	2,7	0,427	−0,473
68,8	1,2	0,932	+2,572	160,4	2,8	0,335	−0,356
74,5	1,3	0,964	+3,602	166,2	2,9	0,239	−0,246
80,2	1,4	0,985	+5,798	171,9	3,0	0,141	−0,143
86,0	1,5	0,997	+14,10	177,6	3,1	0,042	−0,042
90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—	180,0	π	0,000	0,000

Александр Дмитриевич Кутасов,
Татьяна Сергеевна Пиголкина,
Валерий Иванович Чехлов,
Тамара Харитоновна Яковлева

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в вузы

М., 1981 г., 608 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры: *С. Н. Макарова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11556

Сдано в набор 21.05.80. Подписано к печати 29.09.80. Бумага $60\times90^{1}/_{16}$, тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 38. Уч.-изд. л. 41,06. Тираж 200 000 (1-й завод 1—100 000) экз. Заказ № 1345. Цена книги 1 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

С матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15
Отпечатано в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10. Заказ 426.